

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÙI VIỆT HƯƠNG

**XÁC ĐỊNH QUY LUẬT BIÊN
PHI TUYẾN VÀ XÁC ĐỊNH NGUỒN
TRONG CÁC QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2015

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÙI VIỆT HƯƠNG

**XÁC ĐỊNH QUY LUẬT BIÊN
PHI TUYẾN VÀ XÁC ĐỊNH NGUỒN
TRONG CÁC QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT**

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. ĐINH NHO HÀO

THÁI NGUYÊN – 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Đinh Nho Hào. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là những kết quả mới và chưa từng được ai công bố trong các công trình nào khác.

Tác giả

Bùi Việt Hương

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học tận tình, quý báu và nghiêm khắc của GS.TSKH. Đinh Nho Hào. Thầy đã đặt bài toán và dành nhiều công sức, từng bước dẫn dắt tôi dần làm quen với công việc nghiên cứu khoa học, động viên khích lệ tôi vượt lên những khó khăn trong học tập và cuộc sống. Từ tận đáy lòng, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy và sẽ cố gắng phấn đấu hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả luôn nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của GS. TSKH. Hà Huy Bảng, PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn, GS. TSKH Nguyễn Minh Trí, TS. Nguyễn Văn Ngọc, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn anh chị em trong nhóm nghiên cứu của Thầy – GS. TSKH. Đinh Nho Hào đã có những trao đổi và ý kiến đóng góp hữu ích thông qua các xê mi na nhóm; Chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Trung Thành, TS. Phan Xuân Thành, NCS. Nguyễn Thị Ngọc Oanh đã hướng dẫn tác giả về kỹ thuật lập trình khi thử nghiệm việc giải số.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Khoa sau đại học trường Đại học Sư phạm; Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Xin chân thành cảm ơn các anh chị em NCS chuyên ngành Toán Giải tích, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tác giả.

Luận án sẽ không thể hoàn thành nếu thiếu sự cảm thông, giúp đỡ của những người thân trong gia đình. Tác giả xin kính tặng Gia đình thân yêu niềm vinh hạnh to lớn này.

Tác giả

Bùi Việt Hương

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục	ii
Một số ký hiệu	v
Mở đầu	1
1 Xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát trên biên	10
1.1. Một số kiến thức bổ trợ	11
1.1.1. Nghiệm yếu trong không gian $H^{1,0}(Q)$	11
1.1.2. Nghiệm yếu trong không gian $W(0, T)$	15
1.2. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát tích phân trên biên	17
1.2.1. Bài toán thuận	17
1.2.2. Bài toán biến phân	23
1.2.3. Ví dụ số	27
1.3. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát một phần trên biên	39
1.4. Bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ từ quan sát tích phân	42
2 Xác định nguồn trong bài toán truyền nhiệt từ quan sát trên biên	46

2.1. Phương pháp biến phân	48
2.2. Phương pháp phần tử hữu hạn	54
2.2.1. Xấp xỉ phần tử hữu hạn của $A_k, A_k^*, k = 1, \dots, N$	55
2.2.2. Sự hội tụ	56
2.2.3. Ví dụ số	61
2.3. Rời rạc hóa bài toán xác định thành phần chỉ phụ thuộc thời gian trong vế phải	65
2.3.1. Rời rạc hóa bài toán thuận bằng phương pháp sai phân hữu hạn phân rã	66
2.3.2. Rời rạc hóa bài toán biến phân	70
2.3.3. Phương pháp gradient liên hợp	74
2.3.4. Ví dụ số	75
Kết luận chung	89
Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án	90
Tài liệu tham khảo	91

Một số ký hiệu

\mathbb{R}	tập các số thực
\mathbb{R}^n	không gian véctơ Euclide thực n -chiều
V^*	không gian đối ngẫu của không gian V
$C(\bar{\Omega})$	không gian các hàm liên tục trong $\bar{\Omega}$
$C([0, T], L^2(\Omega))$	không gian các hàm liên tục trên $[0, T]$ nhận giá trị trong $L^2(\Omega)$
$C^1(\bar{Q})$	không gian các hàm khả vi liên tục trong \bar{Q}
$C^{\gamma, \gamma/2}$	không gian Hölder với số mũ $\gamma/2, \gamma \in (0, 1)$
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm khả tích bậc p trong $\Omega, 1 \leq p < \infty$
$L^2_I(\Omega)$	không gian các hàm thuộc $L^2(\Omega)$ có tập xác định là I
$H^1(\Omega)$	không gian các hàm thuộc $L^2(\Omega)$ có đạo hàm riêng yếu thuộc $L^2(\Omega)$
$H^1_0(\Omega)$	bao đóng của không gian $C_0^\infty(\Omega)$ trong không gian $H^1(\Omega)$
$H^{1,0}(Q)$	không gian các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến x_i thuộc $L^2(Q)$
$H^{1,1}(Q)$	không gian các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến x_i và đạo hàm suy rộng theo biến t thuộc $L^2(Q)$
$H^{1,0}_I(Q)$	không gian các hàm thuộc $H^{1,0}(Q)$ có tập xác định là I
$\text{ess sup}_{x \in E} y(x) $	$:= \inf_{ F =0} \left(\sup_{x \in E \setminus F} y(x) \right)$
$L^\infty(\Omega)$	không gian các hàm bị chặn và đo được theo nghĩa Lebesgue với chuẩn được xác định bởi $\ y(x)\ _{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in E} y(x) $

Mở đầu

Các quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán thường được mô hình hóa bằng bài toán biên cho phương trình parabolic: khi miền vật lý, hệ số của phương trình, điều kiện ban đầu và điều kiện biên được biết, người ta nghiên cứu bài toán biên này và dựa vào nghiệm của bài toán đưa ra một dự đoán về hiện tượng đang nghiên cứu. Đây là *bài toán thuận* cho quá trình mà ta đang xét. Tuy nhiên, trong thực tế, nhiều khi miền vật lý, hoặc hệ số của phương trình, hoặc điều kiện biên, điều kiện ban đầu không được biết cụ thể mà ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp, để qua đó nghiên cứu lại quá trình. Đây chính là những *bài toán ngược* với bài toán thuận được nói ở trên và là chủ đề sôi động trong mô hình hóa toán học và lý thuyết phương trình vi phân hơn 100 năm qua [1], [5], [9], [33], [46], [46], [47], [70]. Hai điều kiện quan trọng để mô hình hóa một quá trình truyền nhiệt đó là quy luật trao đổi nhiệt trên biên và nguồn. Cả hai điều kiện này đều do tác động ở bên ngoài và không phải lúc nào cũng được biết trước, do đó trong những trường hợp này, ta phải xác định chúng qua các đo đạc gián tiếp và đó là nội dung của luận án này. Luận án gồm hai phần, phần đầu nghiên cứu bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt (nói chung là phi tuyến) trên biên qua đo đạc trên biên và phần thứ hai nghiên cứu bài toán xác định nguồn (tạo ra quá trình truyền nhiệt hay khuếch tán) qua các quan sát khác nhau.

Có rất nhiều các hiện tượng vật lý xảy ra trong điều kiện nhiệt độ, áp suất cao hoặc trong các môi trường khắc nghiệt như: các buồng đốt, các tua bin khí, các quá trình làm nóng, làm nguội thép và trong quá trình dập tắt khí trong lò,... mà ở đó cả nguồn nhiệt và khối lượng nhiệt trao đổi đều chưa biết, hoặc quá trình trao đổi nhiệt trên biên chưa biết tuân theo quy luật nào (quy

luật truyền nhiệt tuyến tính của Newton hay quy luật bức xạ nhiệt bậc bốn của Stefan-Boltzmann chẳng hạn). Khi đó, chúng ta mô hình hóa các quá trình truyền nhiệt này như các bài toán ngược xác định quy luật truyền nhiệt không tuyến tính ở trên biên hoặc xác định nhiệt độ phụ thuộc vào hệ số truyền nhiệt. Trong một số lĩnh vực ứng dụng khác, các bài toán này có thể xem như các dạng mô hình về sự khuếch tán khí trong các phản ứng hóa học chưa biết trên bề mặt vật chất hay mật độ dân số tại vùng giáp ranh với quy luật di trú chưa biết [88].

Năm 1989, Pilant và Rundell [69] xét bài toán xác định quy luật truyền nhiệt $g(\cdot)$ và nhiệt độ $u(x, t)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu một chiều

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \gamma(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) = g(u(0, t)), & 0 \leq t \leq T, \\ -u_x(1, t) = g(u(1, t)), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (0.1)$$

từ điều kiện quan sát bổ sung

$$u(0, t) = h(t), \quad (0.2)$$

trong đó γ , u_0 và h là các hàm cho trước, tương ứng với nguồn nhiệt, nhiệt độ tại thời điểm ban đầu và nhiệt độ trên biên. Từ phương trình (0.1) ta thu được $u_x(0, t) = g(h(t))$ với $t \in [0, T]$. Với một số điều kiện nhất định, các tác giả đã chứng minh tồn tại duy nhất cặp (u, g) của phương trình (0.1) trong khoảng $0 \leq t \leq t^*$, với $t^* \in (0, T]$ nào đó. Các tác giả cũng đã đề xuất phương pháp lặp để giải bài toán ngược này và thử nghiệm thuật toán trên máy tính. Sau đó, vào năm 1990, Rundell và Yin [79] đã nghiên cứu bài toán tương tự nhưng trong trường hợp nhiều chiều. Cụ thể, cho $T > 0$ và $Q = \Omega \times (0, T]$ với Ω là miền giới nội trong \mathbb{R}^n , các tác giả xét bài toán tìm cặp hàm $u(x, t)$ và $g(s)$ xác định tương ứng trên \bar{Q} và $[A, B]$, thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \gamma(x, t) & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) + \varphi & \text{trên } S := \partial\Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (0.3)$$

với quan sát bổ sung tại một điểm trên biên

$$u(\xi_0, t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.4)$$

trong đó các hàm γ, u_0, φ và h cho trước, ξ_0 là một điểm cố định trên biên $\partial\Omega$ của Ω , ν là véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên biên S , $A = \min_{\overline{Q}} u(x, t)$ và $B = \max_{\overline{Q}} u(x, t)$. Với một số giả thiết nhất định, các tác giả đã đưa ra đánh giá ổn định cho hàm g và từ đó họ thu được tính duy nhất nghiệm của bài toán (0.3). Ta thấy, hàm g chỉ có thể xác định trong khoảng $[A, B]$ chứ không xác định trên toàn trục thực \mathbb{R} . Vì thế vào năm 1999, Choulli [14] đã đặt ra một câu hỏi rất tự nhiên: chúng ta phải cần đến bao nhiêu đo đạc để tìm lại hàm $g(s)$ với $s \in \mathbb{R}$? Choulli đã chứng minh rằng: (i) nếu tất cả các đo đạc trên biên đều thực hiện được và hàm g' bị chặn thì bài toán có nghiệm duy nhất; (ii) nếu các đo đạc trên biên được thực hiện trong các không gian vectơ một chiều thì ta cũng có nghiệm duy nhất, và ông đã chứng minh hàm g biểu diễn được dưới dạng $g = g_0 + g_1$, trong đó g_0 là hàm đã biết còn g_1 là hàm chưa biết và không có điểm tụ 0. Theo hướng nghiên cứu này, các tác giả của [18] đã ra phương pháp tuyến tính hóa tự nhiên (natural linearization) để xác định lại quy luật truyền nhiệt không tuyến tính $g(u)$ trong (0.3) với giả thiết là nhiệt độ trên toàn bộ biên S đo được, thay vì các đo đạc tại từng điểm như trong (0.4).

Trong một chuỗi các bài báo ([51], [80] – [86]), Tröltzsch và Rösch cũng đã nghiên cứu bài toán tương tự. Cụ thể, các tác giả xét bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trên } \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(u(\xi, t))(u_\infty - u(\xi, t)) & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (0.5)$$

trong đó u_∞ là nhiệt độ môi trường xung quanh, được biết là một hằng số cho trước, từ các điều kiện quan sát bổ sung khác nhau như: $u(x, t)$ được cho trên cả miền Q , hoặc $u(x, t_i)$ được cho tại một thời điểm cố định $t_i, i = 1, \dots, L$, [80], [86], hoặc u cho trên toàn bộ biên S [83]. Các tác giả đã chuyển bài toán ngược về bài toán điều khiển tối ưu, rồi chứng minh tính khả vi Fréchet của phiếm hàm cần cực tiểu hóa, sau đó đã sử dụng phương pháp lặp để giải số

bài toán. Chúng ta cũng lưu ý rằng, trong quá trình truyền nhiệt, hệ số truyền nhiệt σ trong bài toán (0.5) có thể phụ thuộc cả vào nhiệt độ u và thời gian t [28], nhưng việc nghiên cứu bài toán ngược khi đó rất phức tạp và không nằm trong khuôn khổ của luận án này. Ngoài ra, chúng tôi cũng muốn bổ sung thêm rằng, vào năm 2009, Lesnic và các đồng tác giả [58], [67], Janicki và Kindermann [50] cũng nghiên cứu các phương pháp số để giải bài toán (0.1) và bài toán (0.5).

