BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÙI VIỆT HƯƠNG

XÁC ĐỊNH QUY LUẬT BIÊN PHI TUYẾN VÀ XÁC ĐỊNH NGUỒN TRONG CÁC QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 62 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN–2015

Luận án được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH. Đinh Nho Hào**

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Phản biện 3: ....

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp Đại học họp tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên
....

....

Vào hồi.......giờ........ngày........tháng ....năm..........

Có thể tìm luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Hà Nội
- Trung tâm học liệu – Đại học Thái Nguyên
- Thư viện trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Các quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán thường được mô hình hóa bằng bài toán biên cho phương trình parabolic: khi miền vật lý, hệ số của phương trình, điều kiện ban đầu và điều kiện biên được biết, người ta nghiên cứu bài toán biên này và dựa vào nghiệm của bài toán đưa ra một dự đoán về hiện tượng đang nghiên cứu. Đây là *bài toán thuận* cho quá trình mà ta đang xét. Tuy nhiên, trong thực tế, nhiều khi miền vật lý, hoặc hệ số của phương trình, hoặc điều kiện biên, điều kiện ban đầu không được biết cụ thể mà ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp, để qua đó nghiên cứu lại quá trình. Đây chính là những *bài toán ngược* với bài toán thuận được nói ở trên và là chủ đề sôi động trong mô hình hóa toán học và lý thuyết phương trình vi phân hơn 100 năm qua. Hai điều kiện quan trọng để mô hình hóa một quá trình truyền nhiệt đó là quy luật trao đổi nhiệt trên biên và nguồn. Cả hai điều kiện này đều do tác động ở bên ngoài và không phải lúc nào cũng được biết trước, do đó trong những trường hợp này, ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp và đó là nội dung của luận án này. Luận án gồm hai phần, phần đầu nghiên cứu bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt (nói chung là phi tuyến) trên biên qua đo đạc trên biên và phần thứ hai nghiên cứu bài toán xác định nguồn (tạo ra quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán) qua các quan sát khác nhau.

Trong phần đầu của luận án này, cụ thể trong Chương 1, chúng tôi nghiên cứu bài toán ngược xác định hàm $g(\cdot,\cdot)$ (tức quy luật trao đổi nhiệt trên biên) trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u,f) & \text{trên } S, \end{cases} \tag{0.6}$$

từ điều kiện quan sát bổ sung

$$u(\xi_0, t) = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{0.4}$$

Quan sát theo từng điểm (0.4) thường không có ý nghĩa khi nghiệm của (0.6) được hiểu theo nghĩa nghiệm yếu. Do đó, trong luận án chúng tôi sẽ thay thế quan sát này bởi các quan sát sau

1) Quan sát trên một phần của biên

$$u|_{\Sigma} = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{0.7}$$

với $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$, Γ là một phần của $\partial\Omega$ có độ đo khác 0;

2) Quan sát tích phân biên

$$lu := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x,t)dS = h(t), \quad t \in (0,T], \tag{0.8}$$

trong đó ω là hàm không âm, xác định trên $\partial\Omega$, $\omega \in L^1(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \omega(x)dS > 0$. Chúng tôi lưu ý rằng, nếu ta chọn hàm ω như là xấp xỉ của hàm Dirac δ thì các quan sát (0.8) có thể coi là trung bình của quan sát (0.4). Quan sát tích phân là lựa chọn thay thế cho quan sát đo đạc theo từng điểm (khi thiết bị đo đạc có độ dày khác 0) và bài toán ngược sẽ được giải một cách dễ dàng hơn nhờ phương pháp biến phân. Ngoài ra với cách đặt bài toán như ở trên, ta chỉ cần sử cần đo đạc ở một phần của biên là có thể xác định được quy luật truyền nhiệt trên biên, đây là một điều quan trọng trong thực tế. Trong mỗi bài toán, chúng tôi trình bày một vài kết quả đã biết về bài toán thuận (0.6), sử dụng phương pháp biến phân để giải bài toán ngược và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu hóa, cũng như đưa ra công thức tính gradient của phiếm hàm cần cực tiểu hóa; phần cuối cùng trong mỗi mục, chúng tôi dành để trình bày và thảo luận về phương pháp số để giải các bài toán trên.

Phần thứ hai của luận án dành cho bài toán xác định nguồn trong quá trình truyền nhiệt. Bài toán này được nhiều nhà khoa học nghiên cứu trong vòng hơn 50 năm qua. Mặc dù có khá nhiều kết quả về tính tồn tại, duy nhất và đánh giá ổn định cho bài toán, nhưng do tính đặt không chỉnh và có thể phi tuyến của bài toán, nên trong thời gian gần đây đã có rất nhiều nhà toán học và kỹ sư đã đặt lại vấn đề nghiên cứu chúng. Cụ thể, giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền Lipschitz, giới nội với biên Γ. Ký hiệu $Q := \Omega \times (0,T]$, với $T > 0$ và biên $S = \Gamma \times (0,T]$. Giả sử

$$\begin{aligned}
&a_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, b \in L^\infty(Q),\\
&a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j \in \{1,2,\ldots,n\},\\
&\lambda\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n} \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \Lambda\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\\
&0 \le b(x,t) \le \mu_1, \quad \text{hầu khắp trong } Q,\\
&u_0 \in L^2(\Omega), \quad \varphi, \psi \in L^2(S),\\
&\lambda \text{ và } \Lambda \text{ là các hằng số dương và } \mu_1 \ge 0.
\end{aligned}$$

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b(x,t)u = F, \ (x,t) \in Q,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

với điều kiện biên Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma u|_S = \varphi \text{ trên } S,$$

hoặc điều kiện biên Dirichlet

$$u|_S = \psi \text{ trên } S.$$

Ở đây,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}|_S := \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_j}) \cos(\nu, x_i)|_S,$$

ν là vectơ pháp tuyến ngoài đối với S và $\sigma \in L^\infty(S)$, được giả thiết là không âm hầu khắp nơi trên S.

Bài toán thuận là bài toán xác định u khi các hệ số của phương trình (2.7) và các dữ kiện u_0, φ (hoặc ψ) cũng như F đã cho. Bài toán ngược là bài toán xác định vế phải F khi một số điều kiện bổ sung lên lời giải u được cho thêm vào. Phụ thuộc vào cấu trúc của F và các quan sát bổ sung của u, ta có các bài toán ngược khác nhau như sau:

- Bài toán ngược (IP) 1: $F(x,t) = f(x,t)h(x,t) + g(x,t)$, tìm $f(x,t)$, khi u được cho trên Q. Một số tác giả đã nghiên cứu bài toán này như Vabishchevich (2003), Lavrente'v và Maksimov (2008).

- IP2: $F(x,t) = f(x)h(x,t)+g(x,t)$, h và g đã biết. Tìm $f(x)$, khi $u(x,T)$ được cho. Các tác giả như Hasanov (2012, 2014), Iskenderov (1976, 1979), Kamynin (2003) và Rundell (1980),... đã nghiên cứu bài toán này. Ngoài ra, Gol'dman đã nghiên cứu các bài toán ngược tương tự cho phương trình phi tuyến.

- IP2a: $F(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t)$, h và g đã biết. Tìm $f(x)$, nếu $\int_\Omega \omega_1(t)u(x,t)dx$ được biết. Ở đây, ω_1 thuộc $L^\infty(0,T)$ và không âm. Ngoài ra, $\int_0^T \omega_1(t)dt > 0$. Các quan sát dạng này được gọi là *quan sát tích phân* và chúng là mở rộng của quan sát tại thời điểm cuối T trong IP2, khi ω_1 là xấp xỉ hàm δ tại $t = T$. Bài toán này đã được Erdem (2013), Kamynin (2005),Orlovskii (1991) và Prilepko (1987, 2003) nghiên cứu.

- IP3:$F(x,t)$ =$f(t)h(x,t)$+$g(x,t)$, h and g đã cho. Tìm $f(t)$, nếu $u(x_0,t)$ được biết. Ở đây, x_0 là một điểm thuộc Ω. Borukhov và Vabishchevich (1998, 2000), Farcas và Lesnic (2006), Prilepko và Solov'ev (1987) đã nghiên cứu bài toán này.

