BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGUYỄN ĐỨC LẠNG

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN VÀ NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 62 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Nguyễn Bường.

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp đại học họp tại: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.
Vào hồi....giờ....ngày....tháng....năm 2015

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Quốc gia.
- Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên.
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.
- Thư viện Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Mở đầu

Lý thuyết điểm bất động trong các không gian mêtric đã thực sự lôi cuốn sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước trong hàng chục năm qua. Điều đó không chỉ vì lý thuyết điểm bất động đóng vai trò quan trọng trong toán học mà còn vì những ứng dụng của nó trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân, lý thuyết tối ưu, lý thuyết xấp xỉ, các mô hình toán học và lý thuyết kinh tế. Nhiều nhà toán học tên tuổi như Brower E., Banach S., Bauschke H. H., Moudafi A., Xu H. K., Schauder J., Browder F. E., Ky Fan K., Kirk W. A., Nguyễn Bường, Phạm Kỳ Anh, Lê Dũng Mưu, v.v ... đã mở rộng các kết quả về bài toán điểm bất động của ánh xạ co trong không gian hữu hạn chiều cho bài toán điểm bất động của ánh xạ liên tục Lipschitz, ánh xạ giả co, ánh xạ không giãn, v.v ... trong không gian Hilbert, không gian Banach. Những kết quả mở rộng này không chỉ đề cập đến sự tồn tại điểm bất động mà còn đề cập đến vấn đề xấp xỉ điểm bất động của một ánh xạ. Gần đây những nghiên cứu về bài toán tìm điểm bất động của lớp các ánh xạ không giãn đã trở thành một trong những hướng nghiên cứu hết sức sôi động của giải tích phi tuyến. Một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động kinh điển phải kể đến là phương pháp lặp Krasnosel'skii (1955), phương pháp lặp Mann (1953), phương pháp lặp Halpern (1967), phương pháp lặp Ishikawa (1974), v.v .... Một số nhà nghiên cứu trong nước cũng có những công trình thú vị về tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert và không gian Banach như (Pham Ky Anh, Cao Van Chung (2014) "Parallel Hybrid Methods for a Finite Family of Relatively Nonexpansive Mappings", *Numerical Functional Analysis and Optimization.*, 35, pp. 649-664; P.N. Anh (2012) "Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 154, pp. 303-320; P.N. Anh, L.D. Muu (2014) "A hybrid subgradient algorithm for nonexpansive mappings and equilibrium problems", *Optim. Lett.*, 8, pp. 727-738; Nguyen Thi Thu Thuy: (2013) "A new hybrid method for variational inequality and fixed point problems", *Vietnam. J. Math.*, 41, pp. 353-366, (2014) "Hybrid Mann-Halpern iteration methods for finding fixed points involving asymptotically nonexpansive mappings and semigroups", *Vietnam. J. Math.*, Volume 42, Issue 2, pp. 219-232, "An iterative method for equilibrium, variational inequality, and fixed point problems for a nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*,Volume 38, Issue 1, pp. 113-130, (2015) "A strongly strongly convergent shrinking descent-like Halpern's method for monotone variational inequaliy and fixed point problems", *Acta. Math. Vietnam.*, Volume 39, Issue

3, pp. 379-391; Nguyen Thị Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013) "Implicit Iteration Methods for Variational Inequalities in Banach Spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, (2) 36(4), pp. 917-926; Duong Viet Thong: (2011), "An implicit iteration process for nonexpansive semigroups", *Nonlinear Anal.*, 74, pp. 6116-6120, (2012) "The comparison of the convergence speed between picard, Mann, Ishikawa and two-step iterations in Banach spaces", *Acta. Math. Vietnam.*, Volume 37, Number 2, pp. 243-249, "Viscosity approximation method for Lipschitzian pseudocontraction semigroups in Banach spaces", *Vietnam. J. Math.*, 40:4, pp. 515-525, v.v ...).

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. đã đề xuất một cải tiến của phương pháp lặp Mann dựa trên phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học (được đề xuất lần đầu tiên vào năm 2000 bởi Solodov M. V. và Svaiter V. F.) ở dạng

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(x_n), \\ C_n = \{z \in C : \ \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \ \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \ n \ge 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

trong đó $\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ với $a \in [0, 1)$. Họ đã chứng minh được rằng nếu dãy $\{\alpha_n\}$ bị chặn trên bởi 1 thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (0.1) hội tụ mạnh về $P_{\mathrm{F}(T)}(x_0)$ khi $n \to \infty$, trong đó $P_{\mathrm{F}(T)}(x_0)$ là hình chiếu của x_0 trên tập điểm bất động $F(T)$ của ánh xạ không giãn T.