Trong phần đầu của luận án này, cụ thể trong Chương 1, chúng tôi nghiên cứu bài toán ngược xác định hàm $g(\cdot, \cdot)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu [87]

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f) & \text{trên } S, \end{cases} \quad (0.6)$$

từ điều kiện quan sát bổ sung (0.4). Ở đây,

$g : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ (với I là khoảng con của \mathbb{R}) được giả sử là hàm liên tục Lipschitz địa phương, đơn điệu giảm theo biến u , đơn điệu tăng theo biến f và thỏa mãn $g(u, u) = 0$, u_0 và f là các hàm cho trước có miền giá trị thuộc I , tương ứng thuộc $L^2(\Omega)$ và $L^2(S)$.

Chúng tôi cũng lưu ý rằng, để chứng minh bài toán thuận có nghiệm ta cần đến giả thiết hàm g đơn điệu giảm theo biến u , đơn điệu tăng theo biến f . Hơn nữa, với giả thiết này ta có nguyên lý maximum, điều này là cần thiết cho việc giải bài toán ngược, cũng như điều kiện quy luật biên đơn điệu là cần thiết để giải bài toán ngược.

Thông thường, hệ số truyền nhiệt được xem như hàm của biến thời gian và không gian [36], tuy nhiên trong luận án chúng tôi chỉ đề cập đến những ứng dụng mà hệ số truyền nhiệt chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ trên biên.

Ta biết rằng, bài toán (0.6) mô tả nhiều tình huống thực tế [4], [87]. Nó bao gồm điều kiện biên tuyến tính dạng $g(u, f) = c(f - u)$ với c là một hằng số dương. Nó cũng bao gồm điều kiện biên phi tuyến dạng $g(u, f) = \phi(f) - \phi(u)$, với ϕ là hàm Lipschitz, đơn điệu tăng trên I ; gồm cả điều kiện bức xạ Stefan-Boltzmann như $\phi(w) = w^4$ với $I = [0, \infty)$, quy luật trao đổi enzym của Michaelis-Menten

với $\phi(u) = cu/(u+k)$, trong đó c và k là các hằng số dương. Điều kiện biên dạng này cũng bao gồm cả trường hợp $g(u, f) = \psi(f - u)$, với ψ là hàm Lipschitz, đơn điệu tăng trong khoảng $I - I$; và đặc biệt là $\psi(w) = w^{5/4}$ với $w > 0$, và $\psi(w) = 0$ với $w < 0$, mô tả hiện tượng đối lưu tự nhiên ở trên biên.

Quan sát theo từng điểm (0.4) thường không có ý nghĩa khi nghiệm của (0.6) được hiểu theo nghĩa nghiệm yếu. Do đó, trong luận án chúng tôi sẽ thay thế quan sát này bởi các quan sát sau

1) Quan sát trên một phần của biên

$$u|_{\Sigma} = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (0.7)$$

với $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$, Γ là một phần của $\partial\Omega$ có độ đo khác 0;

2) Quan sát tích phân biên

$$lu := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x, t)dS = h(t), \quad t \in (0, T], \quad (0.8)$$

trong đó ω là hàm không âm, xác định trên $\partial\Omega$, $\omega \in L^1(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \omega(x)dS > 0$. Chúng tôi lưu ý rằng, nếu ta chọn hàm ω như là xấp xỉ của hàm Dirac δ thì các quan sát (0.8) có thể coi là trung bình của quan sát (0.4). Quan sát tích phân là lựa chọn thay thế cho quan sát đo đạc theo từng điểm (khi thiết bị đo đạc có độ dày khác 0) và bài toán ngược sẽ được giải một cách dễ dàng hơn nhờ phương pháp biến phân. Ngoài ra với cách đặt bài toán như ở trên, ta chỉ cần đo đạc ở một phần của biên là có thể xác định được quy luật truyền nhiệt trên biên, đây là một điều quan trọng trong thực tế.

Chúng tôi tiến hành nghiên cứu bài toán (0.6) với quan sát (0.8) và quan sát (0.7), nghiên cứu bài toán (0.5) với quan sát (0.8). Trong mỗi bài toán, chúng tôi trình bày một vài kết quả đã biết về bài toán thuận (0.6), sử dụng phương pháp biến phân để giải bài toán ngược và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu hóa, cũng như đưa ra công thức tính gradient của phiếm hàm cần cực tiểu hóa; phần cuối cùng trong mỗi mục, chúng tôi dành để trình bày và thảo luận về phương pháp số để giải các bài toán trên.

Phần thứ hai của luận án dành cho bài toán xác định nguồn trong quá trình truyền nhiệt. Bài toán này được nhiều nhà khoa học nghiên cứu trong vòng hơn

50 năm qua. Mặc dù có khá nhiều kết quả về tính tồn tại, duy nhất và đánh giá ổn định cho bài toán, nhưng do tính đặt không chỉnh và có thể phi tuyến của bài toán, nên trong thời gian gần đây đã có rất nhiều nhà toán học và kỹ sư đã đặt lại vấn đề nghiên cứu chúng. Để minh họa cho nhận định này, chúng tôi xin trích dẫn các sách chuyên khảo [9], [33], [46], [47], [70] và bài báo mới đây [75] về tổng quan của bài toán. Để cho cụ thể, giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền Lipschitz, giới nội với biên Γ . Ký hiệu $Q := \Omega \times (0, T]$, với $T > 0$ và biên $S = \Gamma \times (0, T]$. Giả sử

$$\begin{aligned} a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, b \in L^\infty(Q), \\ a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \lambda \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq b(x, t) \leq \mu_1, \quad \text{hầu khắp trong } Q, \\ u_0 \in L^2(\Omega), \quad \varphi, \psi \in L^2(S), \\ \lambda \text{ và } \Lambda \text{ là các hằng số dương và } \mu_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + b(x, t)u = F, \quad (x, t) \in Q, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

với điều kiện biên Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma u|_S = \varphi \text{ trên } S,$$

hoặc điều kiện biên Dirichlet

$$u|_S = \psi \text{ trên } S.$$

Ở đây,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}|_S := \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_j}) \cos(\nu, x_i)|_S,$$

ν là vectơ pháp tuyến ngoài đối với S và $\sigma \in L^\infty(S)$, được giả thiết là không âm hầu khắp nơi trên S .

Bài toán thuận là bài toán xác định u khi các hệ số của phương trình (2.7) và các dữ kiện u_0, φ (hoặc ψ) cũng như F đã cho [33], [94], [97]. Bài toán ngược là bài toán xác định về phải F khi một số điều kiện bổ sung lên lời giải u được cho thêm vào. Phụ thuộc vào cấu trúc của F và các quan sát bổ sung của u , ta có các bài toán ngược khác nhau như sau:

- Bài toán ngược IP1: $F(x, t) = f(x, t)h(x, t) + g(x, t)$, tìm $f(x, t)$, khi u được cho trên Q [57], [96].
- IP2: $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$, h và g đã biết. Tìm $f(x)$, khi $u(x, T)$ được cho, [41], [43], [48], [49], [52], [78]. Các bài toán ngược tương tự cho phương trình phi tuyến được Gol'dman nghiên cứu [25], [26], [27].
- IP2a: $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$, h và g đã biết. Tìm $f(x)$, nếu $\int_{\Omega} \omega_1(t)u(x, t)dx$ được biết. Ở đây, ω_1 thuộc $L^{\infty}(0, T)$ và không âm. Ngoài ra, $\int_0^T \omega_1(t)dt > 0$. Các quan sát dạng này được gọi là *quan sát tích phân* và chúng là mở rộng của quan sát tại thời điểm cuối T trong IP2, khi ω_1 là xấp xỉ hàm δ tại $t = T$. Bài toán này được nghiên cứu trong [23], [53], [65], [66], [73], [74], [75], [92].
- IP3: $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$, h và g đã cho. Tìm $f(t)$, nếu $u(x_0, t)$ được biết. Ở đây, x_0 là một điểm thuộc Ω [6], [7], [24], [71], [72].
- IP3a: $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$, h và g đã cho. Tìm $f(t)$, nếu $\int_{\Omega} \omega_2(x)u(x, t)dx$ được biết. Ở đây, $\omega_2 \in L^{\infty}(\Omega)$ với $\int_{\Omega} \omega_2(x)dx > 0$, [54], [64], [66].
- IP4: $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$, h và g đã cho. Tìm $f(x)$ nếu một điều kiện bổ sung ở trên biên của u được biết. Ví dụ, như khi điều kiện Dirichlet đã cho, ta có thể lấy dữ kiện bổ sung là điều kiện Neumann được cho trên một phần của S [8], [10], [11], [12], [15], [16], [22], [95], [98], [99]. Bài toán tương tự khi xác định $f(t)$ với $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$ được đề cập trong [42].
- IP5: Tìm nguồn điểm với quan sát trên biên [2], [3], [19], [20], [21], [31], [32], [33], [39], [40], [59, 60]. Một bài toán liên quan được xét trong [44].

Ta để ý rằng, trong các bài toán ngược IP1, IP2, IP2a để xác định $f(x, t)$ và $f(x)$ ta phải đòi hỏi lời giải u được biết trên toàn miền vật lý Ω - điều này khó có thể thực hiện được trong thực tế. Để khắc phục khiếm khuyết này, chúng tôi tiếp cận đến bài toán ngược này từ một quan điểm khác: đo đạc u tại một số điểm trong (hoặc điểm biên) $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Omega$ (hoặc trên $\partial\Omega$) và từ các dữ kiện này xác định về phải F . Vì các đo đạc bao giờ cũng phải lấy trung bình, nên với cách tiếp cận này ta có các dữ kiện sau:

$$l_i u = \int_{\Omega} \omega_i(x) u(x, t) dx = h_i(t), \quad h_i \in L^2(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

với $\omega_i \in L^\infty(\Omega)$ và $\int_{\Omega} \omega_i(x) dx > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, là các hàm trọng, còn N là số các đo đạc. Để ý rằng, nếu ta đặt

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_i|}, & \text{nếu } x \in \Omega_i, \\ 0, & \text{nếu } x \notin \Omega_i \end{cases}$$

với $|\Omega_i|$ là thể tích của Ω_i - một lân cận của x_i . Khi đó $l_i u$ cho ta kết quả đo đạc tại x_i và có thể hiểu là giá trị trung bình của $u(x_i, t)$ nếu như nó tồn tại. Nếu ta cho $|\Omega_i|$ tiến tới không, thì $l_i u$ sẽ hội tụ đến $u(x_i, t)$ nếu giá trị này tồn tại. Tuy nhiên, do lời giải được hiểu theo nghĩa yếu, nên không phải lúc nào $u(x_i, t)$ cũng có nghĩa. Do vậy, giả thiết $l_i u$ có thể đo được là có ý nghĩa thực tiễn. Ngoài ra, rõ ràng rằng, nếu ta chỉ có các dữ kiện $l_i u$, thì ta sẽ không có tính duy nhất nghiệm của bài toán, trừ trường hợp khi ta xác định $f(t)$ trong IP3, IP3a [6], [7], [71]. Bởi vậy, để có tính duy nhất, ta giả thiết rằng, ta có một dự đoán f^* của f - giả thiết thường đặt ra khi giải các bài toán thực tế. Tóm lại bài toán ngược trong các tiếp cận mới của chúng tôi như sau:

Giả sử ta đo được các dữ kiện $l_i u = h_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, với một sai số nào đó và một ước lượng f^* của f đã được biết. Xác định f .

Ta sẽ giải bài toán ngược này bằng phương pháp bình phương tối thiểu: cực tiểu hóa phiếm hàm

$$J_\gamma(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|l_i u - h_i\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_*^2,$$

với γ là tham số hiệu chỉnh, $\|\cdot\|_*$ là chuẩn thích hợp. Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng, phương pháp biến phân dạng này đã được sử dụng để giải các bài toán truyền nhiệt ngược [29], [30], [33] và chứng tỏ nó rất hữu hiệu.

Chúng tôi chứng minh rằng, phiếm hàm này khả vi Fréchet và đưa ra công thức cho gradient của phiếm hàm thông qua một bài toán liên hợp. Sau đó chúng tôi sẽ rời rạc hóa bài toán bằng phương pháp phân tử hữu hạn và phương pháp sai phân rồi giải bài toán tối ưu rời rạc bằng phương pháp gradient liên hợp. Trường hợp xác định $f(t)$ sẽ được giải bằng phương pháp sai phân phân rã (finite difference splitting method). Các kết quả số cho thấy cách tiếp cận của chúng tôi là đúng đắn và phương pháp giải số là hữu hiệu.

Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo và thảo luận tại các hội nghị, hội thảo khoa học, xê mi na sau:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ tám, Nha Trang, tháng 8, 2013.
- Hội thảo Quốc gia lần thứ mười hai về Tối ưu và Tính toán khoa học, Ba Vì, Hà Nội, tháng 4, 2014.
- Xê mi na tại Phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Xê mi na tại khoa Toán, trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Xê mi na tại khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát trên biên

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán xác định hàm $u(x, t)$ và $g(u, f)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f) & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

từ điều kiện quan sát bổ sung trên biên. Trong đó, Ω là miền giới nội trong không gian \mathbb{R}^n với biên $\partial\Omega$ trơn, $Q = \Omega \times (0, T)$, với $T > 0$ bất kì, ν là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài. Hàm $g : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ (với $I \subset \mathbb{R}$) được giả sử là liên tục Lipschitz, đơn điệu giảm theo biến u , đơn điệu tăng theo biến f và thỏa mãn điều kiện $g(u, u) = 0$ còn u_0 và f là các hàm số cho trước có miền giá trị là I , thuộc vào không gian $L^2(\Omega)$ và $L^2(S)$. Nếu hàm g thỏa mãn điều kiện trên thì ta kí hiệu $g \in \mathcal{A}$. Thông thường thì hệ số truyền nhiệt được xem như một hàm của biến thời gian hoặc không gian, tuy nhiên trong chương này, chúng tôi chỉ

xét hệ số truyền nhiệt phụ thuộc vào nhiệt độ trên biên.

Ở đây, chúng tôi sử dụng quan sát trên biên là một trong hai dạng sau

1) Quan sát trên một phần của biên

$$u|_{\Sigma} = h(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma,$$

với $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$, Γ là một phần biên của $\partial\Omega$;

2) Quan sát tích phân trên biên

$$lu := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x, t)dS = h(t), \quad t \in (0, T],$$

với ω là một hàm không âm xác định trên $\partial\Omega$ thỏa mãn $\omega \in L^1(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \omega(x)dS > 0$. Trong Mục 1.2 và 1.3 chúng tôi nghiên cứu bài toán ngược từ quan sát tích phân và quan sát trên một phần của biên và đưa ra kết quả số minh họa; Mục 1.4, chúng tôi xét bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(u(x, t))(u_{\infty} - u(x, t)) & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

từ quan sát tích phân, trong đó u_{∞} là nhiệt độ môi trường xung quanh và được giả sử là hằng số cho trước. Kết quả của chương này được tóm tắt trong bài báo [34].

Trước tiên, chúng tôi trình bày lại một số không gian hàm sẽ được sử dụng trong chương này.

1.1. Một số kiến thức bổ trợ

1.1.1. Nghiệm yếu trong không gian $H^{1,0}(Q)$

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ là miền Lipschitz bị chặn có biên là $\partial\Omega := \Gamma$, $T > 0$ là một số thực, $Q = \Omega \times (0, T)$. Xét bài toán giá trị biên ban đầu trong phương trình parabolic tuyến tính

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + c_0 y = f & \text{trong } Q, \\ \partial_\nu y + \alpha y = g & \text{trên } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0(\cdot) & \text{trong } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Trong đó, ta giả thiết rằng c_0, α, f và g là các hàm phụ thuộc (x, t) thỏa mãn $c_0 \in L^\infty(Q), \alpha \in L^\infty(\Sigma)$ sao cho $\alpha(x, t) \geq 0$ với hầu hết $(x, t) \in \Sigma$ và các hàm $f \in L^2(Q), g \in L^2(\Sigma), y_0 \in L^2(\Omega)$.

Trước khi đưa ra công thức nghiệm yếu của bài toán (1.1), chúng tôi bắt đầu bằng việc nhắc lại hai không gian hàm thường xuyên được sử dụng trong bài toán giá trị biên ban đầu trong phương trình parabolic.

Định nghĩa 1.1 Kí hiệu $H^{1,0}(Q)$ là không gian định chuẩn gồm tất cả các hàm $y \in L^2(Q)$ có đạo hàm riêng yếu cấp một theo biến x_1, \dots, x_n thuộc $L^2(Q)$ với chuẩn được xác định như sau

$$\|y\|_{H^{1,0}(Q)} = \left(\int_0^T \int_\Omega \left(|y(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2 \right) dx dt \right)^{1/2}.$$

Ở đây, ∇ là gradient theo biến x . Khi đó, ta có

$$H^{1,0}(Q) = \{y \in L^2(Q) : D_i y \in L^2(Q), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Không gian $H^{1,0}(Q)$ còn được biết đến như là không gian $W_2^{1,0}(Q)$ và trùng với không gian $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ (sẽ được nhắc tới ở phần sau). Các phần tử của không gian $H^{1,0}(Q)$ có đạo hàm riêng bậc nhất dạng yếu theo biến x , có nghĩa là, tồn tại hàm $w_i \in L^2(Q)$ thỏa mãn

$$\iint_Q y(x, t) D_i v(x, t) dx dt = - \iint_Q w_i(x, t) v(x, t) dx dt, \quad \forall v \in C_0^\infty(Q), i = 1, \dots, n.$$

Khi đó, ta đặt $D_i y(x, t) := w_i(x, t), i = 1, \dots, n$. Ta để ý rằng $W_2^{1,0}(Q)$ là không gian Hilbert [56].

Định nghĩa 1.2 Không gian $H^{1,1}(Q)$ được định nghĩa

$$H^{1,1}(Q) = \{y \in L^2(Q) : y_t \in L^2(Q) \text{ và } D_i y \in L^2(Q), \forall i = 1, \dots, n\},$$

là không gian định chuẩn với chuẩn xác định như sau

$$\|y\|_{H^{1,1}(Q)} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} \left(|y(x,t)|^2 + |\nabla y(x,t)|^2 + |y_t(x,t)|^2 \right) dxdt \right)^{1/2},$$

ở đây, ∇ là gradient theo biến x .

Khi đó $H^{1,1}(Q)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng. Ta cũng chú ý rằng, không gian này trùng với không gian $H^1(Q)$ và các phần tử của không gian $H^{1,1}(Q)$ có đạo hàm riêng yếu theo các biến x_i và cũng có đạo hàm riêng theo biến t , tức là, tồn tại hàm $w \in L^2(Q)$, kí hiệu $w = y_t$ thỏa mãn

$$\iint_Q y(x,t)v_t(x,t)dxdt = - \iint_Q w(x,t)v(x,t)dxdt, \quad \forall v \in C_0^\infty(Q).$$

Bây giờ ta sẽ biến đổi bài toán (1.1) thành biểu thức biến phân bằng cách nhân phương trình đầu với hàm thử $v \in C^1(\overline{Q})$ rồi lấy tích phân trên Q . Ở đây ta có thể giả sử rằng y là nghiệm cổ điển và các tích phân bên dưới là tồn tại. Trong trường hợp đặc biệt, y được giả thiết là hàm liên tục trong \overline{Q} . Tuy nhiên, biểu thức biến phân sau cùng chỉ có nghĩa nếu ta có $y \in H^{1,0}(Q)$ và khi đó y được hiểu như nghiệm yếu của bài toán. Sau khi lấy tích phân trên Q và lấy tích phân từng phần, với mọi $v \in C^1(\overline{Q})$ ta nhận được

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} y_t v dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} v \Delta y dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} c_0 y v dxdt \\ &= \int_{\Omega} y(x,t)v(x,t)dx \Big|_0^T - \iint_Q (y v_t - \nabla y \nabla v - c_0 y v) dxdt - \iint_{\Sigma} v \partial_{\nu} y dsdt \\ &= \iint_Q f v dxdt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nếu $v(x, T) = 0$ và sử dụng điều kiện biên $\partial_{\nu} y = g - \alpha y$, ta thu được

Với mọi $v \in H^{1,1}(Q)$ thỏa mãn $v(x, T) = 0$, ta có

$$\begin{aligned} & \iint_Q (-y v_t + \nabla y \nabla v + c_0 y v) dxdt + \iint_{\Sigma} \alpha y v dsdt \\ &= \iint_Q f v dxdt + \iint_{\Sigma} g v dsdt + \int_{\Omega} y_0 v(\cdot, 0) dx. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Khi đó ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 1.3 Hàm $y \in H^{1,0}(Q)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.1) nếu đẳng thức biến phân (1.3) được thỏa mãn với mọi hàm thử $v \in H^{1,1}(Q)$ sao cho $v(x, T) = 0$.

Định lý 1.1 ([94]) *Bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm yếu trong không gian $H^{1,0}(Q)$. Hơn nữa, tồn tại một hằng số $c_p > 0$, phụ thuộc vào các hàm f, g và y_0 thỏa mãn*

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c_p (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}), \quad (1.4)$$

với mọi hàm $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$ và $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Kết quả trên là trường hợp đặc biệt của [94, Định lý 7.9]. Điều này đảm bảo rằng nghiệm yếu y của bài toán (1.1) là ánh xạ liên tục từ $[0, T]$ vào không gian $L^2(\Omega)$, tức là, $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Do đó, chuẩn $\max_{t \in [0, T]} \|y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$, giá trị ban đầu và giá trị cuối $y(\cdot, 0)$, $y(\cdot, T)$ được xác định và điều kiện ban đầu $y(\cdot, 0) = y_0$ được thỏa mãn.

Như vậy, ánh xạ tuyến tính $(f, g, y_0) \mapsto y$ là toán tử liên tục từ không gian $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ vào $H^{1,0}(Q)$ và vào $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu không gian L^p các hàm vectơ.

Định nghĩa 1.4 Cho V là một không gian Banach.

i) Kí hiệu $L^p(a, b; V)$, $1 \leq p < \infty$ là không gian tuyến tính gồm tất cả các hàm vectơ đo được $y : [a, b] \rightarrow V$ có tính chất

$$\int_a^b \|y(t)\|_V^p dt < \infty.$$

Không gian $L^p(a, b; V)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|y\|_{L^p(a, b; V)} := \left(\int_a^b \|y(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}.$$

ii) Ta kí hiệu $L^\infty(a, b; V)$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm vectơ đo được $y : [a, b] \rightarrow V$ có tính chất

$$\|y\|_{L^\infty(a, b; V)} := \operatorname{ess\,sup}_{[a, b]} \|y(t)\|_V < \infty.$$

Hiển nhiên ta có $C([a, b]; V) \subset L^p(a, b; V) \subset L^q(a, b; V)$ với $1 \leq q \leq p \leq \infty$ (xem [94]).

Các phần tử của không gian $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ có thể được xem như các hàm nhận giá trị thực theo biến x và t , tức là $y = y(x, t)$ với $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Với mỗi t , hàm $y(\cdot, t)$ thuộc không gian $H^1(\Omega)$ theo biến x và chuẩn được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} &= \left(\int_0^T \|y(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^T \int_{\Omega} (|y(x, t)|^2 + |\nabla_x y(x, t)|^2) dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có [94]

$$H^{1,0}(Q) \cong L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

1.1.2. Nghiệm yếu trong không gian $W(0, T)$

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả về nghiệm yếu của bài toán parabolic giá trị biên ban đầu trong không gian $W(0, T)$. Ta viết lại bài toán (1.1)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + c_0 y = f, & \text{trong } Q, \\ \partial_\nu y + \alpha y = g, & \text{trên } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y_0(\cdot), & \text{trong } \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

với giả thiết về các hệ số và vế phải như đã nêu ở Mục 1.1.1. Xét không gian hàm sau

Định nghĩa 1.5 Cho V là một không gian Hilbert. Kí hiệu $W(0, T)$ là không gian tuyến tính gồm tất cả các hàm $y \in L^2(0, T; V)$, có đạo hàm (theo nghĩa phân bố) $y' \in L^2(0, T; V^*)$ với chuẩn xác định bởi

$$\|y\|_{W(0, T)} = \left(\int_0^T (\|y(t)\|_V^2 + \|y'(t)\|_{V^*}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Không gian $W(0, T) = \{y : y \in L^2(0, T; V), y' \in L^2(0, T; V^*)\}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_{W(0, T)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_V + \int_0^T \langle u'(t), v'(t) \rangle_{V^*} dt.$$

Khi đó ta có kết quả sau

Định lý 1.2 ([94]) Cho $y \in W_2^{1,0}(Q)$ là nghiệm yếu của bài toán (1.1). Khi đó nghiệm y thuộc không gian $W(0, T)$.