- IP3a: $F(x,t)$ =$f(t)h(x,t)$ +$g(x,t)$, h và g đã cho. Kriksin và các cộng sự (1995), Orlovskii (1991) đã xét bài toán tìm $f(t)$, nếu $\int_\Omega \omega_2(x)u(x,t)dx$ được biết. Ở đây, $\omega_2 \in L^\infty(\Omega)$ với $\int_\Omega \omega_2(x)dx > 0$.

- IP4: $F(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t)$, h và g đã cho. Tìm $f(x)$ nếu một điều kiện bổ sung ở trên biên của u được biết. Ví dụ, như khi điều kiện Dirichlet đã cho, ta có thể lấy dữ kiện bổ sung là điều kiện Neumann được cho trên một phần của S. Các kết quả cho bài toán này có thể được tìm thấy trong các công trình của Cannon và cộng sự (1968, 1976, 1998), của Choulli và Yamamoto (2004, 2006), và của Yamamoto (1993, 1994). Bài toán tương tự khi xác định $f(t)$ với $F(x,t) = f(t)h(x,t) + g(x,t)$ đã được đề cập trong công trình của Hasanov và cộng sự (2003).

- IP5: Tìm nguồn điểm với quan sát trên biên với sự đóng góp của các tác giả Andrle (2011, 2015), El Badia (2002, 2005, 2007), Đinh Nho Hào (1992, 1994, 1998),... Một bài toán liên quan cũng đã được Hettlich và Rundell (2001) nghiên cứu.

Ta để ý rằng, trong các bài toán ngược IP1, IP2, IP2a để xác định $f(x,t)$ và $f(x)$ ta phải đòi hỏi lời giải u được biết trên toàn miền vật lý Ω - điều này khó có thể thực hiện được trong thực tế. Để khắc phục khiếm khuyết này, chúng tôi tiếp cận đến bài toán ngược này từ một quan điểm khác: đo đạc u tại một số điểm trong (hoặc điểm biên) $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \Omega$ (hoặc trên $\partial\Omega$) và từ các dữ kiện này xác định vế phải F. Vì các đo đạc bao giờ cũng phải lấy trung bình, nên với cách tiếp cận này ta có các dữ kiện sau:

$$l_i u = \int_\Omega \omega_i(x) u(x,t) dx = h_i(t), \quad h_i \in L^2(0,T), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

với $\omega_i \in L^\infty(\Omega)$ và $\int_\Omega \omega_i(x)dx > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các hàm trọng, còn N là số các đo đạc. Ngoài ra, rõ ràng rằng, nếu ta chỉ có các dữ kiện $l_i u$, thì ta sẽ không có tính duy nhất nghiệm của bài toán, trừ trường hợp khi ta xác định $f(t)$ trong IP3, IP3a (có thể xem trong các bài báo của Borukhov và Vablishchevich (1998, 2000), của Prilepko và Solovev (1987)). Bởi vậy, để có tính duy nhất, ta giả thiết rằng, ta có một dự đoán f^* của f - giả thiết thường đặt ra khi giải các bài toán thực tế. Tóm lại bài toán ngược trong các tiếp cận mới của chúng tôi như sau:

> Giả sử ta đo được các dữ kiện $l_i u = h_i(t), i = 1, 2, \ldots, N$, với một sai số nào đó và một ước lượng f^* của f đã được biết. Xác định f.

Ta sẽ giải bài toán ngược này bằng phương pháp bình phương tối thiểu: cực tiểu hóa phiếm hàm

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \|l_i u - h_i\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|^2_*,$$

với γ là tham số hiệu chỉnh, $\|\cdot\|_*$ là chuẩn thích hợp. Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng, phương pháp biến phân dạng này đã được Đinh Nho Hào sử dụng để giải các bài toán truyền nhiệt ngược và chứng tỏ nó rất hữu hiệu.

Chúng tôi chứng minh rằng, phiếm hàm này khả vi Fréchet và đưa ra công thức cho gradient của phiếm hàm thông qua một bài toán liên hợp. Sau đó chúng tôi sẽ rời rạc bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp sai phân rồi giải bài toán tối ưu rời rạc bằng phương pháp gradient liên hợp. Trường hợp xác định $f(t)$ sẽ được giải bằng phương pháp phân rã (splitting method). Các kết quả số cho thấy cách tiếp cận của chúng tôi là đúng đắn và phương pháp giải số là hữu hiệu.

Chương 1

Xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát trên biên

1.1. Một số kiến thức bổ trợ

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ là miền Lipschitz bị chặn có biên là $\partial\Omega := \Gamma$, $T > 0$ là một số thực, $Q = \Omega \times (0, T)$. Xét bài toán giá trị biên ban đầu trong phương trình parabolic tuyến tính

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + c_0 y = f & \text{trong } Q, \\ \partial_\nu y + \alpha y = g & \text{trên } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0(\cdot) & \text{trong } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Trong đó, ta giả thiết rằng $c_0, \alpha, f,\ g$ là các hàm phụ thuộc (x, t) thỏa mãn $c_0 \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$ sao cho $\alpha(x, t) \geq 0$ với hầu hết $(x, t) \in \Sigma$ và các hàm $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1 Kí hiệu $H^{1,0}(Q)$ là không gian định chuẩn gồm tất cả các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến $x_1, \cdots, x_n$ thuộc $L^2(Q)$ với chuẩn

$$\|y\|_{H^{1,0}(Q)} = \Big(\int_0^T \int_\Omega \big(|y(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2 \big)\, dxdt \Big)^{1/2}.$$

Định nghĩa 1.2 Không gian $H^{1,1}(Q)$ được định nghĩa

$$H^{1,1}(Q) = \big\{ y \in L^2(Q) : y_t \in L^2(Q) \text{ và } D_i y \in L^2(Q), \forall i = 1, \cdots, n \big\},$$

là không gian định chuẩn với chuẩn xác định như sau

$$\|y\|_{H^{1,1}(Q)} = \Big(\int_0^T \int_\Omega \big(|y(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2 + |y_t(x, t)|^2 \big)\, dxdt \Big)^{1/2}.$$

Định nghĩa 1.5 Cho V là một không gian Hilbert. Kí hiệu $W(0, T)$ là không gian tuyến tính gồm tất cả các hàm $y \in L^2(0, T; V)$, có đạo hàm (theo nghĩa phân bố) $y' \in L^2(0, T; V^*)$ với chuẩn xác định bởi

$$\|y\|_{W(0,T)} = \Big(\int_0^T \big(\|y(t)\|_V^2 + \|y'(t)\|_{V^*}^2 \big)\, dt \Big)^{1/2}.$$

Không gian $W(0,T) = \left\{y : y \in L^2(0,T;V), y' \in L^2(0,T;V^*)\right\}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle u, v\rangle_{W(0,T)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_V + \int_0^T \left\langle u'(t), v'(t)\right\rangle_{V^*} dt.$$

1.2. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát tích phân trên biên

1.2.1. Bài toán thuận

Xét bài toán giá trị biên - ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u,f) & \text{trên } S. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ở đây, hàm $g : I \times I \to \mathbb{R}$ (với $I \subset \mathbb{R}$) được giả sử là liên tục Lipschitz, đơn điệu giảm theo biến u, đơn điệu tăng theo biến f và thỏa mãn điều kiện $g(u,u) = 0$ còn u_0 và f là các hàm số cho trước có miền giá trị là I, thuộc vào không gian $L^2(\Omega)$ và $L^2(S)$.

Nếu hàm g thỏa mãn điều kiện trên thì ta kí hiệu $g \in \mathcal{A}$.

Định nghĩa 1.6 Cho $u_0 \in L^2_I(\Omega)$ và hàm $f \in L^2_I(S)$. Hàm $u \in H^{1,0}_I(Q)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.8) nếu hàm $g(u,f) \in L^2(S)$ và với mọi hàm thử $\eta \in H^{1,1}(Q)$ thỏa mãn $\eta(.,T) = 0$,

$$\int_Q \Big(- u(x,t)\eta_t(x,t) + \nabla u(x,t) \cdot \nabla \eta(x,t)\Big) dxdt$$
$$= \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx + \int_S g(u(x,t), f(x,t))\ \eta(x,t)dSdt. \tag{1.9}$$

Trong đó, không gian $L^2_I(S)$ gồm tất cả các hàm $y \in L^2(S)$ và có tập xác định là miền I.