Năm 2000 Moudafi A đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ x_n = \dfrac{1}{1+\lambda_n}T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}f(x_n), \ n \ge 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

và

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+\lambda_n}T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}f(x_n), \ n \ge 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn T, trong đó $f : C \to C$ là một ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$ và λ_n là một dãy số dương. Ông đã chứng minh rằng:

1) Nếu $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$ thì dãy lặp (0.2) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất

của bất đẳng thức biến phân

$$x^* \in \mathrm{F}(T) \text{ sao cho } \langle (I-f)(x^*), x^*-x\rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathrm{F}(T). \tag{0.4}$$

2) Nếu $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ và $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n}\right| = 0$, thì dãy lặp (0.2) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (0.4).

Năm 2007, Alber Y. I. đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \mu_n[x_n - T(x_n)]),\ n \geq 0, \tag{0.5}$$

và chứng minh rằng nếu dãy $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$ được chọn sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và dãy $\{x_n\}$ bị chặn, thì mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc tập điểm bất động của T.

Mở rộng cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$, năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. đã đề xuất phương pháp

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - x_0, z - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n\cap Q_n}(x_0),\ n \geq 0, \end{cases} \tag{0.6}$$

trong đó $\alpha_n \in [0, a]$ với $a \in [0, 1)$ và $t_n \to +\infty$. Với một số điều kiện thích hợp cho dãy $\{\alpha_n\}$ và $\{t_n\}$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (06) hội tụ mạnh tới $P_{\mathcal{F}}(x_0)$, ở đây $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t))$ được giả thiết là khác rỗng.

Năm 2008, Takahashi W. và các cộng sự đề xuất một dạng đơn giản của (0.6) như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}(x_0), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n(x_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

Họ đã chỉ ra rằng nếu $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$, $0 < \lambda_n < \infty$ với mọi $n \geq 1$ và $\lambda_n \to \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.7) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$.
Mới đây Nguyễn Bường đã đưa ra ý tưởng thay thế các tập lồi, đóng C_n và Q_n bằng các nửa không gian. Trên cơ sở ý tưởng đó, trong luận án này chúng tôi đề xuất một số cải biên của một số các phương pháp nói trên tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

1.1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản về không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1 Cho H là một không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \to x$, nếu $||x_n - x|| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.2 Dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ khi $n \to \infty$ với mọi $y \in H$.

1.1.2. Một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

Bài toán: Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Hãy tìm $x^* \in C :\ T(x^*) = x^*$.

Phương pháp lặp Mann

Năm 1953, Mann W. R. đã nghiên cứu và đề xuất phương pháp lặp sau

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

ở đây $\{\alpha_n\}$ là một dãy số thực thỏa mãn $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_n < 1$, $n \geq 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Dãy lặp (1.1) được gọi là dãy lặp Mann. Mann W. R. đã chứng minh rằng, nếu dãy $\{\alpha_n\}$ được chọn thỏa mãn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.1) sẽ hội tụ yếu tới một điểm bất động của ánh xạ T.

Phương pháp lặp Halpern

Một trong những phương pháp lặp cổ điển hiệu quả nhất tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn, đảm bảo sự hội tụ mạnh của dãy lặp, là phương pháp lặp do Halpern B. đề xuất vào năm 1967

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

ở đây $u \in C$ và $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$. Dãy lặp (1.2) được gọi là dãy lặp Halpern. Ông đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp (1.2) về điểm bất động của ánh xạ không giãn T với điều kiện $\alpha_n = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

Phương pháp lặp Ishikawa

Được đề xuất bởi Ishikawa S. vào năm 1974. Với phương pháp lặp này thì dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T(x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(y_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực trong đoạn $[0,1]$ thỏa mãn $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1$, $n \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$. Dãy lặp (1.3) gọi là dãy lặp Ishikawa.

Phương pháp lặp xấp xỉ gắn kết

Năm 2000, Moudafi A. "Viscosity approximation methods for fixed-point problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 241, pp. 46-55. đã đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết, để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn T trong không gian Hilbert.

Định lý 1.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H, T là ánh xạ không giãn trên C thỏa mãn $F(T) \neq \emptyset$, f là ánh xạ co trên C với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0,1)$, dãy $\{x_n\}$ là dãy sinh bởi: $x_1 \in C$ và*

$$x_n = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\lambda_n} Tx_n, \quad n \geq 1, \tag{1.4}$$

$$x_{n+1} = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\lambda_n} Tx_n, \quad n \geq 1, \tag{1.5}$$

trong đó $\lambda_n \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(L1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

(L2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$;

(L3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n}\right| = 0.$

Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) hội tụ mạnh tới $p^* \in F(T)$, ở đây $p^* = P_{F(T)}f(p^*)$. Ngoài ra nếu dãy $\{\lambda_n\}$ thỏa mãn điều kiện (L1) *thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.4) hội tụ tới p^*.*

Phương pháp dạng đường dốc lai ghép

Năm 2007, Alber Ya. I. đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn T trên tập con lồi, đóng C ở dạng

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \mu_n[x_n - Tx_n]), \quad n \geq 0, \tag{1.6}$$

và chứng minh rằng nếu dãy $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$ được chọn sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và dãy $\{x_n\}$ bị chặn, thì:

(a) tồn tại một điểm tụ yếu của $\{x_n\}$;

(b) mọi điểm tụ yếu của $\{x_n\}$ đều thuộc $F(T)$;

(c) nếu $F(T) = \{x^*\}$, thì $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x^*.