Định lý 1.3 ([94]) Nghiệm yếu y của bài toán (1.1) thỏa mãn đánh giá dạng

$$\|y\|_{W(0,T)} \leq c_w (\|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}),$$

với hằng số $c_w > 0$ không phụ thuộc vào (f, g, y_0) . Hay nói cách khác, ánh xạ $(f, g, y_0) \mapsto y$ xác định toán tử tuyến tính liên tục từ không gian $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ vào không gian $W(0, T)$ và trong trường hợp riêng ánh xạ đó vào không gian $C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Xét bài toán liên hợp với bài toán (1.5)

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p + c_0 p = a_Q & \text{trong } Q, \\ \partial_\nu p + \alpha p = a_\Sigma & \text{trên } \Sigma, \\ p(\cdot, T) = a_\Omega & \text{trong } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

với các hệ số c_0, α bị chặn và đo được, các vế phải thỏa mãn $a_Q \in L^2(Q)$, $a_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ và $a_\Omega \in L^2(\Omega)$. Ta xác định một dạng song tuyến tính như sau

$$a[t; y, v] := \int_\Omega (\nabla y \nabla v + c_0(\cdot, t) y v) dx + \int_\Gamma \alpha(\cdot, t) y v dS.$$

Khi đó, ta có kết quả quan trọng sau đây:

Định lý 1.4 ([94]) Bài toán parabolic (1.6) có duy nhất nghiệm yếu $p \in W_2^{1,0}(Q)$, nghiệm này là nghiệm của bài toán biến phân

$$\begin{aligned} \iint_Q p v_t dx dt + \int_0^T a[t; y, v] dt &= \int_\Omega a_\Omega v(T) dx + \iint_Q a_Q v dx dt + \iint_\Sigma a_\Sigma v dS dt, \\ \forall v \in W_2^{1,1}(Q) \text{ sao cho } v(\cdot, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Ta có $p \in W(0, T)$ và tồn tại hằng số $c_a > 0$ không phụ thuộc vào các hàm cho trước, thỏa mãn

$$\|p\|_{W(0,T)} \leq c_a (\|a_Q\|_{L^2(Q)} + \|a_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)} + \|a_\Omega\|_{L^2(\Omega)}).$$

Từ $p \in W(0, T)$, ta có công thức tích phân từng phần cho bài toán liên hợp ở dạng rút gọn

$$\int_0^T \left\{ -\langle p_t, v \rangle_{V^*, V} + a[t; p, v] \right\} dt = \iint_Q a_Q v \, dxdt + \iint_\Sigma a_\Sigma v \, dSdt, \\ \forall v \in L^2(0, T; V), \quad (1.7) \\ p(T) = a_\Omega.$$

Để tính đạo hàm của bài toán biến phân ta cần đến kết quả sau:

Định lý 1.5 ([94]) *Cho $y \in W(0, T)$ là nghiệm của bài toán parabolic*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + c_0 y = b_Q v & \text{trong } Q, \\ \partial_\nu y + \alpha y = b_\Sigma u & \text{trên } \Sigma, \\ y(0) = b_\Omega w & \text{trong } \Omega, \end{cases}$$

với các hàm hệ số $c_0, b_Q \in L^\infty(Q)$, $\alpha, b_\Sigma \in L^\infty(\Sigma)$, $b_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ và các biến điều khiển $v \in L^2(Q)$, $u \in L^2(\Sigma)$, $w \in L^2(\Omega)$. Hơn nữa, các hàm cho trước a_Ω, a_Q, a_Σ là các hàm bình phương khả tích và cho $p \in W(0, T)$ là nghiệm yếu của bài toán (1.6). Khi đó, ta có

$$\int_\Omega a_\Omega y(\cdot, T) dx + \iint_\Sigma a_\Sigma y \, dSdt + \iint_Q a_Q y \, dxdt \\ = \int_\Omega b_\Omega p(\cdot, 0) w dx + \iint_\Sigma b_\Sigma p u \, dSdt + \iint_Q b_Q p v \, dxdt.$$

1.2. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát tích phân trên biên

1.2.1. Bài toán thuận

Xét bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.8)$$

Bằng cách sử dụng nghiệm yếu trong không gian $W(0, T)$, nghiệm của bài toán (1.8) trong không gian $W(0, T)$ tồn tại và duy nhất.

Định nghĩa 1.6 Cho $u_0 \in L^2_I(\Omega)$ và hàm $f \in L^2_I(S)$. Hàm $u \in H^{1,0}_I(Q)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.8) nếu hàm $g(u, f) \in L^2(S)$ và với mọi hàm thử $\eta \in H^{1,1}(Q)$ thỏa mãn $\eta(\cdot, T) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_Q \left(-u(x, t)\eta_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \eta(x, t) \right) dx dt \\ = \int_{\Omega} u_0(x)\eta(x, 0)dx + \int_S g(u(x, t), f(x, t)) \eta(x, t) dS dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Trong định nghĩa trên, nếu điều kiện biên phi tuyến $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f)$ được thay bởi điều kiện biên tuyến tính $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h$ với $h \in L^2(0, T; \partial\Omega)$ thì trong (1.9) ta có thể thay hàm $g(u(x, t), f(x, t))$ bởi hàm $h(x, t)$ ([56]). Nghiệm yếu của bài toán phi tuyến cũng có thể coi như nghiệm yếu của bài toán tuyến tính với điều kiện biên $h(x, t) = g(u(x, t), f(x, t))$.

Ta có kết quả quan trọng sau

Định lý 1.6 ([87]) Cho J là khoảng con của tập I thỏa mãn hàm $g(u, f)$ liên tục Lipschitz đều trên $J \times J$. Khi đó với mỗi hàm $u_0 \in L^2_J(\Omega)$ và hàm $f \in L^2_J(S)$, bài toán (1.8) có duy nhất nghiệm yếu.

Phép chứng minh cần đến Định lý Leray-Schauder về điểm bất động và nguyên lý maximum cho nghiệm yếu. Bây giờ, chúng tôi sẽ chỉ ra nguyên lý maximum cho nghiệm yếu.

Định lý 1.7 ([87]) Cho u và \bar{u} là nghiệm yếu của bài toán (1.8) tương ứng với các điều kiện u_0, f và \bar{u}_0, \bar{f}_0 có miền xác định là I và thỏa mãn $u_0 \leq \bar{u}_0, f \leq \bar{f}$. Khi đó, $u \leq \bar{u}$.

Áp dụng Định lý 1.7, hoàn toàn tương tự ta cũng có $\bar{u} \leq u$. Khi đó, ta có hệ quả sau

Hệ quả 1.7.1 ([87]) Cho trước các điều kiện u_0 và f , bài toán (1.8) có nhiều nhất 1 nghiệm.

Ta thấy, hàm $u \equiv c$ là nghiệm của bài toán (1.8) ứng với điều kiện ban đầu $u_0 \equiv c$ và hàm $f \equiv c$, với c là một hằng số bất kì. Nếu ta áp dụng Định lý 1.7 với $c = m$ và $c = M$ thì ta có kết quả sau

Hệ quả 1.7.2 ([87]) *Cho u là nghiệm yếu của bài toán (1.8). Nếu u_0 và f bị chặn dưới bởi m (hoặc bị chặn trên bởi M) h.k.n thì u cũng bị chặn dưới bởi m (hoặc bị chặn trên bởi M).*

Trong [87], để đưa ra đánh giá tiên nghiệm cho nghiệm yếu của bài toán (1.8), tác giả cần điều kiện đơn điệu chặt của hàm $g(u, f)$. Tuy nhiên, điều đó là không cần thiết. Ngoài ra, nếu điều kiện ban đầu liên tục đến tận biên thì ta có kết quả sau

Định lý 1.8 ([13], [76], [77]) *Nếu $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ và $f \in L^\infty(S)$ thì tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1.8) trong không gian $W(0, T) \cap L^\infty(S)$. Nghiệm yếu này liên tục trong \overline{Q} và tồn tại một hằng số dương c độc lập với u_0 và f thỏa mãn*

$$\|u\|_{W(0,T)} + \|u\|_{C(\overline{Q})} \leq c(\|u_0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|g\|_{L^\infty(I \times I)}). \quad (1.10)$$

Chứng minh. Xem [76]. □

Để nhấn mạnh sự phụ thuộc của nghiệm $u(x, t)$ vào hàm g , ta kí hiệu nó là $u(x, t; g)$ hoặc $u(g)$ thay vì u . Hơn nữa, vì f cố định nên ta kí hiệu $g(u)$ thay cho $g(u, f)$. Tuy nhiên ta vẫn nhớ rằng hàm g phụ thuộc cả vào hai biến u và f có miền giá trị trong I như hàm u_0 . Vì ta coi hàm g như là hàm một biến đối với u nên kí hiệu đạo hàm của g theo u là $\dot{g}_u(u)$ thay vì $\frac{dg}{du}$. Trong phần tiếp theo, chúng tôi chứng minh ánh xạ u biến g thành $u(g)$ khả vi Fréchet. Để làm được điều đó, trước tiên ta chứng minh $u(g)$ liên tục Lipschitz.

Gọi \mathcal{A}_1 là tập tất cả các hàm $g(u, f)$ khả vi liên tục theo biến u trong miền I . Ta có đánh giá sau

Bổ đề 1.1 *Cho hàm $g^1, g^2 \in \mathcal{A}_1$ thỏa mãn $g^1 - g^2 \in \mathcal{A}$ còn u^1, u^2 là nghiệm của bài toán (1.8) tương ứng với điều kiện biên g^1, g^2 . Giả sử $u_0 \in L^2_I(\Omega)$ và $f \in L^\infty(S)$. Khi đó, tồn tại một hằng số c sao cho*

$$\|u^1 - u^2\|_{W(0,T)} + \|u^1 - u^2\|_{C(\overline{Q})} \leq c\|g^1 - g^2\|_{L^\infty(I \times I)}.$$

Chứng minh. Đặt $v = u^1 - u^2$, khi đó v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{trong } Q, \\ v(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = g^1(u^1) - g^2(u^2) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.11)$$

Vì $v(x, 0) = 0$ và

$$\begin{aligned} g^1(u^1) - g^2(u^2) &= (g^1(u^1) - g^1(u^2)) + (g^1(u^2) - g^2(u^2)) \\ &= \int_{u^2}^{u^1} \dot{g}_u^1(\theta) d\theta + g^1(u^2) - g^2(u^2), \end{aligned}$$

mà $g^1(u^2) - g^2(u^2) \in L^\infty(S)$ và $\dot{g}_u^1 < 0$ nên tồn tại nghiệm yếu v của bài toán (1.11). Do đó, theo Định lý 1.8, $v \in W(0, T) \cap L^\infty(Q)$ và thỏa mãn đánh giá

$$\|v\|_{W(0, T)} + \|v\|_{C(\bar{Q})} \leq c \left(\|u_0\|_{C(\bar{\Omega})} + \|g\|_{L^\infty(I \times I)} \right),$$

hay

$$\|u^1 - u^2\|_{W(0, T)} + \|u^1 - u^2\|_{C(\bar{Q})} \leq c \|g^1 - g^2\|_{L^\infty(I \times I)}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Trong (1.8) thay g bởi $g + z$ ta được

$$\begin{cases} u_t(g + z) - \Delta u(g + z) = 0 & \text{trong } Q, \\ u(g + z)|_{t=0} = u_0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u(g + z)}{\partial \nu} = g(u(g + z)) + z(u(g + z)) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.12)$$

Đặt $w = u(g + z) - u(g)$. Ta có w là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{trong } Q, \\ w(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = g(u(g + z)) - g(u(g)) + z(u(g + z)) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.13)$$

Để chứng minh $u(g)$ khả vi Fréchet, ta chứng minh $u(g)$ khả vi Gâteaux bằng cách trong (1.8) thay g bởi $g + \epsilon z$ ta có

$$\begin{cases} u_t^\epsilon(g + \epsilon z) - \Delta u^\epsilon(g + \epsilon z) = 0 & \text{trong } Q, \\ u^\epsilon(g + \epsilon z)|_{t=0} = u_0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u^\epsilon(g + \epsilon z)}{\partial \nu} = g(u(g + \epsilon z)) + \epsilon z(u(g + \epsilon z)) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.14)$$

Đặt $\eta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(g + \epsilon z) - u(g)}{\epsilon}$ là đạo hàm theo hướng z của hàm u , ta được

$$\begin{cases} \frac{\partial(u^\epsilon - u)/\epsilon}{\partial t} - \Delta(u^\epsilon - u)/\epsilon = 0 & \text{trong } Q, \\ (u^\epsilon - u)/\epsilon|_{t=0} = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial(u^\epsilon - u)/\epsilon}{\partial \nu} = \frac{g(u^\epsilon, f) - g(u, f)}{\epsilon} + z(u^\epsilon, f) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial(u^\epsilon - u)/\epsilon}{\partial \nu} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(u^\epsilon, f) - g(u, f)}{\epsilon} + z(u^\epsilon, f) \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\dot{g}_u(u, f) \frac{u^\epsilon - u}{\epsilon} + z(u^\epsilon, f) \right) \\ &= \dot{g}_u(u, f)\eta + z(u, g). \end{aligned}$$

Do đó, η là nghiệm của bài toán "sensitivity"

$$\begin{cases} \eta_t - \Delta \eta = 0 & \text{trong } Q, \\ \eta(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \dot{g}_u(u(g))\eta + z(u, g) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.15)$$

Vì $\dot{g}_u(u(g)) < 0$ nên bài toán (1.15) có nghiệm. Hơn nữa, do $\eta(x, 0) = 0$ và $z, g \in \mathcal{A}_1$ nên theo Định lý 1.8 tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.15) trong không gian $W(0, T) \cap L^\infty(Q)$.