Kết quả sau được Schmidt chứng minh vào năm 1989:

Định lý 1.6 *Cho J là khoảng con của tập I thỏa mãn hàm $g(u,f)$ liên tục Lipschitz đều trên $J \times J$. Khi đó với mỗi hàm $u_0 \in L^2_J(\Omega)$ và hàm $f \in L^2_J(S)$, bài toán* (1.8) *có duy nhất nghiệm yếu.*

Để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nghiệm $u(x,t)$ vào hàm g, ta kí hiệu nó là $u(x,t;g)$ hoặc $u(g)$ thay vì u. Trong phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh ánh xạ u biến g thành $u(g)$ khả vi Fréchet. Để làm được điều đó, trước tiên chúng tôi chứng minh $u(g)$ liên tục Lipschitz.

Gọi $\mathcal{A}_1$ là tập tất cả các hàm $g(u,f)$ khả vi liên tục theo biến u trong miền I. Ta có đánh giá sau

Bổ đề 1.1 *Cho hàm $g^1, g^2 \in \mathcal{A}_1$ thỏa mãn $g^1 - g^2 \in \mathcal{A}$ còn u^1, u^2 là nghiệm* *của bài toán (1.8) tương ứng với điều kiện biên g^1, g^2. Giả sử $u_0 \in L^2_I(\Omega)$ và $f \in L^\infty_I(S)$. Khi đó, tồn tại một hằng số c sao cho*

$$\|u^1 - u^2\|_{W(0,T)} + \|u^1 - u^2\|_{C(\overline{Q})} \leq c\|g^1 - g^2\|_{L^\infty_I(I\times I)}.$$

Định lý 1.9 *Cho $u_0 \in L^2_I(\Omega), f \in L^\infty_I(S)$ và $g \in \mathcal{A}_1$. Khi đó, ánh xạ biến g thành $u(g)$ khả vi Fréchet và với bất kì $g, g+z \in \mathcal{A}_1$ ta có*

$$\lim_{\|z\|_{L^\infty(I\times I)}\to 0} \frac{\|u(g+z) - u(g) - \eta\|_{W(0,T)}}{\|z\|_{C^1(I)}} = 0. \tag{1.16}$$

1.2.2. Bài toán biến phân

Nội dung của phương pháp biến phân là tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(g) = \frac{1}{2}\|lu(g) - h\|^2_{L^2(0,T)} \qquad \text{trên tập } \mathcal{A}_1. \tag{1.20}$$

Định lý 1.10 *Phiếm hàm $J(g)$ khả vi Fréchet trên tập $\mathcal{A}_1$ và gradient được tính theo công thức*

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u(g))\varphi(x,t)dSdt, \tag{1.21}$$

trong đó, $\varphi(x,t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \textit{trong } Q, \\ \varphi(x,T) = 0 & \textit{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + \omega(x)\Big(\int_{\partial\Omega}\omega(x)u(g)|_S dS - h(t)\Big) & \textit{trên } S. \end{cases}$$

Trong phát biểu dưới đây, chúng tôi chỉ ra điều kiện cần của cực trị cho phiếm hàm $J(g)$.

Định lý 1.11 *Giả sử $g^* \in \mathcal{A}_1$ là cực tiểu của phiếm hàm (1.20) trên tập $\mathcal{A}_1$. Khi đó, bất kì $z = g - g^* \in \mathcal{A}_1$,*

$$\nabla J(g^*)z = \int_S z(u^*(g^*))\varphi(x,t;g^*)dSdt \geq 0, \tag{1.23}$$

với u^* là nghiệm của bài toán (1.8), $\varphi(x,t;g^*)$ là nghiệm của bài toán liên hợp ứng với điều kiện biên $g = g^*$.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh sự tồn tại cực tiểu của bài toán biến phân (1.20) trên tập chấp nhận được. Sử dụng kĩ thuật của Rösch đưa ra vào năm 1992, chúng tôi xét tập

$$\mathcal{A}_2 := \Big\{g \in C^{1,\alpha}[I], m_1 \leq g(u) \leq M_1, M_2 \leq \dot{g}(u) \leq 0, \forall u \in I,$$
$$\sup_{u_1,u_2\in I} \frac{|\dot{g}_u(u_1) - \dot{g}_u(u_2)|}{|u_1 - u_2|^\nu} \leq C\Big\}.$$

Ở đây, ν, m_1, M_1, M_2 và C là các hằng số cho trước.

Giả sử $u_0 \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ với hằng số β nào đó thuộc $(0,1]$. Thế thì, theo Raymond J.P. và Zidani H., ta có $u \in C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q})$ với $\gamma \in (0,1)$. Đặt

$$T_{ad} := \Big\{(g, u(g)) : g \in \mathcal{A}_2; u \in C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q})\Big\}.$$

Bổ đề 1.2 *Tập T_{ad} là tiền compact trong không gian $C^1[I] \times C(\overline{Q})$.*
Định lý 1.12 *Tập T_{ad} đóng trong không gian $C^1[I] \times C(\overline{Q})$.*
Định lý 1.13 *Bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm $J(g)$ trên tập $\mathcal{A}_1$ có ít nhất một nghiệm.*

1.2.3. Ví dụ số

Để giải số bài toán (1.8) với quan sát tích phân (0.8) chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử biên để giải bài toán thuận và bài toán liên hợp, sử dụng phương pháp lặp Gauss–Newton để tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.20).

Chúng tôi thử nghiệm thuật toán cho miền hai chiều $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $T = 1$ và nghiệm chính xác được cho bởi

$$u_{\text{exact}}(x,t) = \frac{100}{4\pi t} \exp\left(-\frac{|x - x_0|^2}{4t}\right), \tag{1.32}$$

trong đó $x_0 = (-2,-2)$. Ta nhận thấy rằng từ phương trình (1.32), cực tiểu của u đạt tại $t = 0$ với kiện ban đầu $u(x,0) = u_0(x) = 0$, trong khi cực đại của u_{exact} đạt tại $t = T = 1$ và $x = (0,0)$, tức là $u((0,0),1) = \frac{100}{4\pi}e^{-2}$. Do đó, trong trường hợp này, chúng tôi chọn khoảng thời gian $[A,B] = [0, \frac{100}{4\pi}e^{-2}]$.

Chúng tôi xét các ví dụ có ý nghĩa vật lý như tìm lại quy luật truyền nhiệt tuyến tính của Newton và quy luật bức xạ nhiệt phi tuyến bậc bốn khi điều kiện biên có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) - g_{\text{exact}}(f), \quad \text{trên } S,$$

với dữ kiện đầu vào f cho trước được xác định bởi

$$f = \frac{\partial u_{\text{exact}}}{\partial \nu} + u_{\text{exact}}, \quad \text{trên } S.$$

Trong trường hợp tuyến tính điều kiện biên tuyến tính ta có $g_{\text{exact}}(f) = -f$ với

$$f = \left(\frac{\partial u_{\text{exact}}}{\partial \nu} + u^4_{\text{exact}}\right)^{1/4}, \quad \text{trên } S.$$

Trong trường hợp điều kiện biên phi tuyến ta có $g_{\text{exact}}(f) = -f^4$.

Bằng tính toán trực tiếp, ta có cực trị của hàm f được xác định như trên trên S là $[m := \min_S f; M := \max_S f] \supset [A,B] = [0, \frac{100}{4\pi}e^{-2}]$. Theo Hệ quả 1.7.2, ta biết rằng $m \le u \le M$, hơn nữa các cận trên M và cận dưới m bị chặn do các dữ kiện đầu vào u_0 và f được cho trước.