1.2. Nửa nhóm không giãn và một số phương pháp tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn

Nguyen Buong (2010) "Strong convergence theorem for nonexpansive semigroups in Hilbert space", *Nonlinear Anal.*, 72(12), pp. 4534-4540, đưa ra kết quả mới tốt hơn các kết quả của Nakajo K., Takahashi W. và Saejung S. bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.5 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Hilbert thực H và cho $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T_n P_C(x_n), \\ \alpha_n \in (a, b],\ 0 < a < b < 1, \\ H_n = \{z \in H : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Nếu $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0$; $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$, thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (1.9) hội tụ mạnh tới $z_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chương 2

Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

2.1. Phương pháp xấp xỉ gắn kết cải biên

Trước hết, tương ứng với phương pháp lặp (0.2), chúng tôi đề xuất phương pháp lặp ẩn dưới đây

$$x_n = T^n x_n, \ \ T^n := T_1^n T_0^n, \ \text{ và } \ T^n := T_0^n T_1^n, \ \ n \in (0,1), \tag{2.1}$$

với T_i^n được xác định bởi

$$\begin{aligned} T_0^n &= (1-\lambda_n \mu)I + \lambda_n \mu f, \\ T_1^n &= (1-\beta_n)I + \beta_n T, \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó f là ánh xạ co với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0,1), \mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$ và các tham số $\{\lambda_n\} \subset (0,1), \{\beta_n\} \subset (\alpha, \beta)$, với mọi $n \in (0,1)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ thỏa mãn điều kiện $\lambda_n \to 0$ khi $n \to 0$.

Định lý 2.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0,1)$. Cho T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Cho $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1), (2.2) hội tụ mạnh tới phần tử $p^* \in F(T)$, đồng thời p^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle (I-f)(p^*), p^* - p \rangle \leq 0, \ \forall p \in F(T).$$

Tiếp theo chúng tôi đưa vào hai cải tiến mới của phương pháp lặp hiện (0.3) ở dạng

$$\begin{cases} x_1 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = (1-\lambda_n \mu)x_n + \lambda_n \mu f(x_n), \\ x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T y_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

trong đó, các tham số $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$, $\{\gamma_n\} \subset (\alpha, \beta)$, với $\alpha, \beta \in (0,1)$ và

$$\begin{cases} x_1 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n[(1-\lambda_n\mu)y_n + \lambda_n\mu f(y_n)], \end{cases} \tag{2.9}$$

trong đó $\{\beta_n\} \subset (\alpha, \beta)$.

Định lý 2.2 *Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $H, f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0,1)$, T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\mu \in (0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2)$, $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện* (L1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, (L2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ *(xem Định lý 1.2) và $\{\gamma_n\} \subset (\alpha, \beta)$ với $\alpha, \beta \in (0,1)$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.8) hội tụ mạnh tới phần tử duy nhất $p^* \in F(T)$, đồng thời p^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân:*

$$\langle (I-f)(p^*), p^* - p\rangle \leq 0, \ \forall p \in F(T).$$

Tương tự, nếu $\{\beta_n\} \subset (\alpha, \beta)$ thỏa mãn điều kiện $|\beta_{n+1} - \beta_n| \to 0$ khi $n \to \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.9) hội tụ mạnh về p^*.

2.2. Phương pháp lặp Mann - Halpern cải biên

Cụ thể hơn chúng tôi đã đề xuất phương pháp lặp mới dưới đây

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ z_n = \alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n) P_C T P_C(x_n), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) P_C T z_n, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ta có kết quả sau.

Định lý 2.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong [0,1] sao cho $\alpha_n \to 1$ và $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (2.13) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Hệ quả 2.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) P_C T P_C(x_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Hệ quả 2.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là một dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\alpha_n \to 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = P_C T(\alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n) P_C T P_C(x_n)), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

2.3. Phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp cho ánh xạ không giãn

Cụ thể, dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n (I - TP_C) x_n, \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ta có kết quả dưới đây.