Định lý 1.9 Cho $u_0 \in L^2_T(\Omega)$, $f \in L^\infty(S)$ và $g \in \mathcal{A}_1$. Khi đó, ánh xạ biến g thành $u(g)$ khả vi Fréchet và với bất kỳ $g, g + z \in \mathcal{A}_1$ ta có

$$\lim_{\|z\|_{L^\infty(I \times I)} \rightarrow 0} \frac{\|u(g + z) - u(g) - \eta\|_{W(0, T)}}{\|z\|_{C^1(I)}} = 0. \quad (1.16)$$

Chứng minh. Đặt $w = u(g + z) - u(g) - \eta$ với η là nghiệm của bài toán (1.15), khi đó w là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{trong } Q, \\ w(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = g(u(g+z)) + z(u(g+z)) - g(u(g)) - \dot{g}_u(u(g))\eta - z(u, g) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} & g(u(g+z)) + z(u(g+z)) - g(u(g)) - \dot{g}_u(u(g))\eta - z(u, g) \\ &= \dot{g}_u(u(g))(u(g+z) - u(g)) + g(u(g+z)) - g(u(g)) - \dot{g}_u(u(g))\eta \\ &\quad - \dot{g}_u(u(g))(u(g+z) - u(g)) + z(u(g+z)) - z(u(g)) \\ &= \dot{g}_u(u(g))(u(g+x) - u(g) - \eta) + g(u(g+z)) - g(u(g)) \\ &\quad - \dot{g}_u(u(g))(u(g+z) - u(g)) + z(u(g+z)) - z(u(g)). \end{aligned}$$

Do đó, w là nghiệm bài toán

$$\begin{cases} w_t - \Delta w &= 0 \text{ trong } Q, \\ w(x, 0) &= 0 \text{ trong } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} - \dot{g}_u(u(g))w &= g(u(g+z)) - g(u(g)) - \dot{g}_u(u(g))(u(g+z) \\ &\quad - u(g)) + z(u(g+z)) - z(u(g)) \text{ trên } S. \end{cases} \quad (1.17)$$

Vì g khả vi liên tục nên theo Định lý 1.8 ta có

$$\begin{aligned} & \|g(u(g+z)) - g(u(g)) - \dot{g}_u(u(g))(u(g+z) - u(g))\|_{L^\infty(S)} \\ &= o(\|u(g+z)|_S - u(g)|_S\|_{L^\infty(S)}) \\ &= o(\|z\|_{L^\infty(S)}). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \|z(u(g+z)) - z(u(g))\|_{L^\infty(S)} &= \left\| \int_{u(g)}^{u(g+z)} \dot{z}_u(\theta) d\theta \right\|_{L^\infty(S)} \\ &\leq c \|\dot{z}_u\|_{L^\infty(I)} \|z\|_{L^\infty(I)} \\ &= o(\|z\|_{C^1(I)}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Từ (1.10) và (1.18) ta có (1.16). Hơn nữa, η là toán tử tuyến tính bị chặn biến $z \in \mathcal{A}_1$ vào không gian $W(0, T)$ nên u khả vi Fréchet theo biến g hay η là đạo hàm Fréchet của u . Định lý được chứng minh. \square

1.2.2. Bài toán biên phân

Trong mục này, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán xác định g trong hệ (1.8)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f) & \text{trên } S, \end{cases}$$

từ quan sát tích phân

$$lu(f) := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x, t; g)dS = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.19)$$

trên tập chấp nhận được \mathcal{A}_1 bằng phương pháp biên phân. Trong đó, $\omega(x)$ là hàm không âm trên $\partial\Omega$, $\omega(x) \in L^1(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \omega(x)dS > 0$.

Nội dung của phương pháp biên phân là tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(g) = \frac{1}{2} \|lu(g) - h\|_{L^2(0, T)}^2 \quad \text{trên tập } \mathcal{A}_1. \quad (1.20)$$

Trước tiên, chúng tôi chứng minh phiếm hàm $J(g)$ khả vi Fréchet và đưa ra biểu thức gradient. Sau đó, với điều kiện mạnh hơn đối với hàm g , chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán biên phân.

Định lý 1.10 *Phiếm hàm $J(g)$ khả vi Fréchet trên tập \mathcal{A}_1 và gradient được tính theo công thức*

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u(g))\varphi(x, t)dSdt, \quad (1.21)$$

trong đó, $\varphi(x, t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + \omega(x) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Chứng minh. Với ϵ_0 cho trước đủ nhỏ, chọn $\epsilon > 0$, $z \in \mathcal{A}_1$ sao cho $g + \epsilon z \in \mathcal{A}_1$ với $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Kí hiệu u^ϵ là nghiệm của bài toán (1.8) với điều kiện biên g được thay bởi $g + \epsilon z$. Ta có

$$\begin{aligned}
J(g + \epsilon z) - J(g) &= \frac{1}{2} \|lu(g + \epsilon z) - h\|_{L^2(0,T)}^2 - \frac{1}{2} \|lu(g) - h\|_{L^2(0,T)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|(lu(g + \epsilon z) - lu(g)) + (lu(g) - h)\|_{L^2(0,T)}^2 - \frac{1}{2} \|lu(g) - h\|_{L^2(0,T)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|lu(g + \epsilon z) - lu(g)\|_{L^2(0,T)}^2 + \langle lu(g + \epsilon z) - lu(g), lu(g) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\
&= \frac{1}{2} \|l(u^\epsilon - u(g))\|_{L^2(0,T)}^2 + \langle l(u^\epsilon - u(g)), lu(g) - h \rangle_{L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Khi $\epsilon \rightarrow 0$, theo Bổ đề 1.1, ta có

$$\|l(u^\epsilon - u(g))\|_{L^2(0,T)}^2 = o(\|z\|_{L^\infty(I)}).$$

Mặt khác, vì $u(g)$ khả vi Fréchet nên phiếm hàm $J(g)$ cũng khả vi Fréchet và ta có

$$\begin{aligned}
\nabla J(g)z &= \langle l(u^\epsilon - u(g)), lu(g) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\
&= \langle l(\dot{u}_g(g)z), lu(g) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\
&= \langle l(\eta), lu(g) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\
&= \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)\eta(x,t)dS \right) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right) dt,
\end{aligned}$$

trong đó η là nghiệm của bài toán "sensitivity".

Xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + \omega(x) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.22)$$

Vì $\dot{g}_u(u(g)) < 0$ và $\omega(x) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right) \in L^2(S)$ nên bài toán (1.22) có duy nhất nghiệm trong không gian $W(0, T)$ và theo Định lý 1.5 ta có

$$\int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)\eta(x,t)dS \right) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right) dt = \int_S z(u, g)\varphi(x, t)dSdt.$$

Do đó

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u, g)\varphi(x, t)dSdt.$$

Định lý được chứng minh. □

Trong phát biểu dưới đây, chúng tôi chỉ ra điều kiện cần của cực trị cho phiếm hàm $J(g)$.

Định lý 1.11 *Giả sử $g^* \in \mathcal{A}_1$ là cực tiểu của phiếm hàm (1.20) trên tập \mathcal{A}_1 . Khi đó, bất kì $z = g - g^* \in \mathcal{A}_1$,*

$$\nabla J(g^*)z = \int_S z(u^*(g^*))\varphi(x, t; g^*)dSdt \geq 0, \quad (1.23)$$

với u^* là nghiệm của bài toán (1.8), $\varphi(x, t; g^*)$ là nghiệm của bài toán liên hợp (1.22) ứng với điều kiện biên $g = g^*$.

Chứng minh. Gọi u^* và $u^{*,\epsilon}$ là nghiệm của bài toán (1.8) tương ứng với điều kiện biên g^* và $g^* + \epsilon z$. Đặt $v = u^{*,\epsilon} - u^*$, khi đó v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{trong } Q, \\ v(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = (g^* + \epsilon z)(u^{*,\epsilon}) - g^*(u^*) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Đặt $\eta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u^{*,\epsilon} - u^*}{\epsilon}$ thì ta cũng có η là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \eta_t - \Delta \eta = 0 & \text{trong } Q, \\ \eta(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \dot{g}^*_u(u^*)\eta + z(u^*) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi = 0 & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dot{g}^*_u(u^*(g))\varphi + \omega(x) \left(\int_{\partial \Omega} \omega(x)u^*(g)|_S dS - h(t) \right) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 1.5 ta có

$$\begin{aligned} \nabla J(g^*)z &= \int_0^T \left(\int_{\partial \Omega} \omega(x)\eta(x, t)dS \right) \left(\int_{\partial \Omega} \omega(x)u^*(x, t; g^*)dS - h(t) \right) dt \\ &= \int_S z(u^*(g))\varphi(x, t; g^*)dSdt. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. \square

Bây giờ, chúng tôi chứng minh sự tồn tại cực tiểu của bài toán biến phân (1.20) trên tập chấp nhận được. Xét tập (xem [86])

$$\mathcal{A}_2 := \left\{ g \in C^{1,\alpha}[I], m_1 \leq g(u) \leq M_1, M_2 \leq \dot{g}(u) \leq 0, \forall u \in I, \right. \\ \left. \sup_{u_1, u_2 \in I} \frac{|\dot{g}_u(u_1) - \dot{g}_u(u_2)|}{|u_1 - u_2|^\nu} \leq C \right\}.$$

Ở đây, ν, m_1, M_1, M_2 và C là các hằng số cho trước.

Giả sử $u_0 \in C^\beta(\overline{\Omega})$ với hằng số β nào đó thuộc $(0, 1]$. Thế thì, theo [76, Hệ quả 3.2], $u \in C^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q})$ với $\gamma \in (0, 1)$. Đặt

$$T_{ad} := \left\{ (g, u(g)) : g \in \mathcal{A}_2; u \in C^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q}) \right\}.$$

Ta có kết quả sau

Bổ đề 1.2 *Tập T_{ad} là tiền compact trong không gian $C^1[I] \times C(\overline{Q})$.*

Chứng minh. Ta có \mathcal{A}_2 là tập compact trong không gian $C^1[I]$ (xem [86]). Hơn nữa, theo [76, Hệ quả 3.2], khi $g \in \mathcal{A}_2$ thì nghiệm $u(g)$ bị chặn trong không gian $C^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q})$. Sử dụng phép nhúng compact $C^{\gamma, \gamma/2}(\overline{Q})$ vào không gian $C(\overline{Q})$. Do đó, T_{ad} là tiền compact. Bổ đề được chứng minh. \square

Định lý 1.12 *Tập T_{ad} đóng trong không gian $C^1[I] \times C(\overline{Q})$.*

Chứng minh. Giả sử dãy (g_n, u_n) hội tụ trong không gian T_{ad} tới giới hạn (g, u) . Ta sẽ chứng minh $u = u(g)$.

Thật vậy, vì $g_n \in \mathcal{A}_2$, (xem [86]), g thuộc \mathcal{A}_2 . Hơn nữa, vì u_0 và f đều có miền giá trị là I , nên các hàm u_n và u cũng có miền giá trị là I . Suy ra

$$\begin{aligned} |g(u) - g_n(u_n)| &\leq |g(u) - g(u_n)| + |g(u_n) - g_n(u_n)| \\ &\leq M_1 \|u - u_n\|_{C(\overline{Q})} + \|g - g_n\|_{L^\infty(I)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó, dãy $g_n(x, t) = g_n(u_n)$ hội tụ đều đến hàm $g(x, t) = g(u)$. Từ Định nghĩa nghiệm yếu 1.6 ta có $u = u(g)$. Vậy, định lý được chứng minh. \square

Định lý 1.13 Bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm $J(g)$ trên tập \mathcal{A}_2 có ít nhất một nghiệm.

Chứng minh. Định lý trên được suy ra trực tiếp từ tính liên tục của phiếm hàm J , Định lý 1.12 và Định lý Weierstrass. \square

1.2.3. Ví dụ số

Để giải số bài toán (1.8) với quan sát tích phân (1.19) chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử biên để giải bài toán thuận và bài toán liên hợp, sử dụng phương pháp lặp Gauss–Newton để tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.20).