Ở đây, hai hàm trọng được sử dụng trong quan sát tích phân (0.8) là

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{nếu } \xi \in [(0;0),(\varepsilon,0)], \\ 0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases} \qquad \varepsilon = 10^{-5}, \tag{1.33}$$

và

$$\omega(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1, \tag{1.34}$$

với $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Chú ý rằng trong hàm trọng (1.33) nếu ε có giá đủ nhỏ thì quan sát tích phân (0.8) trở thành quan sát điểm như trong (0.4) tại gốc tọa độ $\xi_0 = (0;0)$.

Chúng tôi áp dụng thuật toán lặp Gauss – Newton để tìm cực tiểu của phiến hàm (1.20), được viết lại như sau

$$J(g) = \frac{1}{2}\|lu(g) - h\|^2_{L^2(0,T)} =: \frac{1}{2}\|\Phi(g)\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{1.35}$$

Cho trước g_n, xét bài toán con, tìm cực tiểu (ứng với $z \in L^2(I)$) của phiếm hàm

$$\frac{1}{2}\|\Phi(g_n) + \Phi'(g_n)z\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\alpha_n}{2}\|z\|^2_{L^2(I)}, \quad \text{Phương pháp 1 (M1)}, \tag{1.36}$$

hoặc

$$\frac{1}{2}\|\Phi(g_n) + \Phi'(g_n)z\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\alpha_n}{2}\|z - g_n + g_0\|^2_{L^2(I)}, \quad \text{Phương pháp 2 (M2)}. \tag{1.37}$$

Bước lặp mới được cập nhật

$$g_{n+1} = g_n + 0.5z. \tag{1.38}$$

Do hàm g là hàm giảm nên ở mỗi bước lặp, ta thực hiện phép chiếu (chặt cụt) để đảm bảo rằng ở bước lặp tiếp theo tính chất giảm của hàm g được giữ nguyên.

Ở đây, ta chọn tham số hiệu chỉnh

$$\alpha_n = \frac{0.001}{n+1}. \tag{1.39}$$

Bài toán thuận và bài toán liên hợp được giải bằng phương pháp phần tử biên (BEM) với 128 phần tử biên, 32 bước thời gian và khoảng $[A, B]$ được chia thành 32 khoảng nhỏ.

Các kết quả số được tính toán cho trường hợp hàm $g(u)$ chưa biết là tuyến tính và phi tuyến bằng cách sử dụng phương pháp M1 và phương pháp M2 với dự đoán ban đầu g_0 và nhiễu dữ kiện là $||h^\delta - h||_{L^2(0,T)} \le \delta$.

Các kết quả số được trình bày trong luận án cho thấy phương pháp của chúng tôi là hữu hiệu.

[0]Các kết quả số được trình bày chi tiết trong luận án.

1.3. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát một phần trên biên

Xét bài toán (1.8) được viết lại như sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = 0, & \text{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(u,f), & \text{trên } S = \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Tìm hàm $u(x,t)$ và $g(u,f)$ từ điều kiện quan sát trên một phần của biên

$$u|_{\Sigma} = h(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma, \tag{1.42}$$

trong đó $\Sigma = \Gamma \times (0,T]$ với $\Gamma \subset \partial\Omega$. Với bài toán thuận ta cũng có các kết quả giống như bài toán thuận trong Mục 1.2.1, nên chúng tôi chỉ đưa ra cách giải bài toán ngược dựa trên phương pháp biến phân bằng cách xét phiếm hàm

$$J(g) = \frac{1}{2}\|u(g) - h(\cdot,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma)}, \qquad \text{trên tập } \mathcal{A}_1. \tag{1.43}$$

Định lý 1.14 *Phiếm hàm $J(g)$ khả vi Fréchet trên tập $\mathcal{A}_1$ và gradient được tính theo công thức*

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u(g))\varphi(x,t)dSdt, \tag{1.44}$$

trong đó, $\varphi(x,t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \textit{trong } Q, \\ \varphi(x,T) = 0 & \textit{trong } \Omega, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + \big(u(x,t) - h(x,t)\big)\chi_{\Sigma}(x,t) & \textit{trên } S. \end{cases}$$

Ở đây, χ_Σ là hàm đặc trưng của Σ xác định bởi

$$\chi_\Sigma(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x,t) \in \Sigma, \\ 0 & \text{nếu } (x,t) \notin \Sigma. \end{cases}$$

1.4. Bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ từ quan sát tích phân

Xét phương pháp biến phân cho bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ trong bài toán giá trị biên – ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{trong } Q, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{trên } \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(u(\xi,t))(u_\infty - u(\xi,t)), & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0,T], \end{cases} \tag{1.46}$$

với điều kiện quan sát

$$lu(\sigma) := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x,t)dS = h(t), \quad t \in (0,T], \tag{1.47}$$

trên tập chấp nhận được $\sigma \in \mathcal{A}_2$. Trong đó u_∞ là nhiệt độ môi trường xung quanh và được giả sử bằng một hằng số cho trước.
Định nghĩa 1.7 Một hàm $u \in H^{1,0}(Q)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.46) nếu với mọi hàm $\eta \in H^{1,1}(Q)$ thỏa mãn $\eta(\cdot, T) = 0$,

$$\int_Q \Big(-u(x,t)\eta_t(x,t) + \nabla u(x,t) \cdot \nabla \eta(x,t) \Big) dxdt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx + \int_S \sigma(u(\xi,t))(u_\infty - u(\xi,t))\eta(\xi,t)d\xi dt. \tag{1.48}$$

Chúng tôi xét bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\|lu(\sigma) - h\|^2_{L^2(0,T)}, \tag{1.49}$$

trên tập $\mathcal{A}_2$. Sự tồn tại nghiệm của bài toán biến phân (1.49) được Rösch chứng minh thông qua việc chỉ ra ánh xạ biến $\sigma \in C^1(I)$ vào $u(\sigma) \in C(Q)$ khả vi Fréchet. Ở đây,

$$I := \Big[\min\Big(u_\infty, \inf_{x\in\Omega} u_0(x)\Big), \max\Big(u_\infty, \sup_{x\in\Omega} u_0(x)\Big)\Big].$$

Định lý 1.15 *Phiếm hàm $J(\sigma)$ khả vi Fréchet trên tập $\mathcal{A}_2$ và gradient được tính theo công thức*

$$J'(\sigma)z = \int_S z(u(\sigma))\Big(u_\infty - u(\sigma)\Big)\varphi(x,t)dSdt, \tag{1.52}$$

trong đó $\varphi(x,t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp.

Chúng tôi muốn nhấn mạnh thêm rằng, phương pháp của chúng tôi có thể áp dụng để tìm hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$. Tuy nhiên, để giới hạn độ dài của luận án, chúng tôi không trình bày các kết quả số cho trường hợp này.

Chương 2

Xác định nguồn trong bài toán truyền nhiệt từ quan sát trên biên

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán xác định nguồn từ các quan sát tích phân bằng phương pháp biến phân. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền Lipschitz, giới nội với biên Γ. Ký hiệu $Q := \Omega \times (0,T]$, với $T > 0$ và biên $S = \Gamma \times (0,T]$. Giả sử

$$a_{ij}, \quad i,j \in \{1,2,\dots,n\}, b \in L^\infty(Q), \tag{2.1}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j \in \{1,2,\dots,n\}, \tag{2.2}$$

$$\lambda\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n} \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \Lambda\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

$$0 \le b(x,t) \le \mu_1, \quad \text{hầu khắp trong } Q, \tag{2.4}$$

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad \varphi, \psi \in L^2(S), \tag{2.5}$$

$$\lambda \text{ và } \Lambda \text{ là các hằng số dương và } \mu_1 \ge 0. \tag{2.6}$$

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b(x,t)u = F, \ (x,t) \in Q, \tag{2.7}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.8}$$

với điều kiện biên Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma u|_S = \varphi \text{ trên } S, \tag{2.9}$$

hoặc điều kiện biên Dirichlet

$$u|_S = \psi \text{ trên } S. \tag{2.10}$$

Ở đây,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}|_S := \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_j})\cos(\nu, x_i)|_S,$$

ν là vector pháp tuyến ngoài đối với S và $\sigma \in L^\infty(S)$, được giả thiết là không âm hầu khắp nơi trên S.