Định lý 2.4 *Cho C là tập con lồi, đóng của không gian Hilbert thực H và cho T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là một dãy trong $(a, 1)$ với $a \in (0, 1]$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi (2.21), cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

2.4. Điểm bất động chung cho hai ánh xạ không giãn trên hai tập

Giả sử C_1, C_2, là hai tập con lồi, đóng trong H và $T_1 : C_1 \to C_1$, $T_2 : C_2 \to C_2$ là ánh xạ không giãn. Ta xét bài toán: Tìm

$$p \in F := F(T_1) \cap F(T_2), \tag{2.24}$$

giả thiết rằng F không rỗng.

Để giải quyết bài toán (2.24) chúng tôi đề xuất phương pháp lặp mới như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ z_n = x_n - \mu_n(x_n - T_1 P_{C_1}(x_n)), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1 - \beta_n) T_2 P_{C_2}(z_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Ta có định lý sau.

Định lý 2.5 *Cho C_1 và C_2 là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và T_1, T_2 là hai ánh xạ không giãn trên C_1 và C_2, sao cho $F := F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong [0,1] sao cho $\mu_n \in (a, b)$ với $a, b \in (0, 1)$ và $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi (2.25) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_F(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Hệ quả 2.3 *Cho C_1, C_2, là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T_1 : C_1 \to C_1, T_2 : C_2 \to C_2$ là hai ánh xạ không giãn với $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy số trong [0,1] thỏa mãn $0 < a \leq \mu_n \leq b < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = T_2 P_{C_2}(x_n - \mu_n(x_n - T_1 P_{C_1}(x_n))), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, *khi* $n \to \infty$.

Hệ quả 2.4 *Cho* C_1, C_2, *là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực* H *và* $C := C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{\mu_n\}$ $\{\beta_n\}$ *là hai dãy số trong* [0,1] *thỏa mãn* $\beta_n \to 0$. *Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$, *xác định bởi* $x_0 \in H$ *là một phần tử bất kỳ,*

$$\begin{cases} z_n = x_n - \mu_n(x_n - P_{C_1}(x_n)), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) P_{C_2}(z_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_C(x_0)$, *khi* $n \to \infty$.

2.5. Ví dụ tính toán minh họa

Ví dụ 2.1 Xét ánh xạ T từ không gian $L_2[0,1]$ vào chính nó được xác định như sau

$$(T(x))(u) = 3\int_0^1 usx(s)ds + 3u - 2, \tag{2.35}$$

với mọi $x \in L_2[0,1]$. Suy ra T là một ánh xạ không giãn.
Xét ánh xạ f từ $L_2[0,1]$ vào chính nó được xác định bởi

$$(f(x))(u) = \frac{1}{2}x(u), \text{ với mọi } x \in L_2[0,1]. \tag{2.36}$$

Khi ấy f là ánh xạ co với hệ số co $\widetilde{\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

Dễ thấy bài toán bất đẳng thức biến phân: Tìm $p^* \in F(T)$ sao cho

$$\langle p^* - f(p^*), p - p^*\rangle \ge 0, \ \ \forall p \in F(T), \tag{2.37}$$

có nghiệm duy nhất là $p^* = 3u - 2$.

Từ (2.1) ta xác định được

$$T^t = T_1^t T_0^t = T_1^t[(1-\lambda_t\mu)I + \lambda_t\mu f] = (1-\beta_t)(1-\frac{\lambda_t\mu}{2})I + \beta_t T((1-\frac{\lambda_t\mu}{2})I). \quad (2.38)$$

Chọn $\beta_t = \beta = 10^{-4},\ \mu = \dfrac{2}{5},\ \lambda_t = \lambda = 10^{-4}$ và tính ma trận

$$A = (1-(1-\beta)(1-\frac{\lambda\mu}{2}))I - 3\beta(1-\frac{\lambda\mu}{2})B$$

và tính vế phải $g = \beta(3u^T - (2,2,...,2)^T)$. Khi đó ta tính được nghiệm xấp xỉ $X = A^{-1}g$.

Với nghiệm chính xác $p^* = 3u - 2$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 20 được thể hiện trong bảng sau

Bảng 2.1

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.000000000000000$	-1.666694444908047	-2.000000000000000
$u_1 = 0.050000000000000$	-1.540906200737406	-1.850000000000000
....	....	....
$u_{20} = 1.000000000000000$	0.849070438504779	1.000000000000000

Tiếp theo, chúng tôi cũng thực hiện thử nghiệm số cho phương pháp lặp hiện (2.8).