1.2.3.1. Phương pháp phần tử biên cho phương trình parabolic

Xét bài toán biên loại 3 đối với phương trình truyền nhiệt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = f(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) & = a(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(\xi, t)u & = b(\xi, t), \quad (\xi, t) \in S, \end{cases} \quad (1.24)$$

trong đó

$$f \in L^2(Q), a \in L^2(\Omega), \sigma \in L^\infty(S), \sigma \geq 0, b \in L^2(S), \quad (1.25)$$

là các hàm số cho trước.

Dữ kiện Cauchy $[w := \frac{\partial u}{\partial \nu}, u]$ trên biên S của bài toán (1.24) có thể được tìm bằng phương pháp phương trình tích phân biên, (xem [17]). Thật vậy, ta có công thức biểu diễn nghiệm của phương trình truyền nhiệt (1.24) với $(\tilde{x}, t) \in Q$,

$$\begin{aligned} u(\tilde{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \mathcal{E}(\tilde{x}-y, t-\tau)w(y, \tau) ds_y d\tau - \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu_y}(\tilde{x}-y, t-\tau)u(y, \tau) ds_y d\tau \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{E}(\tilde{x}-y, t)a(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(\tilde{x}-y, t-\tau)g(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (1.26)$$

trong đó $\mathcal{E}(x, t)$ được cho bởi

$$\mathcal{E}(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{với } t > 0, \\ 0 & \text{với } t \leq 0, \end{cases}$$

là nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt, (xem [17]).

Ta định nghĩa các thế vị đơn và thế vị kép sau

$$(Vw)(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$(Ku)(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

với $(x, t) \in S$, các toán tử tích phân biên N và W ,

$$(Nw)(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

và

$$(Wu)(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Ngoài ra, ta xét các thế vị thể tích sau, với $(x, t) \in S$,

$$(\mathcal{M}_0 a)(x, t) = \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - y, t) a(y) dy,$$

$$(\mathcal{N}_0 g)(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) g(y, \tau) dy d\tau,$$

$$(\mathcal{M}_1 a)(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - y, t) a(y) dy,$$

và

$$(\mathcal{N}_1 g)(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) g(y, \tau) dy d\tau.$$

Tính chất của các toán tử tích phân trên có thể xem trong [17, 68]. Đặc biệt, toán tử N là toán tử liên hợp của toán tử thế vị kép K , tức là

$$\langle \kappa_T w, N\varphi \rangle = \langle \kappa_T \varphi, Kw \rangle,$$

trong đó ánh xạ κ_T được định nghĩa bởi $\kappa_T v(x, t) := v(x, T - t)$.

Từ công thức biểu diễn nghiệm, ta có các phương trình tích phân sau, (xem [17])

$$(Vw)(x, t) = \left(\frac{1}{2}I + K \right) u(x, t) - (\mathcal{M}_0 a)(x, t) - (\mathcal{N}_0 g)(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in S, \quad (1.27)$$

và

$$(Wu)(x, t) = \left(\frac{1}{2}I - N\right) w(x, t) - (\mathcal{M}_1 a)(x, t) - (\mathcal{N}_1 g)(x, t) \quad \text{với } (x, t) \in S. \quad (1.28)$$

Kết hợp với điều kiện biên, ta có hệ phương trình tích phân biên sau

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V & -(\frac{1}{2}I + K) \\ (\frac{1}{2}I + N) & W + \sigma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{M}_0 a - \mathcal{N}_0 g \\ b - \mathcal{M}_1 a - \mathcal{N}_1 g \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Bổ đề 1.3 *Toán tử \mathcal{A} là toán tử elliptic, tức là ta có bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} V & -K \\ N & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \right\rangle + \langle \sigma u, u \rangle \\ &\geq C \left(\|w\|_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(S)}^2 + \|u\|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(S)}^2 \right) \end{aligned}$$

với mọi $w \in H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(S)$, $u \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(S)$, và C là một hằng số.

Chứng minh. Xem [17, Định lý 3.11], và sử dụng điều kiện $\sigma \geq 0$. \square

Với giả thiết (1.25), hệ phương trình tích phân biên (1.29) có nghiệm duy nhất $(w, u) \in H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(S) \times H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(S)$. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ trình bày phương pháp phần tử biên (BEM) để giải số hệ phương trình tích phân biên (1.29).

Gọi \mathcal{V}_h là không gian các hàm tuyến tính từng khúc đối với biến không gian và là hằng số từng khúc đối với biến thời gian. \mathcal{U}_h là không gian các hàm hằng số từng khúc đối với cả biến không gian và thời gian. Phương pháp Galerkin đối với hệ (1.29) là tìm $(w_h, u_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{U}_h$ sao cho

$$\left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} w_h \\ u_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_h \\ v_h \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{M}_0 a - \mathcal{N}_0 g \\ b - \mathcal{M}_1 a - \mathcal{N}_1 g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_h \\ v_h \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{với mọi } (\tau_h, v_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{U}_h.$$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} \langle V w_h, \tau_h \rangle_S - \langle (\frac{1}{2}I + K) u_h, \tau_h \rangle_S &= -\langle \mathcal{M}_0 a + \mathcal{N}_0 g, \tau_h \rangle_S, \\ \langle (\frac{1}{2}I + N) w_h, v_h \rangle_S + \langle W u_h, v_h \rangle_S + \langle \sigma u_h, v_h \rangle_S &= \langle b - \mathcal{M}_1 a - \mathcal{N}_1 g, v_h \rangle_S, \end{cases} \quad (1.30)$$

với mọi $(\tau_h, v_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{U}_h$.

Giả sử

$$u_h(x, t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m_1-1} u_{i\ell} \varphi_i^1(x) \psi_\ell^0(t), \quad w_h(x, t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_0-1} w_{j\ell} \varphi_j^0(x) \psi_\ell^0(t).$$

Ở đây, $m_0 = m_1$ trong trường hợp hai chiều, n là số bước thời gian, $\varphi_j^0(x)$ và $\varphi_i^1(x)$ lần lượt là các hàm cơ sở hằng số từng khúc và tuyến tính từng khúc đối với biến không gian và $\psi_\ell^0(t)$ các hàm cơ sở hằng số từng khúc đối với biến thời gian.

Chọn các hàm thử $\tau_h \in \mathcal{U}_h$ và $v_h \in \mathcal{V}_h$, ta thu được hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} V_h \underline{w} - (\frac{1}{2}M_h + K_h) \underline{u} = \underline{f}^1, \\ (\frac{1}{2}M_h^\top + N_h) \underline{w} + W_h \underline{u} + M_h^\sigma \underline{u} = \underline{f}^2, \end{cases}$$

trong đó V_h, K_h, N_h và W_h và các ma trận Galerkin tương ứng với các toán tử tích phân biên V, K, N và W ; M_h là ma trận trọng số, (xem [89]). Các vectơ \underline{f}^1 và \underline{f}^2 tương ứng là các vectơ vế phải.

Ngoài ra, ta định nghĩa ma trận trọng số với các phần tử

$$\begin{aligned} M_{k\ell}^\sigma[j][i] &= \langle \sigma(x, t) \varphi_i^1(x) \psi_\ell^0(t), \varphi_j^1(x) \psi_k^0(t) \rangle \\ &= \int_0^T \int_\Gamma \sigma(x, t) \varphi_i^1(x) \psi_\ell^0(t) \varphi_j^1(x) \psi_k^0(t) ds_x dt. \end{aligned}$$

Như vậy, $M_{k\ell}^\sigma[j][i] = 0$ nếu $k \neq \ell$. Với $k = \ell$, ta ký hiệu $M_{\ell\ell}^\sigma$ bởi M_ℓ^σ .

Các ma trận Galerkin là các ma trận khối, tam giác dưới. Cụ thể, ta có

$$V_h = \begin{pmatrix} V_0 & & & & \\ V_1 & V_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ V_{n-2} & V_{n-3} & & V_0 & \\ V_{n-1} & V_{n-2} & & & V_0 \end{pmatrix}, \quad W_h = \begin{pmatrix} W_0 & & & & \\ W_1 & W_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ W_{n-2} & W_{n-3} & & W_0 & \\ W_{n-1} & W_{n-2} & & & W_0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}M_h + K_h = \begin{pmatrix} K_0 & & & & \\ K_1 & K_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ K_{n-2} & K_{n-3} & & K_0 & \\ K_{n-1} & K_{n-2} & & & K_0 \end{pmatrix}$$

và

$$\frac{1}{2}M_h^\top + N_h = \begin{pmatrix} K_0^\top & & & & \\ K_1^\top & K_0^\top & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ K_{n-2}^\top & K_{n-3}^\top & & K_0^\top & \\ K_{n-1}^\top & K_{n-2}^\top & & & K_0^\top \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{pmatrix} V_h & -(\frac{1}{2}M_h + K_h) \\ (\frac{1}{2}M_h^\top + N_h) & W_h + M_h^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}^1 \\ \underline{f}^2 \end{pmatrix}$$

có thể viết lại như sau

$$\begin{pmatrix} V_0 & & & & \\ V_1 & V_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ V_{n-2} & V_{n-3} & & V_0 & \\ V_{n-1} & V_{n-2} & & & V_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_0 & & & & \\ K_1 & K_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ K_{n-2} & K_{n-3} & & K_0 & \\ K_{n-1} & K_{n-2} & & & K_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_1^1 \\ \dots \\ f_{n-2}^1 \\ f_{n-1}^1 \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} K_0^\top & & & & \\ K_1^\top & K_0^\top & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ K_{n-2}^\top & K_{n-3}^\top & & K_0^\top & \\ K_{n-1}^\top & K_{n-2}^\top & & & K_0^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_0 + M_0^\sigma & & & & \\ W_1 & W_0 + M_1^\sigma & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ W_{n-2} & W_{n-3} & & W_0 + M_{n-2}^\sigma & \\ W_{n-1} & W_{n-2} & & & W_0 + M_{n-1}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^2 \\ f_1^2 \\ \dots \\ f_{n-2}^2 \\ f_{n-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Từ hai phương trình đầu tiên của hệ trên, ta có

$$\begin{pmatrix} V_0 & -K_0 \\ K_0^\top & W_0 + M_0^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[K_0^\top V_0^{-1} K_0 + W_0 + M_0^\sigma] u_0 = f_0^2 - K_0^\top V_0^{-1} f_0^1,$$

với V_0 là ma trận khả nghịch, do toán tử V là toán tử elliptic, và do đó ta có thể giải được nghiệm duy nhất u_0 và w_0 . Do đó, các véc tơ w_k và u_k được xác định từ hệ phương trình sau

$$\begin{cases} V_k w_0 + V_{k-1} w_1 + \dots + V_0 w_k - K_k u_0 - K_{k-1} u_1 - \dots - K_0 u_k = f_k^1 \\ K_k^\top w_0 + K_{k-1}^\top w_1 + \dots + K_0^\top w_k + W_k u_0 + \dots + W_1 u_{k-1} + (W_0 + M_k^\sigma) u_k = f_k^2 \end{cases}$$

với $k = 1, \dots, n-1$. Hệ này có thể viết lại như sau

$$\begin{cases} V_0 w_k - K_0 u_k = f_k^1 + K_k u_0 + K_{k-1} u_1 + \dots + K_1 u_{k-1} - V_k w_0 - \dots - V_1 w_{k-1} \\ K_0^\top w_k + (W_0 + M_k^\sigma) u_k = f_k^2 - K_k^\top w_0 - \dots - K_1^\top w_{k-1} - W_k u_0 - \dots - W_1 u_{k-1}. \end{cases}$$

Chú ý ma trận $\mathbb{R}^{m_1 \times m_1} \ni A_h^k := K_0^\top V_0^{-1} K_0 + W_0 + M_k^\sigma$, $k = 0, \dots, n-1$, là đối xứng và xác định dương. Do đó, ta có thể sử dụng một số phương pháp hữu hiệu để giải hệ phương trình này, chẳng hạn phương pháp gradient liên hợp (xem [93], p. 293–302), hoặc phương pháp phân tích Cholesky (xem [93], p. 172–189).

a. Phương pháp phần tử biên giải bài toán thuận phi tuyến

Xét bài toán thuận

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) + b(x, t), & (x, t) \in S = \partial\Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (1.31)$$

với các hàm số u_0, g, b cho trước. Đây là bài toán phi tuyến (điều kiện biên phi tuyến). Ta giải bài toán thuận trên bằng phương pháp lặp như sau:

Xuất phát từ xấp xỉ đầu $u^0 = u^0(x, t)$, ta tìm $u^{n+1}(x, t)$ là nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} u_t^{n+1} - \Delta u^{n+1} &= 0, & (x, t) \in Q, \\ u^{n+1}(x, 0) &= u_0(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \nu} - g'(u^n)u^{n+1} &= g(u^n) - g'(u^n)u^n + b(x, t), & (x, t) \in S = \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Đây là bài toán biên Robin với $g'(u^n) \geq 0$. Bài toán này được giải bằng phương pháp phần tử biên. Thuật toán dừng khi

$$\|u^{n+1} - u^n\| \leq \varepsilon \|u^{n+1}\| \quad \text{hoặc } n > \max_{it},$$

trong đó, \max_{it} là số bước lặp cao nhất.