Giả sử $\omega_i \in L^\infty(\Omega)$ và $\int_\Omega \omega_i(x)dx > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, là các hàm trọng và ta có các dữ kiện sau:

$$l_i u = \int_\Omega \omega_i(x) u(x,t) dx = h_i(t), \quad h_i \in L^2(0,T), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Ngoài ra giả sử rằng, vế phải F có dạng $F = fh(x,t) + g(x,t)$ (f có dạng $f(x,t)$, $f(x)$ hoặc $f(t)$) và ta có một ước lượng f^* của f. Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán xác định f từ các dữ kiện trên.

2.1. Phương pháp biến phân

Trong mục này chúng tôi chỉ xét trường hợp bài toán Robin (2.7)–(2.9). Trường hợp bài toán Dirichlet (2.7), (2.8), (2.10) với điều kiện biên (2.10) thuần nhất cũng tương tự. Lời giải của bài toán Robin (2.7)–(2.8) được hiểu theo nghĩa yếu như sau: Giả sử $F \in L^2(Q)$, lời giải yếu trong $W(0,T)$ của bài toán (2.7)–(2.9) là hàm số $u(x,t) \in W(0,T)$ thỏa mãn đẳng thức

$$\int_0^T (u_t, \eta)_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt + \int_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + b(x,t) u \eta \Big) dxdt$$
$$+ \int_S \sigma u \eta d\xi dt = \int_Q F \eta dxdt + \int_S \varphi \eta d\xi dt, \quad \forall \eta \in L^2(0,T; H^1(\Omega)),$$

và

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.12}$$

Vì lời giải $u(x,t)$ của (2.7)–(2.9) phụ thuộc vào $f(x,t)$, ta kí hiệu nó là $u(x,t;f)$ hoặc $u(f)$ để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nó vào f. Để xác định f, ta tối thiểu hóa phiếm hàm

$$J_0(f) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f) - h_i\|^2_{L^2(0,T)}, \tag{2.14}$$

trên $L^2(Q)$. Tuy nhiên, bài toán tối thiểu hóa này không ổn định và có thể có nhiều lời giải. Bởi vậy thay vào đó, chúng tôi tối thiểu hóa phiếm hàm Tikhonov

$$J_\gamma(f) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f) - h_i\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.15}$$

với $\gamma > 0$ là tham số hiệu chỉnh Tikhonov, $f^* \in L^2(Q)$ là một dự đoán của f. Dễ thấy rằng nếu $\gamma > 0$, thì bài toán tối thiểu hóa này có lời giải duy nhất.Chúng tôi chứng minh phiếm hàm J_γ khả vi Fréchet và đưa ra công thức cho đạo hàm của nó. Với mục đích đó, ta xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial p}{\partial x_i}\right) + b(x,t)p = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(x)\left(l_i u - h_i\right), & (x,t) \in Q, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)p = 0, & (x,t) \in S, \\ p(x,T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Vì $\omega_i \in L^2(\Omega)$, $l_i u - h_i \in L^2(0,T)$, vế phải của phương trình đầu trong (2.16) thuộc $L^2(Q)$. Bằng cách thay đổi chiều thời gian, dễ thấy bài toán liên hợp có nghiệm duy nhất trong $W(0,T)$.

Định lý 2.1 *Phiếm hàm J_γ khả vi Fréchet và đạo hàm của nó ∇J_γ tại f có dạng*

$$\nabla J_\gamma(F) = h(x,t)p(x,t) + \gamma(f(x,t) - f^*(x,t)), \tag{2.17}$$

với $p(x,t)$ là lời giải của bài toán liên hợp (2.16).

Nhận xét 2.1 Trong định lý này chúng tôi viết phiếm hàm Tikhonov cho trường hợp $F(x,t) = f(x,t)h(x,t) + g(x,t)$. Khi F có cấu trúc khác, thì phiếm hàm cần thay đổi tương ứng. Cụ thể, nếu

- $F(x,t) = f(t)h(x,t) + g(x,t)$, thì phiếm hàm phạt là $\|f - f^*\|_{L^2(0,T)}$ và
$$\nabla J_0(f) = \int_\Omega h(x,t)p(x,t)dx.$$
- $F(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t)$, thì phiếm hàm phạt là $\|f - f^*\|_{L^2(\Omega)}$ và
$$\nabla J_0(f) = \int_0^T h(x,t)p(x,t)dt.$$

Để tìm điểm cực tiểu của (2.15), chúng tôi sử dụng phương pháp gradient liên hợp. Thuật toán được thực hiện như sau:

Bước 1: Cho $k = 0$, chọn xấp xỉ ban đầu f^0.

Bước 2: Tính $r_0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$, đặt $d_0 = r_0$.

Bước 3: Tính

$$\alpha_0 = \frac{\|r_0\|^2_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^{N} \|A_i d_0\|^2_{L^2(0,T)} + \gamma\|d_0\|^2_{L^2(Q)}}.$$

Đặt $f^1 = f^0 + \alpha_0 d_0$.

Bước 4: Cho $k = 1, 2, \cdots$. Tính

$$r_k = -\nabla J_\gamma(f^k), \qquad d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$$

với

$$\beta_k = \frac{\|r_k\|^2_{L^2(Q)}}{\|r_{k-1}\|^2_{L^2(Q)}}.$$

Bước 5: Tính

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|^2_{L^2(0,T)} + \gamma \|d_k\|^2_{L^2(Q)}}.$$

Cập nhật

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d_k.$$

2.2. Phương pháp phần tử hữu hạn

Trước hết, chúng tôi viết lại toán tử quan sát dưới dạng

$$l_k u(f) = l_k u[f] + l_k u(u_0, \varphi) = A_k f + l_k u(u_0, \varphi),$$

trong đó $A_k : L^2(Q) \to L^2(0,T)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, $k = 1, ..., N$. Khi đó, phiếm hàm $J_\gamma(f)$ có dạng

$$\begin{aligned} J_\gamma(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\|l_k u[f] + l_k u(u_0, \varphi) - h_k\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\gamma}{2}\|f - f^*\|^2_{L^2(Q)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\|A_k f + l_k u(u_0, \varphi) - h_k\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\gamma}{2}\|f - f^*\|^2_{L^2(Q)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\|A_k f - \widehat{h}_k\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\gamma}{2}\|f - f^*\|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Nghiệm f^γ của bài toán tối thiểu hóa (2.15) được biểu diễn bởi điều kiện tối ưu bậc nhất như sau

$$\sum_{k=1}^N A_k^*(A_k f^\gamma - \widehat{h}_k) + \gamma(f^\gamma - f^*) = 0. \tag{2.20}$$

Ở đây, $A_k^* : L^2(0,T) \to L^2(Q)$ là toán tử liên hợp của A_k được xác định bởi $A_k^* q = p_k$, trong đó p_k là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_k}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial p_k}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right) + b(x,t)p_k = \omega_k(x)q(t), & (x,t) \in Q, \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)p_k = 0, & (x,t) \in S, \\ p_k(x,T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Chú ý rằng, ở đây chúng tôi chia bài toán liên hợp (2.16) thành N bài toán độc lập (2.21). Theo nguyên lý chồng chất tuyến tính, liên hợp p có dạng $\sum_{k=1}^N p_k$. Chúng tôi sẽ xấp xỉ phương trình (2.20) bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Thực tế, chúng tôi sẽ xấp xỉ A_k và A_k^*.

