

## TRANG THÔNG TIN LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Tên đề tài luận án tiến sĩ: **“Một số tính chất nghiệm của lớp phương trình chứa toán tử elliptic suy biến mạnh”**

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

Họ và tên NCS: Phùng Thị Kim Yên

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

### NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN

Luận án đạt được các kết quả sau:

1. Đối với phương trình  $\Delta_{\gamma}^2$ -Laplace nửa tuyến tính cấp bốn: Đưa ra được đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev của bài toán Dirichlet, từ đó chứng minh sự không tồn tại nghiệm không tầm thường trong miền  $\delta_i$ -hình sao khi vế phải có độ tăng trưởng theo  $u$  lớn hơn  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ ; đồng thời chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu, tính nhiều nghiệm của bài toán với điều kiện số hạng phi tuyến có bậc tăng trưởng theo  $u$  là nhỏ hơn  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ , ở đây  $\tilde{N}$  là số chiều thuần nhất. Qua đó đã chứng tỏ giá trị  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$  là giá trị tới hạn của bậc tăng trưởng của vế phải theo  $u$ .

2. Đối với phương trình hyperbolic chứa toán tử elliptic suy biến mạnh  $P_{\alpha,\beta}$ : Đưa ra các điều kiện đủ đối với các số hạng tuyến tính và phi tuyến của phương trình để đảm bảo sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục; Chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục compact liên thông trong không gian  $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ , đồng thời mô tả cấu trúc của nó.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần hoàn thiện việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm trong miền bị chặn của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn và đáng điều tiệm cận của các phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến trong cả không gian. Trong Chương 2 tính giải được của bài toán Dirichlet lần đầu được xét cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn chứa toán tử  $\Delta_{\gamma}^2$ -Laplace. Trong Chương 3 vấn đề tiệm cận theo thời gian của nghiệm bài toán Cauchy được xét trong cả không gian thay vì trong miền bị chặn như trước đây. Các kết

quả đối với một vài lớp hàm phi tuyến là mới thậm chí khi  $P_{\alpha,\beta}$  là toán tử elliptic.

## **CÁC ỨNG DỤNG, KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HOẶC NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU**

### **Các ứng dụng, khả năng ứng dụng trong thực tiễn**

Phương trình elliptic cấp hai xuất hiện trong thực tế khá đa dạng như: phương trình mô tả dòng điện hoặc từ trường, mặt cụt tiêu... Gần đây một số chuyên gia đã nghiên cứu phương trình elliptic phi tuyến cấp bốn như phương trình để nghiên cứu sóng truyền trong cầu treo và độ võng tĩnh của bản đàn hồi trong chất lỏng. Nghiên cứu về phương trình chứa toán tử elliptic suy biến thường phức tạp hơn so với phương trình chứa toán tử elliptic và nó có ứng dụng trong thực tế rất rộng lớn khi ta nghiên cứu vật chất có mật độ không đồng đều, chỗ rất mỏng chỗ lại rất dày. Những vật chất này tồn tại vô số trong vũ trụ bao la của chúng ta.

### **Những vấn đề còn bỏ ngỏ cần tiếp tục nghiên cứu**

Liên quan tới chủ đề của luận án, những vấn đề sau là mở và theo chúng tôi là đáng quan tâm:

- Điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán biên nói trên trong miền không bị chặn.

- Tính chất của tập hút toàn cục như: số chiều, sự phụ thuộc liên tục vào các tham số, tính trơn, ...

- Sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic suy biến với các điều kiện biên khác nhau, chẳng hạn điều kiện biên không thuần nhất, điều kiện biên Neumann, điều kiện biên hỗn hợp, điều kiện biên phi tuyến, ... Để làm được điều này cần xây dựng được không gian Sobolev có trọng tương ứng, định lý nhúng kiểu Sobolev.

- Sự tồn tại tập hút lồi, tập hút đều khi hàm phi tuyến phụ thuộc thời gian.

- Các mô hình ứng dụng thực tế.

## INFORMATION OF DOCTORAL DISSERTATION

**Dissertation title:** “*Some properties of solutions of a class of equations containing strongly degenerate elliptic operators*”

**Specialty:** Mathematical Analysis      **Code:** 946 01 02

**Ph. D. Candidate:** Phùng Thị Kim Yến

**Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Hà Tiến Ngoạn

**Training Institute:** University of Education – Thai Nguyen University

### NEW SCIENTIFIC FINDINGS OF THE DISSERTATION

The thesis has obtained the following results:

1. For fourth order semi-linear equations containing the  $\Delta_\gamma^2$ -Laplace: Give the Pohozaev integral identity of the Dirichlet problem, thereby prove the non-existence of non-trivial solutions in  $\delta_r$ -star domains when the right hand sides grow, with respect to  $u$ , greater than  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ ; at the same time, prove the existence of weak solutions, establish multiple solutions of the problem provided that the nonlinear terms grow, in terms of  $u$ , less than  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ .

Thereby, it has been shown that the value  $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$  is the critical value of the growth order of the right-hand sides in terms of  $u$ .

2. For hyperbolic equations containing the strongly degenerate elliptic operator  $P_{\alpha,\beta}$ : Give sufficient conditions for the linear and nonlinear terms of the equations to ensure the unique existence of global integral solutions; the existence of connected compact global attractors in the space  $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$  and describe their structures.

The results of the thesis are new, have scientific significance and contribute to perfecting the study of the existence of solutions in bounded domains of boundary value problems for degenerate elliptic equations of the fourth order and asymptotic behavior of solutions to damped hyperbolic equations containing degenerate elliptic operators in the whole space. In Chapter 2 the solvability of the Dirichlet problem was first considered for a degenerate elliptic equation of the fourth order. In Chapter 3, the time-asymptotic behavior of

solutions to the Cauchy problem in the whole space is considered instead of in bounded domains as before. The results for this chapter are new for some classes of nonlinearity even when the operator  $P_{\alpha,\beta}$  is an elliptic operator.

## **APPLICATIONS IN PRACTICE AND RECOMMENDATIONS FOR FURTHER STUDIES**

### **Practical applications of the research results**

The second order elliptic equations that appear in practice are quite diverse such as: equations describing electric currents or magnetic fields, minimum surfaces... Recently, some experts have studied nonlinear fourth order elliptic equations as equations to model double transmission in suspension bridges and static deflection of elastic plates in liquids. The study of equations containing degenerate elliptic operators is often more complicated than equations containing elliptic operators, and it has wide practical applications when we study matter with unequal density: some places are very thin, some places are very thick. These substances exist in abundance in our vast universe.

### **Recommendations for further studies**

Regarding the topic of the thesis, the following problems are open and in our opinion are of interest:

- Conditions for the existence of solutions of boundary value problems in unbounded domains.
- Properties of global attractors such as: dimensionality, continuous dependence on parameters, smoothness, ...
- The existence of solutions and asymptotic behavior of solutions to degenerate hyperbolic equations with different boundary conditions, such as heterogeneous boundary conditions, Neumann boundary conditions, mixed boundary conditions, and nonlinear boundary conditions, ... To do this, it is necessary to construct corresponding weighted Sobolev spaces, the Sobolev type embedding theorems.
- The existence of regressive and uniform attractors when nonlinear

functions depend on the time.

- Practical application models.