Nhận xét 1.1 Với giả thiết đã biết $A = \min_{\overline{Q}} u(x, t)$ và $B = \max_{\overline{Q}} u(x, t)$, khi lập trình tính toán, ở mỗi bước lặp ta thực hiện phép chiếu hàm u^n trên đoạn $[A, B]$.

b. Phương pháp phần tử biên giải bài toán liên hợp

Xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi &= 0, & (x, t) \in Q, \\ \varphi(x, T) &= 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= \dot{g}(u(g))\varphi + \omega(x) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(t) \right), & (x, t) \in S. \end{cases}$$

Cho trước hàm u và g , bài toán liên hợp trên là bài toán tuyến tính. Đặt

$$p(x, t) = \kappa_T \varphi(x, t).$$

Khi đó $p(x, t)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} p_t - \Delta p &= 0, & (x, t) \in Q, \\ p(x, 0) &= 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} &= \kappa_T \dot{g}(u(g))p + \omega(x) \left(\kappa_T \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(g)|_S dS - h(T-t) \right), & (x, t) \in S. \end{cases}$$

Chú ý $\kappa_T \dot{g}(u(g)) \leq 0$, bài toán trên có thể giải bằng phương pháp phần tử biên.

1.2.3.2. Kết quả số

Các kết quả số trình bày trong luận án được tính toán trên máy tính xách tay với các thông số: Intel Core i3 - 2328M, CPU 2.20GHz, RAM 2.0GB, hệ điều hành Windows 7 và môi trường C++ hoặc MATLAB.

Chúng tôi thử nghiệm thuật toán cho miền hai chiều $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $T = 1$ và nghiệm chính xác được cho bởi

$$u_{\text{exact}}(x, t) = \frac{100}{4\pi t} \exp\left(-\frac{|x - x_0|^2}{4t}\right), \quad (1.32)$$

trong đó $x_0 = (-2, -2)$. Ta nhận thấy rằng từ phương trình (1.32), cực tiểu của u đạt tại $t = 0$ với kiện ban đầu $u(x, 0) = u_0(x) = 0$, trong khi cực đại của u_{exact} đạt tại $t = T = 1$ và $x = (0, 0)$, tức là $u((0, 0), 1) = \frac{100}{4\pi}e^{-2}$. Do đó, trong trường hợp này, chúng tôi chọn khoảng thời gian $[A, B] = [0, \frac{100}{4\pi}e^{-2}]$.

Chúng tôi xét các ví dụ có ý nghĩa vật lý như tìm lại quy luật truyền nhiệt tuyến tính của Newton và quy luật bức xạ nhiệt phi tuyến bậc bốn khi điều kiện biên có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u) - g_{\text{exact}}(f), \quad \text{trên } S,$$

với dữ kiện đầu vào f cho trước được xác định bởi

$$f = \frac{\partial u_{\text{exact}}}{\partial \nu} + u_{\text{exact}}, \quad \text{trên } S.$$

Trong trường hợp tuyến tính điều kiện biên tuyến tính ta có $g_{\text{exact}}(f) = -f$ với

$$f = \left(\frac{\partial u_{\text{exact}}}{\partial \nu} + u_{\text{exact}}^4\right)^{1/4}, \quad \text{trên } S.$$

Trong trường hợp điều kiện biên phi tuyến ta có $g_{\text{exact}}(f) = -f^4$.

Bằng tính toán trực tiếp, ta có cực trị của hàm f được xác định như trên trên S là $[m := \min_S f; M := \max_S f] \supset [A, B] = [0, \frac{100}{4\pi}e^{-2}]$. Theo Hệ quả 1.7.2, ta biết rằng $m \leq u \leq M$, hơn nữa các cận trên M và cận dưới m bị chặn do các dữ kiện đầu vào u_0 và f được cho trước.

Ở đây, hai hàm trọng được sử dụng trong quan sát tích phân (1.19) là

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{nếu } \xi \in [(0; 0), (\varepsilon, 0)], \\ 0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases} \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad (1.33)$$

và

$$\omega(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1, \quad (1.34)$$

với $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Chú ý rằng trong hàm trọng (1.33) nếu ε có giá đủ nhỏ thì quan sát tích phân (1.19) trở thành quan sát điểm như trong (0.4) tại gốc tọa độ $\xi_0 = (0; 0)$.

Chúng tôi áp dụng thuật toán lặp Gauss – Newton để tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.20) được viết lại như sau

$$J(g) = \frac{1}{2} \|lu(g) - h\|_{L^2(0,T)}^2 =: \frac{1}{2} \|\Phi(g)\|_{L^2(0,T)}^2. \quad (1.35)$$

Cho trước g_n , xét bài toán con, tìm cực tiểu (ứng với $z \in L^2(I)$) của phiếm hàm

$$\frac{1}{2} \|\Phi(g_n) + \Phi'(g_n)z\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\alpha_n}{2} \|z\|_{L^2(I)}^2, \quad \text{Phương pháp 1 (M1),} \quad (1.36)$$

hoặc

$$\frac{1}{2} \|\Phi(g_n) + \Phi'(g_n)z\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\alpha_n}{2} \|z - g_n + g_0\|_{L^2(I)}^2, \quad \text{Phương pháp 2 (M2).} \quad (1.37)$$

Bước lặp mới được cập nhật

$$g_{n+1} = g_n + 0.5z. \quad (1.38)$$

Do hàm g là hàm giảm nên ở mỗi bước lặp, ta thực hiện phép chiếu (chặt cụt) để đảm bảo rằng ở bước lặp tiếp theo tính chất giảm của hàm g được giữ nguyên.

Ở đây, ta chọn tham số hiệu chỉnh

$$\alpha_n = \frac{0.001}{n+1}. \quad (1.39)$$

Bài toán thuận và bài toán liên hợp được giải bằng phương pháp phần tử biên (BEM) với 128 phần tử biên, 32 bước thời gian và khoảng $[A, B]$ được chia thành 32 khoảng nhỏ. Ở đây, chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử biên giúp việc tính toán số nhanh hơn do phương pháp này đưa bài toán hai chiều về bài toán một chiều bằng cách rời rạc hóa tích phân trên biên. Tuy nhiên, phương pháp này chỉ sử dụng được khi nghiệm cơ bản của bài toán được cho dưới dạng tường minh.

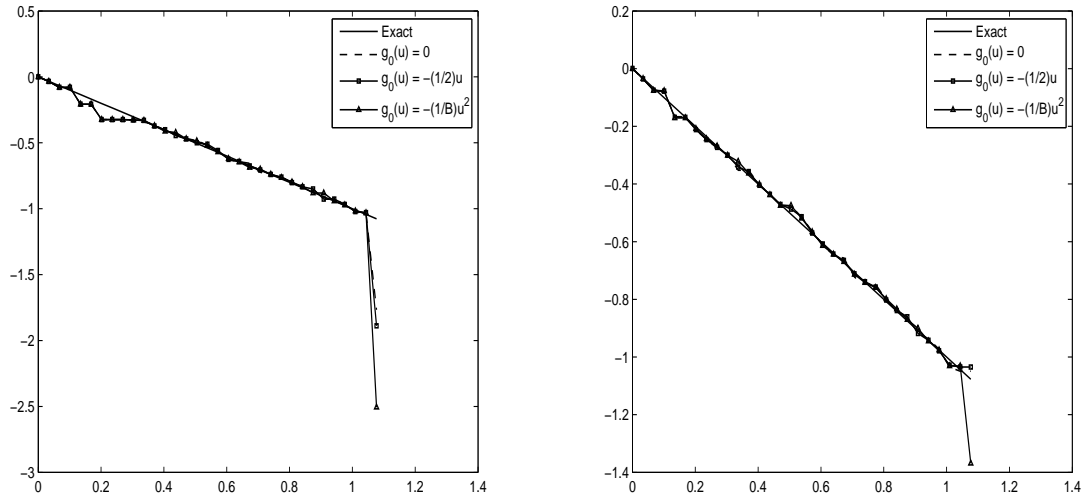
Trong phần tiếp theo, chúng tôi trình bày kết quả số cho trường hợp hàm $g(u)$ chưa biết là tuyến tính và phi tuyến bằng cách sử dụng phương pháp M1 và phương pháp M2 với dự đoán ban đầu g_0 và nhiễu dữ kiện là $\|h^\delta - h\|_{L^2(0,T)} \leq \delta$.

Trường hợp tuyến tính

Trong trường hợp này, chúng tôi muốn tìm lại hàm tuyến tính $g(u) = -u$ từ các dự đoán ban đầu khác nhau là

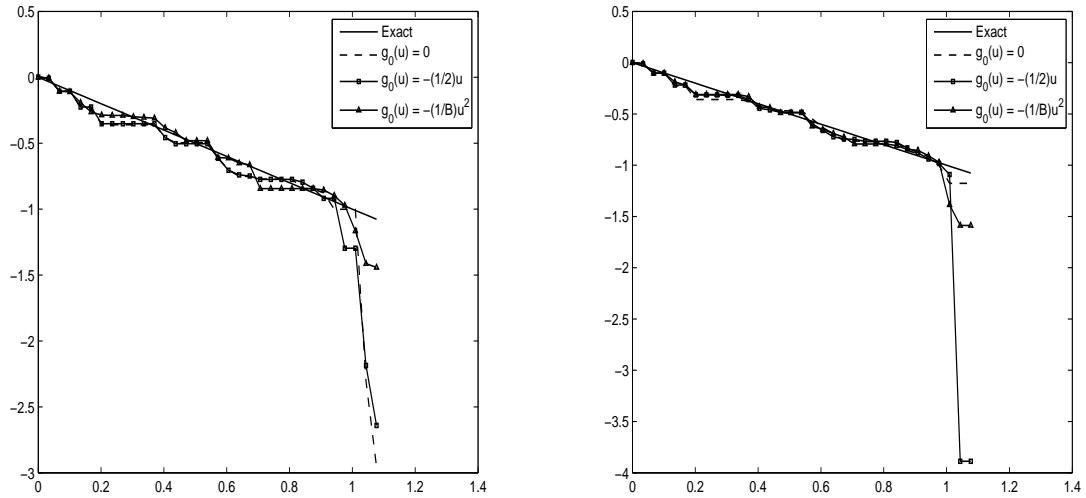
$$g_0(u) \in \left\{ 0, -\frac{1}{2}u, -\frac{1}{B}u^2 \right\}. \quad (1.40)$$

Với hàm trọng (1.33), Hình 1.1 và 1.2 cho ta nghiệm số thu được từ phương pháp (M1) và (M2), với dự đoán ban đầu (1.40), và nhiễu cho tương ứng là $\delta = 0.001$ và $\delta = 0.01$. Hình 1.3 và 1.4 biểu diễn kết quả tương tự Hình 1.1 và 1.2, nhưng với hàm trọng cho bởi (1.34).

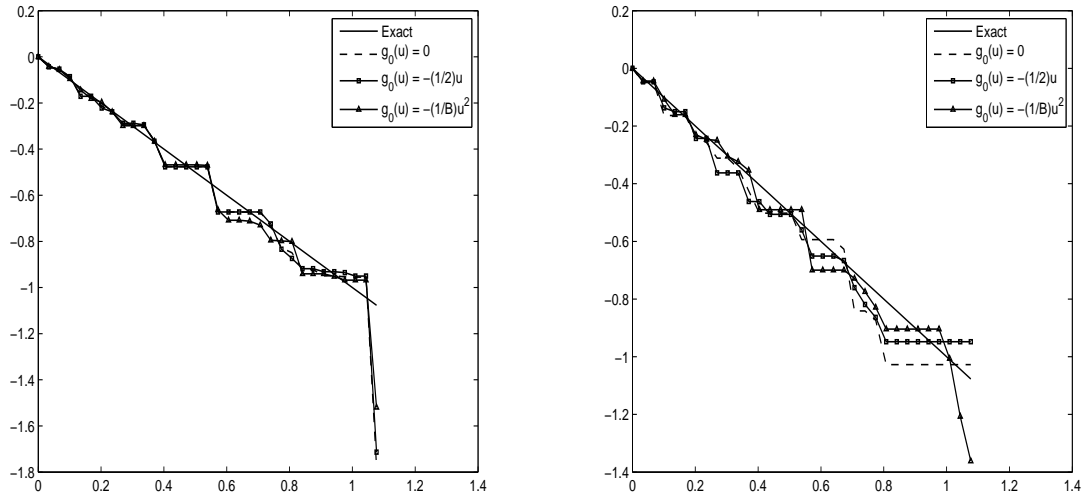


Hình 1.1: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u$ với nghiệm giải số bằng phương pháp (M1) (bên trái) và phương pháp (M2) (bên phải), với nhiễu $\delta = 0.001$. Hàm trọng ω được cho bởi (1.33).