2.2.1. Xấp xỉ phần tử hữu hạn của A_k, A_k^*, $k = 1, ..., N$

Giả sử rằng Ω là một miền đa diện, chúng tôi chia Ω thành các tam giác tựa đều $\mathcal{T}_h$ và xác định không gian các phần tử hữu hạn tuyến tính từng khúc $V_h \subset H^1(\Omega)$ như sau

$$V_h = \{v_h : v_h \in C(\overline{\Omega}), v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{2.22}$$

Ở đây, $P_1(K)$ là không gian các đa thức tuyến tính trong phần tử K. Chúng tôi chia $[0, T]$ bởi các điểm chia

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_M, \text{trong đó } t_n = n\tau,\ n = 0, 1, ..., M \text{ với cỡ lưới } \tau = T/M.$$

Đặt

$$a^n(v, w) := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^n(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int\limits_\Omega b^n(x) v(x) w(x) dx + \int\limits_\Gamma \sigma^n(\xi) v(\xi) w(\xi) d\xi,$$

với $v, w \in H^1(\Omega)$ và với mỗi hàm $\phi(x, t)$, ta xác định $\phi^n(x) := \phi(x, t_n)$. Khi đó, $a^n(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính bị chặn và $H^1(\Omega)$-elliptic, tức là,

$$a^n(v, v) \geq C_1^a \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Tiếp theo, chúng ta xác định hệ xấp xỉ rời rạc đầy đủ FE của bài toán biến phân (2.12) bằng phương pháp Euler-Galerkin lùi như sau: Tìm $u_h^n \in V_h$ với $n = 1, 2, ..., M$ thỏa mãn

$$\langle d_t u_h^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(u_h^n, \chi) = \langle F^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \varphi^n, \chi \rangle_{L^2(\Gamma)},\ \forall \chi \in V_h \tag{2.23}$$

và

$$\langle u_h^0, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_0, \chi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \chi \in V_h, \tag{2.24}$$

trong đó $d_t u_h^n := \dfrac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$, $n = 1, 2, ..., M$.

Bài toán biên phân rời rạc (2.23) chứa một nghiệm duy nhất $u_h^n \in V_h$. Đặt $u_h(x, t)$ là nội suy tuyến tính của u_h^n theo biến t. Do đó, bài toán rời rạc của bài toán điều khiển tối ưu (2.15) được viết dưới dạng

$$J_{\gamma,h}(f) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \|A_{k,h} f - \widehat{h}_{k,h}\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \to \min. \tag{2.25}$$

Ở đây, quan sát tính toán $l_k u_h(f) = l_k u_h[f] + l_k u_h(u_0, \varphi) = A_{k,h} f + l_k u_h(u_0, \varphi)$ và $\widehat{h}_{k,h} = l_k u_h(u_0, \varphi) - h_k$. Nghiệm của bài toán tối ưu (2.25) được mô tả bởi đẳng thức biến phân

$$\sum_{k=1}^N A_{k,h}^* (A_{k,h} f - \widehat{h}_{k,h}) + \gamma(f - f^*) = 0, \tag{2.26}$$

với $A^*_{k,h}$ là toán tử đối ngẫu của toán tử tuyến tính $A_{k,h}$, $k = 1, ..., N$.

Với xấp xỉ FE của bài toán (2.21) ta xác định một xấp xỉ $\widehat{A}^*_{k,h} q = p_{k,h}$ của $A^*_k q$. Hơn nữa, thay cho quan sát h_k ta chỉ dùng $h_k^{\delta_k}$ thỏa mãn

$$\|h_k^{\delta_k} - h_k\|_{L^2(0,T)} \le \delta_k \quad \text{for } k = 1, ..., N. \tag{2.27}$$

Khi đó, ta có bài toán biến phân sau

$$\sum_{k=1}^{N} \widehat{A}^*_{k,h}(A_{k,h} f_h^\gamma - \widehat{h}_{k,h}^{\delta_k}) + \gamma(f_h^\gamma - f^*) = 0, \tag{2.28}$$

trong đó $\widehat{h}_{k,h}^{\delta_k} = l_k u_h(u_0, \varphi) - h_k^{\delta_k}$, $k = 1, ..., N$.

2.2.2. Sự hội tụ

Cho

$$a(u, v) := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_\Omega b(x,t) u(x,t) v(x) dx + \int\limits_\Gamma \sigma(\xi,t) u(\xi,t) v(\xi) d\xi,$$

với $u \in W(0,T)$, $v \in H^1(\Omega)$.

Ta định nghĩa nghiệm yếu $u(x,t) \in W(0,T)$ của bài toán (2.7)-(2.9) thỏa mãn đẳng thức biến phân

$$\langle u_t, v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u,v) = \langle F, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \varphi, v\rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),\ t \in (0,T), \tag{2.29}$$

và

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.30}$$

Với $\phi \in H^1(\Omega)$ ta định nghĩa phép chiếu elliptic $R_h : H^1(\Omega) \to V_h$ như là nghiệm duy nhất của bài toán biến phân

$$a(R_h \phi, v_h) = a(\phi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.31}$$

Ở đây theo Thomée V., ta có đánh giá sai số như sau

$$\|\phi - R_h \phi\|_{L^2(\Omega)} \le C\, h^2 \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in H^2(\Omega). \tag{2.32}$$

Bổ đề 2.1 *Cho u là nghiệm duy nhất của bài toán biến phân* (2.29)-(2.30) *và $u_h^n \in V_h$ với $n = 1, 2, ..., M$ là nghiệm của* (2.23)-(2.24). *Khi đó, ta có đánh giá*

$$||u_h - R_h u||_{\ell^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C \left(h^2 \|u_t\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \Delta t \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + h^2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \right), \tag{2.33}$$

với

$$||w||_{\ell^2(0,T;H^1(\Omega))} := \left(\Delta t \sum_{n=1}^{M} \|w^n\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Bổ đề 2.2 *Cho $u_h(x,t)$ và $(R_hu)(x,t)$ tương ứng là phép nội suy tuyến tính của u_h^n và R_hu^n đối với biến t. Khi đó ta có đánh giá sai số như sau*

$$\|u_h - R_hu\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t). \tag{2.36}$$

Như ta đã biết, theo xấp xỉ chuẩn ta có

$$\|R_hu - u\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + (\Delta t)^2). \tag{2.37}$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta thu được

$$\|u_h - u\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t).$$

Khi đó, ta có thể đánh giá quan sát đo đạc như sau

$$\begin{aligned}
\|l_ku_h(f) - l_ku(f)\|^2_{L^2(0,T)} &= \int_0^T [l_ku_h(f) - l_ku(f)]^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega \omega_k(x)[u_h(x,t) - u(x,t)]dx \right)^2 dt \\
&\le \int_0^T \left(\int_\Omega \omega_k^2(x)dx \int_\Omega [u_h(x,t) - u(x,t)]^2 dx \right) dt \\
&= \|\omega_k\|^2_{L^2(\Omega)} \|u_h - u\|^2_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

hoặc

$$\|l_ku_h(f) - l_ku(f)\|_{L^2(0,T)} \le \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_h - u\|_{L^2(Q)} \le C(h^2 + \Delta t).$$

Vì vậy ta có thể kết luận về các kết quả hội tụ như sau

$$\|(A_{k,h} - A_k)f\|_{L^2(0,T)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t) \quad \text{và} \quad \|(\widehat{A}^*_{k,h} - A^*_k)q\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t), \tag{2.38}$$

với mọi $f \in L^2(Q)$, $q \in L^2(0,T)$. Bằng kỹ thuật như trong chứng minh của Đinh Nho Hào và Phan Xuân Thành ta có thể chứng minh rằng với $\gamma > 0$ thì

$$\|f_h^\gamma - f^\gamma\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t + \delta), \quad \delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + ... + \delta_N^2}. \tag{2.39}$$

2.2.3. Ví dụ số

Trong các ví dụ số, chúng tôi chọn miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $T = 1$ và

$$a_{ij}(x,t) = \delta_{ij}, \quad b(x,t) = 1, \quad \sigma(x,t) = 1.$$

Nghiệm chính xác được xác định bởi $u(x,t) = e^t(x_1 - x_1^2)\sin \pi x_2$.
Chúng tôi thử nghiệm với một vài hàm F có cấu trúc khác nhau, cụ thể,

- Ví dụ 1: $F(x,t) = f(t)h(x,t) + g(x,t)$,

- Ví dụ 2: $F(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t)$,
- Ví dụ 3: $F(x,t) = f(x,t) + g(x,t)$,

với quan sát tích phân (2.11) hoặc quan sát điểm. Bằng phương pháp Euler Galerkin lùi, chúng tôi miền Ω thành 4096 phần tử hữu hạn và bước lưới thời gian $\tau = T/M = 1/M$ với $M = 64$.