Chọn $\mu = \dfrac{2}{5}, \gamma_k = \dfrac{1}{2},\ \lambda_k = \dfrac{1}{k},\ \forall k \geq 1$ và áp dụng công thức lặp (2.8) đối với xấp xỉ này ta được $X_{k+1} = (1-\gamma_k)X_k + \gamma_k(1-\dfrac{\lambda_k\mu}{2})(3BX_k + p)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 20 được thể hiện trong bảng sau

Bảng 2.2

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.00000000000000$	-1.999998092651367	-2.00000000000000
$u_1 = 0.05000000000000$	-1.848447062448525	-1.85000000000000
....	....	....
$u_{20} = 1.000000000000000$	1.031022511405487	1.000000000000000

Cũng với bài toán đã xét ở trên, xét phương pháp lặp hiện (2.9). Ta có $y_k = (1-\beta_k)x_k + \beta_k T x_k$ nên bằng phương pháp tương tự ta có phương trình xấp xỉ là $Y_k = (1-\beta_k)X_k + \beta_k(3BX_k + p)$, trong đó

$$Y_k = (y_k(u_0), y_k(u_1), ..., y_k(u_M))^T,\ X_k = (x_k(u_0), x_k(u_1), ..., x_k(u_M))^T$$

và $p = 3(u_0, u_1, ..., u_M) - (2, 2, ..., 2)$.
Chọn $\mu = \frac{2}{5}$, $\beta_k = \gamma_k = \frac{1}{2}$, $\lambda_k = \frac{1}{k}$ với mọi $k \geq 1$, áp dụng công thức lặp (2.9) cho xấp xỉ này ta được $X_{k+1} = (1-\gamma_k)X_k + \gamma_k(1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})Y_k$.

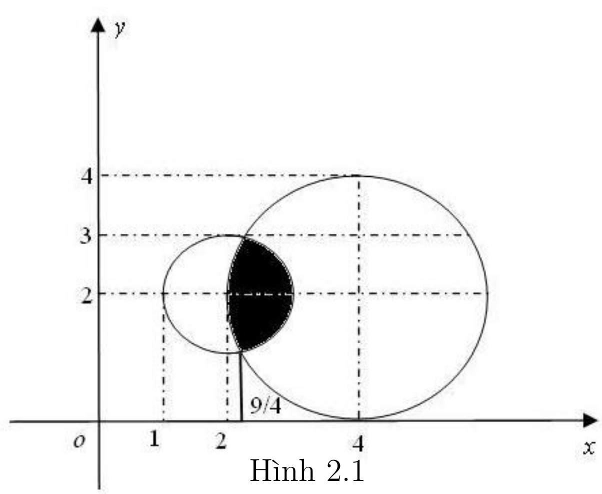
Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 50 được trình bày trong bảng dưới
Bảng 2.3

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.00000000000000$	-1.982945017736413	-2.00000000000000
$u_1 = 0.05000000000000$	-1.832285258509282	-1.85000000000000
....	....	....
$u_{20} = 1.000000000000000$	0.849070438504779	1.000000000000000

Ví dụ 2.2 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét hai hình tròn S_1 và S_2 lần lượt được cho bởi

$$S_1: \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, \ S_2: \ (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

Xét bài toán tìm một phần tử x^*, sao cho $x^* \in S = S_1 \cap S_2$.



Hình 2.1

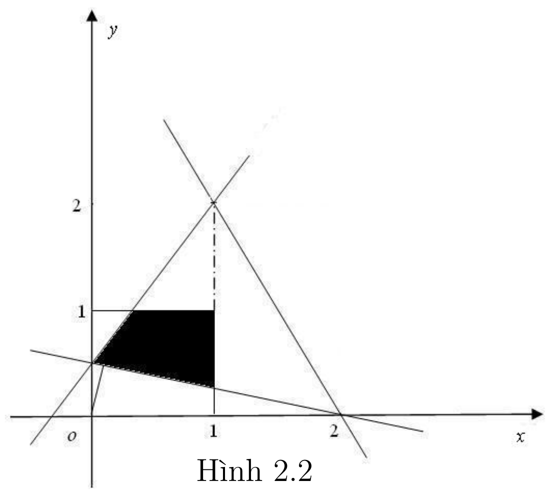
Lặp lại quá trình trên và chọn $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$, $x_0 = (\frac{9}{4}, 0)$, tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 1000 trình bày trong bảng sau
Bảng 2.4

Nghiệm		Nghiệm xx x_n		Nghiệm xx y_n		Nghiệm xx z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
2.2500000	1.0317541	2.2332447	1.0319233	2.2396581	1.0343974	2.2332510	1.03192782

Ví dụ 2.3 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét hai tập hợp C_1 và C_2 lần lượt được cho bởi

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x, \ y \leq 1\},$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x - 2y \geq -1, \ x + 4y \geq 2, \ 2x + y \leq 4\}.$$



Hình 2.2

Việc tính toán các siêu phẳng $H_n, \ W_n$ và hình chiếu tương ứng của x_0 trên $H_n, \ W_n$ được làm tương tự như ví dụ 2.2.