Trong ví dụ đầu tiên, chúng tôi sử dụng 1 quan sát $N = 1$, với nhiễu quan sát là $\delta = 1\%, 3\%, 5\%$. Chúng tôi thiết lập lại hàm $f(t)$ có dạng

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu} \quad 0 \le t \le 0.5, \\ 2(1-t) & \text{nếu} \quad 0.5 \le t \le 1, \end{cases} \qquad \text{Ví dụ 1.1} \tag{2.40}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad 0.25 \le t \le 0.75, \\ 0 & \text{ngược lại}, \end{cases} \qquad \text{Ví dụ 1.2.} \tag{2.41}$$

Trong Ví dụ 2, chúng tôi thiết lập lại hàm

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 \qquad \text{Ví dụ 2.1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = (0.5; 0.5), \\ 0 & \text{với } x \in \{(0;0), (0;1), (1;1), (1;0)\}, \\ \text{tuyến tính} & \text{ngược lại}, \end{cases} \qquad \text{Ví dụ 2.2,}$$

trong đó số điểm quan sát $N = 9$ và $h(x,t) = t^2 + 2, \quad \gamma = 10^{-5}, \quad \delta = 1\%$.

Trong ví dụ thứ 3, chúng tôi thiết lập hàm

$$f(x,t) = (x_1^3 + x_2^3)(t^2 + 1), \quad \text{Ví dụ 3.1,} \tag{2.42}$$

từ đo đạc tại 9 điểm. Các kết quả số cho thấy cách tiếp cận để giải bài toán xác định nguồn bằng phương pháp phần tử biên chúng tôi là khả thi và hữu hiệu.[0]

2.3. Rời rạc bài toán xác định thành phần chỉ phụ thuộc thời gian trong vế phải

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán xác định hàm $f(t)$ trong hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x,t) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x,t)u = f(t)\varphi(x,t) + g(x,t), & (x,t) \in Q, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in S, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.43}$$

từ quan sát bổ sung

$$lu(f) = \int_\Omega \omega(x) u(x,t) dx = h(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.44}$$

[0]Các kết quả số được trình bày chi tiết trong luận án

Trong đó, các hàm $a_i, i = \overline{1,n}$, b, φ thuộc không gian $L^\infty(Q)$ và $g \in L^2(Q)$, $f(t) \in L^2(0,T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$. Hơn nữa, ở đây ta giả thiết rằng $a_i \geq \underline{a} > 0$ và $\varphi \geq \underline{\varphi} > 0$ với $\underline{a}$, $\underline{\varphi}$ là các hằng số cho trước và hàm ω là hàm trọng như đã được mô tả từ đầu chương.

2.3.1. Rời rạc bài toán thuận bằng phương pháp sai phân hữu hạn phân rã

Giả sử rằng $\Omega := (0,L_1) \times (0,L_2) \times \cdots \times (0,L_n)$ trong không gian $\mathbb{R}^n$, với L_i, $i = \overline{1,n}$ là các hằng số dương cho trước. Áp dụng kĩ thuật của Marchuk và Yanenko, ta được hệ xấp xỉ bài toán ban đầu (2.43)

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dt} + (\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n)\bar{u} - f = 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \end{cases} \tag{2.47}$$

với $\bar{u} = \{u^k, k \in \Omega_h\}$ là hàm lưới. Hàm $\bar{u}_0$ là hàm lưới xấp xỉ điều kiện ban đầu $u_0(x)$ và được tính bằng công thức

$$\bar{u}_0^k = \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} u_0(x)dx.$$

Các ma trận hệ số Λ_i trong hệ (2.47) được xác định như sau

$$(\Lambda_i \bar{u})^k = \frac{b^k u^k}{n} + \begin{cases} \dfrac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2}\left(u^k - u^{k-e_i}\right) - \dfrac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2}\left(u^{k+e_i} - u^k\right), & 2 \leq k \leq N-2, \\ \dfrac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} u^k - \dfrac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2}\left(u^{k+e_i} - u^k\right), & k = 1, \\ \dfrac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2}\left(u^k - u^{k-e_i}\right) + \dfrac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} u^k, & k = N-1, \end{cases} \tag{2.48}$$

với $k \in \Omega_h$. Hơn nữa,

$$f = \{f\varphi^k + g^k, k \in \Omega_h\}.$$

Ta thấy, ma trận hệ số Λ_i là nửa xác định dương. Để có lược đồ sai phân splitting cho bài toán Cauchy (2.47), chúng tôi rời rạc bài toán theo biến thời gian. Sử dụng lược đồ sai phân splitting

$$\begin{aligned} &\frac{u^{m+\frac{i}{2n}} - u^{m+\frac{i-1}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_i^m \frac{u^{m+\frac{i}{2n}} + u^{m+\frac{i-1}{2n}}}{4} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n-1, \\ &\frac{u^{m+\frac{1}{2}} - u^{m+\frac{n-1}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_n^m \frac{u^{m+\frac{1}{2}} + u^{m+\frac{n-1}{2n}}}{4} = \frac{F^m}{2} + \frac{\Delta t}{8}\Lambda_n^m F^m, \\ &\frac{u^{m+\frac{n+1}{2n}} - u^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \Lambda_n^m \frac{u^{m+\frac{n+1}{2n}} + u^{m+\frac{1}{2}}}{4} = \frac{F^m}{2} - \frac{\Delta t}{8}\Lambda_n^m F^m, \\ &\frac{u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} - u^{m+1-\frac{i}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_i^m \frac{u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} + u^{m+1-\frac{i}{2n}}}{4} = 0, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1, \\ &u^0 = \bar{u}_0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

hay

$$
\begin{aligned}
&(E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+\frac{i}{2n}} = (E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+\frac{i-1}{2n}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,\\
&(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(u^{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}F^m) = (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)u^{m+\frac{n-1}{2n}},\\
&(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)u^{m+\frac{n+1}{2n}} = (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(u^{m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}F^m),\\
&(E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} = (E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+1-\frac{i}{2n}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1,\\
&u^0 = \bar{u}_0,
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

với E_i là ma trận đơn vị tương ứng với $\Lambda_i, i = 1, \ldots, n$. Lược đồ sai phân (2.50) có thể viết lại thành

$$
\begin{cases}
u^{m+1} = A^m u^m + \Delta t B^m(f^m \varphi^m + g^m), \quad m = 0, ..., M-1,\\
u^0 = \bar{u}_0,
\end{cases}
\tag{2.51}
$$

với

$$
\begin{aligned}
A^m &= A_1^m \cdots A_n^m A_n^m \cdots A_1^m,\\
B^m &= A_1^m \cdots A_n^m,
\end{aligned}
$$

trong đó $A_i^m := (E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)^{-1}(E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m), i = 1, \ldots, n$.

Ta có thể chứng minh lược đồ sai phân (2.49) là ổn định dựa kết quả của Đinh Nho Hào, Nguyễn Trung Thành, Sahli và khi đó, tồn tại một hằng số dương c_d không phụ thuộc vào các hệ số $a_i, i = 1, \cdots, n$ và b thỏa mãn

$$
\left(\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in\Omega_{1h}}\left|u^{k,m}\right|^2\right)^{1/2} \le c_d\left[\left(\sum_{k\in\Omega_{1h}}\left|u_0^k\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in\Omega_{1h}}\left|f^m\varphi^{k,m} + g^{k,m}\right|^2\right)^{1/2}\right].
\tag{2.52}
$$

Khi Ω là miền một chiều, ta xấp xỉ hệ phương trình (2.47) bằng phương pháp Crank-Nicholson và nghiệm của bài toán rời rạc cũng có dạng (2.51).