Chọn $x_0 = (0, 0), \ \beta_n = \dfrac{1}{n}, \ \ \mu_n = \dfrac{1}{2}$, tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 5000 được trình bày trong bảng sau

Bảng 2.5

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0.1176470	0.4705882	0.1153171	0.4612687	0.1176235	0.4704941	0.1153169	0.4612678

Ví dụ 2.4 Xét bài toán tìm một điểm chung của hai đường tròn được đề cập trong ví dụ 2.2, với dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định bởi (2.21).

Chọn $x_0 = \left(\dfrac{9}{4}, 0\right), \ \mu_n = \dfrac{1}{2}$ và tính

$$x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0) = P_{W_0 \cap W_1 \ldots \cap W_n}(x_0).$$

Như vậy, để xác định $P_{H_{n+1}}(x_0)$, ta có thể sử dụng phương pháp chiếu xoay vòng dạng

$$u_{k+1} = P_{W_{k \bmod n}}(u_k), \ u_0 = x_0, \ k \geq 0,$$

hoặc sử dụng phương pháp lặp dưới đây

$$u_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{W_i}(u_k)}{n}, \ u_0 = x_0, \ k \geq 0. \tag{2.41}$$

Ở đây chúng tôi sử dụng phương pháp lặp (2.41) để xấp xỉ $P_{H_{n+1}}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 200 được trình bày bảng sau
Bảng 2.6

Nghiệm		x_n		y_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2
2.2500000000	1.0317541634	2.2499871121	1.0317755681	2.2500564711	1.0317684570

Nhận xét 2.1 Qua các kết quả số ở trên, ta nhận thấy nếu số bước lặp càng lớn thì nghiệm xấp xỉ càng gần nghiệm chính xác.

Kết luận

Chương này, chúng tôi đưa ra cải biên mới cho các phương pháp lặp của Moudafi và đã thu được các định lý về sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp (2.1), (2.2) với các điều kiện nhẹ hơn so với kết quả trước đó "Định lý 2.1, Định lý 2.2". Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, cho bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ hay hai ánh xạ không giãn (2.13), (2.25) "Định lý 2.3, Định lý 2.5". Cuối cùng, chúng tôi thu được sự hội tụ mạnh của phương pháp lai đường dốc nhất (2.21) "Định lý 2.4". Một điểm nổi bật ở các kết quả thu được trong các "Định lý 2.3, Định lý 2.4" và "Định lý 2.5" là các tập C_n và Q_n được thay bằng các nửa không gian. Mục cuối cùng của chương này, dành cho việc trình bày các ví dụ số đơn giản nhằm minh họa cho tính đúng đắn của các kết quả nghiên cứu đạt được.

Chương 3

Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn

3.1. Điểm bất động của một nửa nhóm không giãn

Để tìm một phần tử $p \in \mathcal{F}$, dựa trên các phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, chúng tôi đề xuất một phương pháp lặp mới sau

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ z_n = \alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 \\ \qquad +\beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

cho nửa nhóm không giãn trên C.

Chúng tôi sẽ chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.1) về điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : \ t \ge 0\}$ với một số điều kiện thích hợp đặt lên các tham số $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{t_n\}$.

Định lý 3.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\ge 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\alpha_n \to 1$ và $\beta_n \to 0$ và $t_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.1) cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Hệ quả 3.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với*

$\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là một dãy số trong [0,1] thỏa mãn $\beta_n \to 0$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Hệ quả 3.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là dãy số trong [0,1] thỏa mãn $\alpha_n \to 1$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\left[\alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds\right]ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Tiếp theo chúng tôi đề cập đến một cải tiến của phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm một phần tử $p \in \mathcal{F}$. Chính xác hơn, chúng tôi xét phương pháp sau

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n(I - T_n P_C)(x_n), \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

và

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n(I - T(t_n)P_C(x_n)), \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp lặp (3.9) được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 3.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy số trong $(a, 1]$ với $a \in (0, 1]$ và $\lambda_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.9), cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Tiếp theo, sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp lặp (3.10) được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 3.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C sao cho $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy trong $(a, 1]$ với $a \in (0, 1]$ và $\{t_n\}$ là dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện $\liminf_{n\to\infty} t_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} t_n > 0$, và $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.10), hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

3.2. Điểm bất động của hai nửa nhóm không giãn

Giả sử C_1, C_2 hai tập con lồi, đóng trong H, $\{T_1(t) : t \geq 0\}$, $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn từ C_1, C_2 vào chính nó. Vấn đề nghiên cứu đặt ra ở đây là: Tìm

$$q \in \mathcal{F}_{1,2} := \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \tag{3.17}$$

khi $\mathcal{F}_i = \cap_{t\geq 0} F(T_i(t))$. ($\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ không rỗng).

Dựa trên (3.17) chúng tôi đưa vào quá trình lặp mới như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì}, \\ z_n = x_n - \mu_n\left(x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_1(s)P_{C_1}(x_n)ds\right), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_2(s)P_{C_2}(z_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad +\beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

và chỉ ra sự hội tụ mạnh của các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.18) đến điểm $q = u_0 \in \mathcal{F}_{1,2}$.

Định lý 3.4 *Cho C_1 và C_2 là hai tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Cho $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ và $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ là hai nửa nhóm không giãn trên C_1 và C_2 sao cho $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, trong đó $\mathcal{F}_i = \cap_{t>0} F(T_i(t)), i = 1, 2$. Giả sử $\{\mu_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy trong [0,1] sao cho $\mu_n \in (a, b)$ với $a, b \in (0, 1)$, $\beta_n \to 0$ và $t_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.18) cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Hệ quả 3.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là dãy số trong [0,1] thỏa mãn $\beta_n \to 0$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Hệ quả 3.4 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là dãy số trong [0,1] thỏa mãn $\alpha_n \to 1$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\Big(P_C(x_n) - \mu_n\Big[x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds\Big]\Big)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

3.3. Ví dụ tính toán minh họa

Ví dụ 3.1 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, với mỗi $t > 0$, xét ánh xạ $T(t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $T(t)x = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

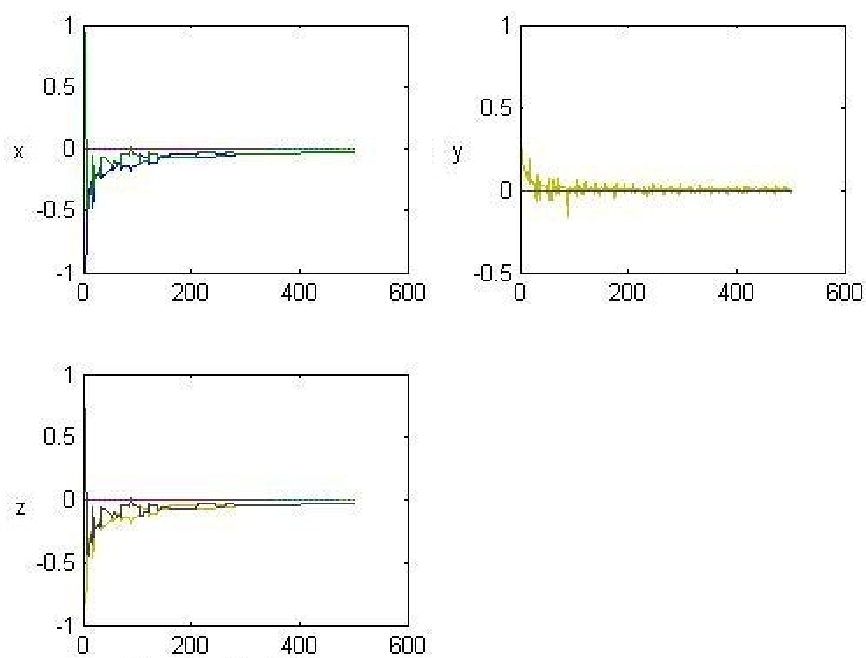
Chọn $x_0 = (-1, 1)$, $\alpha_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n}$, $t_n = n\pi$ và tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$, ở đây việc tính các siêu phẳng H_n, W_n và hình chiếu của x_0 trên các siêu phẳng này được làm tương tự như trong ví dụ 2.2.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 500 được trình bày bảng sau

Bảng 3.1

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0	0	-0.031259	-0.031259	-0.014563	-0.014563	-0.031230	-0.031230

Ngoài ra, sự hội tụ của các dãy lặp $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ về nghiệm $(0, 0)$ còn được thể hiện rõ nét hơn qua hình sau



Hình 3.1

Khi đó ta tính được $y_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_n T_n P_C(x_n)$ và việc tính H_{n+1}, W_n và $P_{H_{n+1}}(x_0)$ được tính tương tự như trong ví dụ 2.4.

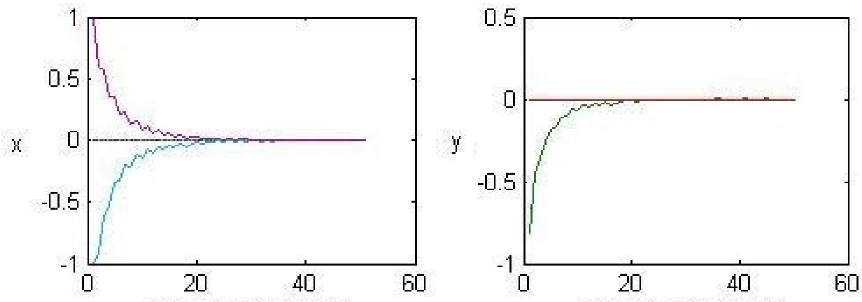
Chọn $x_0 = (-1, 1)$, $\mu_n = \dfrac{1}{2}$, $t_n = n\pi$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 50 được trình bày bảng sau

Bảng 3.2

Nghiệm		x_n		y_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2
0	0	-0.735×10^{-3}	0.445×10^{-3}	0.461×10^{-3}	-0.239×10^{-3}

Kết quả tính toán sau 50 bước lặp còn được thể hiện rõ hơn trong hình dưới đây



Hình 3.2

Ví dụ 3.2 Trong ví dụ này, xét phương pháp lặp (3.18) và giải bài toán tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn $\{T_m(t)\}$ với ma trận được cho bởi $\begin{pmatrix} \cos(mt) & -\sin(mt) \\ \sin(mt) & \cos(mt) \end{pmatrix}$, $m = 1, 2$.