2.3.2. Rời rạc bài toán biến phân

Từ điều kiện quan sát (2.44), phiếm hàm quan sát $J_0(f)$ có dạng

$$
J_0(f) = \frac{1}{2}\|lu(f) - h\|^2_{L^2(0,T)}.
$$

Khi đó, phiếm hàm quan sát rời rạc $J_0^{h,\Delta t}(f)$ được viết dưới dạng

$$
J_0^{h,\Delta t}(f) := \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left|\Delta h\sum_{k\in\Omega_h}\omega^k u^{k,m}(f) - h^m\right|^2,
\tag{2.53}
$$

với $u^{k,m}(f)$ chỉ sự phụ thuộc của nghiệm u vào điều kiện f và m là chỉ số trên lưới thời gian. Ta kí hiệu $\omega^k = \omega(x^k)$ là xấp xỉ của hàm $\omega(x)$ trong miền Ω tại điểm x^k, ví dụ như

$$\omega^k = \frac{1}{|\omega(k)|}\int_{\omega(k)} \omega(x)dx.$$

Định lý 2.2 *Gradient $\nabla J_0^{h,\Delta t}(f)$ của phiếm hàm $J_0^{h,\Delta t}$ tại điểm f được cho bởi*

$$\nabla J_0^{h,\Delta t}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \Delta t (B^m)^* \varphi^m \eta^m, \tag{2.54}$$

trong đó η là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} \eta^m = (A^{m+1})^* \eta^{m+1} + \psi^{m+1}, \quad m = M-2, \dots, 0, \\ \eta^{M-1} = \psi^M, \\ \eta^M = 0. \end{cases} \tag{2.55}$$

với

$$\psi^m = \Big\{\psi^{k,m} = \omega^k\Big(\Delta h \sum_{k\in\Omega_h} \omega^k u^{k,m}(f) - h^m\Big), \quad k \in \Omega_h\Big\}, \quad m = 0,1,\dots,M. \tag{2.56}$$

Ở đây $(A^m)^*$ và $(B^m)^*$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} (A^m)^* &= (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1} ... (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \\ &\times (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} ... (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}, \\ (B^m)^* &= (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} ... (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}. \end{aligned}$$

2.3.3. Phương pháp gradient liên hợp

Phương pháp gradient liên hợp cho phiếm hàm rời rạc (2.53) được tiến hành theo các bước sau

Bước 1. Cho trước xấp xỉ ban đầu $f^0 \in \mathbb{R}^{M+1}$ của hàm $f(t)$ và tính thặng dư $\hat{r}_0 = \Big(l_h^1 u(f^0) - h^1, l_h^2 u(f^0) - h^2, \cdots, l_h^M u(f^0) - h^M\Big)$ bằng cách giải lược đồ splitting (2.49) với f được thay thế bởi xấp xỉ ban đầu f^0 và đặt $k = 0$.

Bước 2. Tính gradient $r_0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$ xác định bởi (2.54) bằng cách giải bài toán liên hợp (2.55). Sau đó, đặt $d_0 = r_0$.

Bước 3. Tính

$$\alpha_0 = \frac{\|r_0\|^2_{L^2(0,T)}}{\|l_h d_0\|^2_{L^2(0,T)} + \gamma\|d_0\|^2_{L^2(0,T)}},$$

với $l_h d_0$ có thể được tính từ lược đồ sai phân splitting (2.49) với f được thay bằng d_0 và $g(x,t) = 0,\ u_0 = 0$. Đặt

$$f^1 = f^0 + \alpha_0 d_0.$$

Bước 4. Với $k = 1, 2, \cdots$, tính $r_k = -\nabla J_\gamma(f^k), d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$, với

$$\beta_k = \frac{\|r_k\|^2_{L^2(0,T)}}{\|r_{k-1}\|^2_{L^2(0,T)}}.$$

Bước 5. Tính α_k

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2_{L^2(0,T)}}{\|l_h d_k\|^2_{L^2(0,T)} + \gamma\|d_k\|^2_{L^2(0,T)}},$$

trong đó $l_h d_k$ được tính dựa vào lược đồ sai phân splitting (2.49) với f được thay bởi d_k và $g(x,t) = 0,\ u_0 = 0$. Đặt

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d_k.$$

2.3.4. Ví dụ số

Trong mục này, chúng tôi trình bày một vài ví dụ số khi miền Ω là miền một chiều và hai chiều để chỉ ra tính hữu hiệu của thuật toán. Cho $T = 1$, chúng tôi thử nghiệm thuật toán nhằm thiết lập lại các hàm sau

- Ví dụ 1: $f(t) = \sin(\pi t)$.
- Ví dụ 2: $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } t \le 0.5, \\ 2(1-t) & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$
- Ví dụ 3: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0.25 \le t \le 0.75, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$

Chúng tôi xét ba trường hợp mà độ trơn của hàm $f(t)$ bị giảm dần, cụ thể, hàm $f(t)$ trong ví dụ 1 là hàm trơn, hàm $f(t)$ trong ví dụ 2 là hàm không khả vi tại $t = 0.5$ và hàm $f(t)$ trong ví dụ 3 là hàm gián đoạn.

Trong mỗi ví dụ số, chúng tôi chọn trước nghiệm chính xác u và các hàm φ, f, rồi thay vào bài toán (2.43) ta có hàm g trong vế phải. Sau khi có nghiệm chính xác u, chúng tôi tính dữ kiện quan sát lu và đặt nhiễu ngẫu nhiên lên dữ kiện đo đạc h. Thuật toán dừng khi $\|f^{k+1} - f^k\|$ đủ nhỏ, thường là 10^{-3}. Cuối cùng, chúng tôi so sánh nghiệm giải số với nghiệm chính xác để chỉ ra thuật toán mà chúng tôi xây dựng là hữu hiệu.

[0]Các kết quả số được trình bày chi tiết trong luận án cho cả hai trường hợp miền Ω một chiều và miền Ω hai chiều.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án này nghiên cứu bài toán xác định quy luật biên phi tuyến và xác định nguồn trong các quá trình truyền nhiệt. Cụ thể luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Đối với bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến trên biên, về lý thuyết chúng tôi đã giải quyết triệt để bài toán trong trường hợp nhiều chiều dựa trên phương pháp biến phân. Chứng minh tính khả vi theo nghĩa Fréchet của phiếm hàm cần tối ưu hóa, đưa ra công thức tính đạo hàm bằng bài toán liên hợp. Trong một số trường hợp chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán biến phân. Bài toán được rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử biên (BEM) và sau đó được giải số bằng phương pháp lặp Gauss-Newton. Các thử nghiệm bằng số trên máy tính cho thấy phương pháp và thuật toán là hữu hiệu.

2. Với bài toán xác định nguồn trong các quá trình truyền nhiệt, chúng tôi đưa ra một các tiếp cận mới có ý nghĩa thực tế để giải bài toán xác định nguồn nhiều chiều với hệ số phụ thuộc thời gian (chưa được nghiên cứu từ trước), sau đó chuyển bài toán về bài toán biến phân. Vì bài toán biến phân không ổn định, nên chúng tôi đã hiệu chỉnh nó bằng phương pháp chỉnh Tikhonov, sau đó chứng minh phiếm hàm Tikhonov khả vi Fréchet rồi đưa ra công thức cho đạo hàm Fréchet qua sự trợ giúp của bài toán liên hợp. Bài toán được rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và phương pháp sai phân phân rã (finite difference splitting method), sau đó được giải bằng phương pháp gradient liên hợp (conjugate gradient method). Thuật toán được thử nghiệm trên máy tính và các kết quả số cho thấy phương pháp rất hữu hiệu.

Luận án mở ra một số hướng tiếp tục nghiên cứu là:

1. Nghiên cứu phương pháp giải số bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát một phần biên và phương pháp giải số bài toán xác định hệ số truyền nhiệt từ quan sát tích phân. Nghiên cứu bài toán cho phương trình phức tạp hơn.

2. Nghiên cứu bài toán xác định nguồn cho quá trình truyền nhiệt phi tuyến, nghiên cứu bài toán xác định nguồn điểm.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Phan Xuan Thanh, D. Lesnic (2015), "Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations", *Applicable Analysis*, 94 (9), pp. 1784–1799.

2. Nguyen Thi Ngoc Oanh, Bui Viet Huong (2015), "Determination of a time-dependent term in the right-hand side of linear parabolic equations",*Acta Mathematica Vietnamica*, DOI: 10.1007/ s40306-015-0143-y.

3. Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Nguyen Thi Ngoc Oanh, and Phan Xuan Thanh, "Determination of a term in the right-hand side of parabolic equations", Preprint 2015.