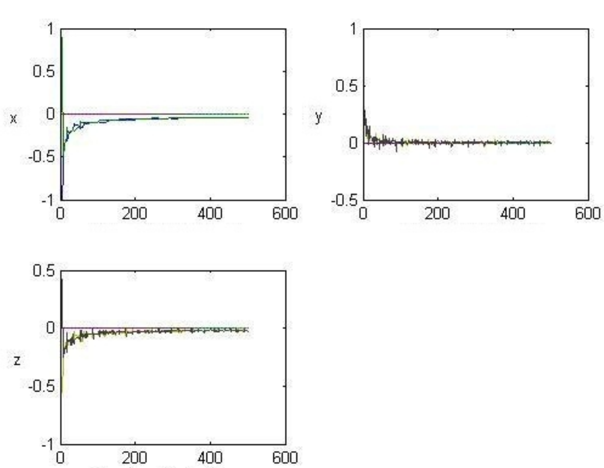
Chọn $x_0 = (-1, 1), \mu_n = \dfrac{1}{2}, \beta_n = \dfrac{1}{n}, t_n = n\pi$ và tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$, trong đó việc tính các siêu phẳng $H_n,\ W_n$ và hình chiếu của x_0 trên các siêu phẳng này được làm tương tự như trong ví dụ 2.2.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 500 được trình bày bảng sau

Bảng 3.3

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0	0	-0.036923	-0.037136	-0.008730	-0.008784	-0.027451	-0.027611

Sự hội tụ của phương pháp lặp về điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn còn được thể hiện thông qua hình dưới đây



Hình 3.3

Nhận xét 3.1 Qua các bảng kết quả số ở trên ta có thể thấy rằng nếu số bước lặp càng lớn thì nghiệm xấp xỉ càng gần nghiệm chính xác.

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, đã cải biên các phương pháp lặp của Nakajo K. và Takahashi W., chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.1) "Định lý 3.1" và các kết quả của Seajung S., chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.9), (3.10) "Định lý 3.2, Định lý 3.3", bằng cách thay các tập lồi, đóng C_n và Q_n bằng các nửa không gian, điều này giúp chúng ta có thể xác định x_{n+1} dễ dàng hơn. Ngoài ra, chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.18), cho bài toán tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn "Định lý 3.4". Cũng giống như Chương 2 của luận án, mục cuối cùng của chương này chúng tôi cũng trình bày một ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các kết quả đạt được.

Kết luận chung và đề xuất

Luận án đã đề cập đến các vấn đề sau

1. Trong luận án chúng tôi cải tiến phương pháp của Moudafi A., nhằm thu được sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện với các điều kiện "nhẹ hơn" đặt lên các tham số. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trên tập lồi, đóng C hay điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn trên hai tập lồi, đóng có giao khác rỗng trong không gian Hilbert H. Chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp dạng đường dốc lai ghép về điểm bất động của ánh xạ không giãn.

2. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học để tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn trên tập lồi, đóng C hay điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trên hai tập lồi, đóng có giao khác rỗng trong không gian Hilbert H. Nghiên cứu sự hội tụ mạnh của phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn.

Những vấn đề tiếp tục nghiên cứu

1. Sử dụng các kết quả nhận được trong luận án để các bài toán phức tạp hơn;

2. Mở rộng các kết quả trên lên không gian Banach.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

(1). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Shrinking hybrid descent-like methods for nonexpansive mappings and semigroups", *Nonlinear Functional Analysis and Applications.*, Vol. 16, No. 3, pp. 331-339.

(2). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Iteration methods for fixed point of a nonexpansive mapping", *International Mathematical Forum.*, Vol. 6, No. 60, pp. 2963-2974.

(3). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Hybrid Mann - Halpern iteration methods for nonexpansive mappings and semigroups", *Applied Mathematics and Computation.*, Vol. 218, Issue 6, pp. 2459-2466.

(4). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2012), "Hybrid descent - like halpern iteration methods for two nonexpansive mappings and semigroups on two sets", *Theoretical Mathematics & Applications.*, Vol. 2, No. 3, pp. 23-38.