Từ Hình 1.1–1.4 có thể nhận thấy cả hai phương pháp (M1) và (M2) cùng cho ta kết quả tốt như nhau và không phụ thuộc vào dự đoán ban đầu (1.40). Trừ một số bước nhảy lớn xảy ra tại $u = B$, kết quả tính toán là chính xác, ổn định và mạnh, tức là không phụ thuộc vào dự đoán ban đầu. Nếu so sánh

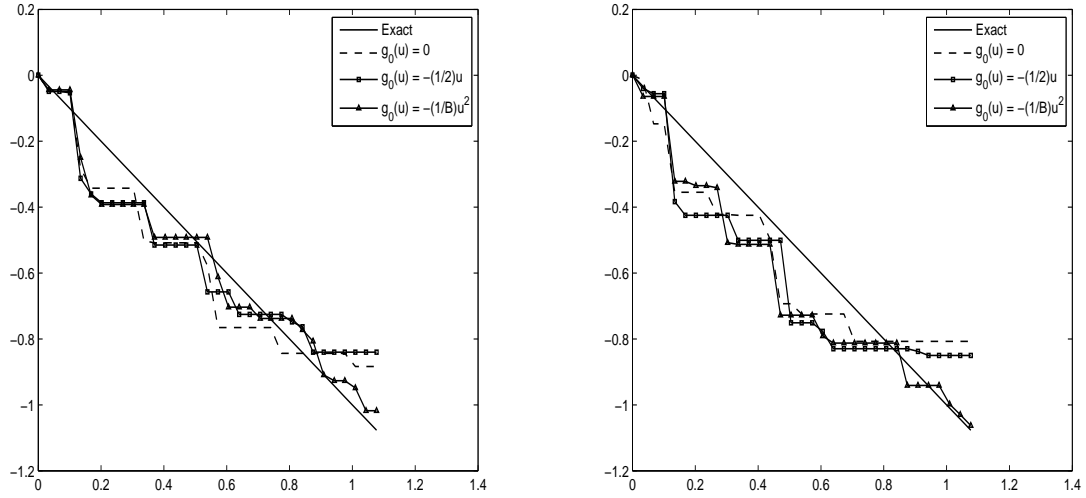


Hình 1.2: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u$ với nghiệm giải số thu được từ phương pháp (M1) (bên trái) và phương pháp (M2) (bên phải), với nhiễu $\delta = 0.01$. Hàm trọng ω được cho bởi (1.33).



Hình 1.3: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u$ với nghiệm giải số từ phương pháp (M1) (bên trái) và phương pháp (M2) (bên phải), với nhiễu $\delta = 0.001$. Hàm trọng ω được cho bởi (1.34).

Hình 1.1 và 1.2 với Hình 1.3 và 1.4 ta thấy rằng việc chọn hàm trọng (1.33) hoặc (1.34) có ảnh hưởng nhỏ đến kết quả số. Đặc biệt, Hình 1.3 và 1.4 chỉ ra dáng điệu của $g(u)$, như hàm u , và ở đây kết quả số bị phụ thuộc một chút vào



Hình 1.4: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u$ với nghiệm giải số thu được từ phương pháp (M1) (bên trái) và phương pháp (M2) (bên phải), với nhiễu $\delta = 0.01$. Hàm trọng ω được cho bởi (1.34).

dự đoán ban đầu (1.40), điều này thấy rõ hơn với phương pháp (M2) và nhiễu lớn $\delta = 0.01$.

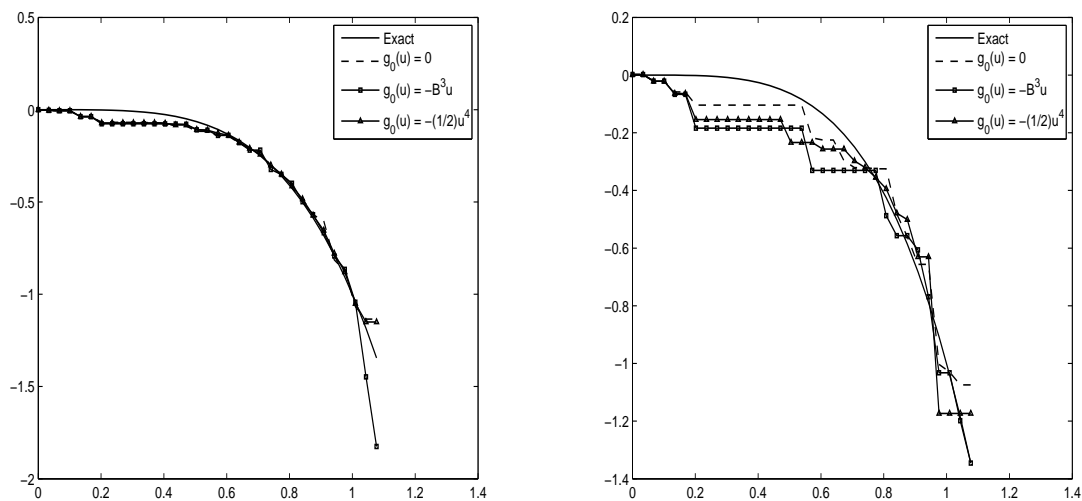
Trường hợp phi tuyến

Trong trường hợp này, chúng tôi cần thiết lập lại hàm phi tuyến $g(u) = -u^4$ từ các dự đoán ban đầu

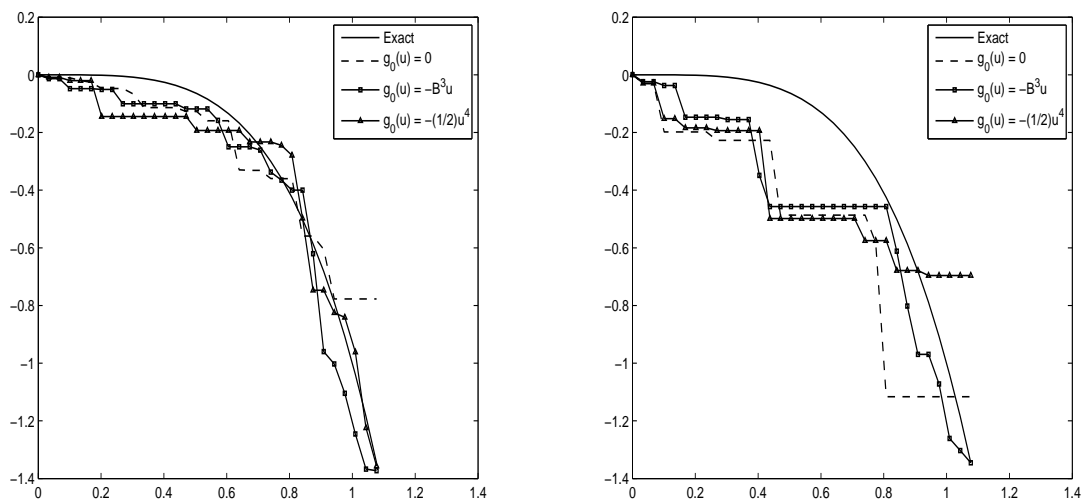
$$g_0(u) \in \left\{ 0, -B^3 u, -\frac{1}{2} u^4 \right\}. \quad (1.41)$$

Để đơn giản, chúng tôi chỉ trình bày các kết quả số sử dụng phương pháp (M2). Hình 1.5 và 1.6 cho ta nghiệm giải số khi sử dụng phương pháp M2, với dự đoán ban đầu cho bởi (1.41) và nhiễu được chọn là $\delta \in \{0.001, 0.01\}$, hàm trọng được xác định tương ứng như trong (1.33) và (1.34). Ta cũng có kết luận tương tự được rút ra từ các hình như trường hợp tuyến tính.

Trong hai mục tiếp theo chúng tôi chứng tỏ rằng, phương pháp của chúng tôi có thể dễ dàng áp dụng cho bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt hoặc hệ số truyền nhiệt với các quan sát trên một phần của biên, hoặc quan sát tích phân trên biên.



Hình 1.5: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u^4$ với nghiệm giải số thu được từ phương pháp (M2) với nhiễu $\delta = 0.001$ (bên trái) và nhiễu $\delta = 0.01$ (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (1.33).



Hình 1.6: So sánh nghiệm chính xác $g(u) = -u^4$ với nghiệm giải số thu được từ phương pháp (M2) với nhiễu $\delta = 0.001$ (bên trái) và nhiễu $\delta = 0.01$ (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (1.34).

1.3. Bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát một phần trên biên

Xét bài toán (1.8) được viết lại như sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = 0, & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(u, f), & \text{trên } S = \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Tìm hàm $u(x, t)$ và $g(u, f)$ từ điều kiện quan sát trên một phần của biên

$$u|_{\Sigma} = h(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma, \quad (1.42)$$

trong đó $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$ với $\Gamma \subset \partial\Omega$. Với bài toán thuận ta cũng có các kết quả giống như bài toán thuận trong Mục 1.2.1, nên chúng tôi chỉ đưa ra cách giải bài toán ngược dựa trên phương pháp biến phân bằng cách xét phiếm hàm

$$J(g) = \frac{1}{2} \|u(g) - h(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)}^2, \quad \text{trên tập } \mathcal{A}_1. \quad (1.43)$$

Chúng tôi cũng sẽ chứng minh phiếm hàm (1.43) khả vi Fréchet và đưa ra công thức tính gradient của J theo biến g .

Định lý 1.14 *Phiếm hàm $J(g)$ khả vi Fréchet trên tập \mathcal{A}_1 và gradient được tính theo công thức*

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u(g))\varphi(x, t)dSdt, \quad (1.44)$$

trong đó, $\varphi(x, t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + (u(x, t) - h(x, t))\chi_{\Sigma}(x, t) & \text{trên } S. \end{cases}$$

Ở đây, χ_{Σ} là hàm đặc trưng của Σ xác định bởi

$$\chi_{\Sigma}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x, t) \in \Sigma \\ 0 & \text{nếu } (x, t) \notin \Sigma. \end{cases}$$

Chứng minh. Với ϵ_0 cho trước đủ nhỏ, chọn $\epsilon > 0$, $z \in \mathcal{A}_1$ sao cho $g + \epsilon z \in \mathcal{A}_1$ với $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Kí hiệu u^ϵ là nghiệm của bài toán (1.8) với điều kiện biên g

được thay bởi $g + \epsilon z$ ta có

$$\begin{aligned}
J(g + \epsilon z) - J(g) &= \frac{1}{2} \|u(g + \epsilon z) - h\|_{L^2(\Sigma)}^2 - \frac{1}{2} \|u(g) - h\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|(u(g + \epsilon z) - u(g)) + (u(g) - h)\|_{L^2(\Sigma)}^2 - \frac{1}{2} \|u(g) - h\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\
&= \frac{1}{2} \|u(g + \epsilon z) - u(g)\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \langle u(g + \epsilon z) - u(g), u(g) - h \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \frac{1}{2} \|u^\epsilon - u(g)\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \langle u^\epsilon - u(g), lu(g) - h \rangle_{L^2(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Khi $\epsilon \rightarrow 0$, theo Bổ đề 1.1, ta có

$$\|u^\epsilon - u(g)\|_{L^2(\Sigma)}^2 = o(\|z\|_{L^\infty(I)}).$$

Mặt khác, vì $u(g)$ khả vi Fréchet nên phiếm hàm $J(g)$ cũng khả vi Fréchet và ta có

$$\begin{aligned}
\nabla J(g)z &= \langle u^\epsilon - u(g), u(g) - h \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \langle \dot{u}_g(g)z, u(g) - h \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \langle \eta, u(g) - h \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \int_S \eta(x, t) (u(g) - h) \chi_\Sigma dSdt,
\end{aligned}$$

trong đó η là nghiệm của bài toán "sensitivity" (1.15).

Xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0, & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0, & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{g}_u(u(g))\varphi + (u(x, t) - h(x, t))\chi_\Sigma(x, t), & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.45)$$

Vì $\dot{g}_u(u(g)) < 0$ và $(u(x, t) - h(x, t))\chi_\Sigma(x, t) \in L^2(S)$ nên bài toán (1.45) có duy nhất nghiệm trong không gian $W(0, T)$ và theo Định lý 1.5 ta có

$$\int_S \eta(x, t) (u(g) - h) \chi_\Sigma dSdt = \int_S z(u, g)\varphi(x, t) dSdt.$$

Do đó

$$\nabla J(g)z = \int_S z(u, g)\varphi(x, t) dSdt.$$

Định lý được chứng minh. □

1.4. Bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ từ quan sát tích phân

Tương tự như trên, chúng tôi xét phương pháp biến phân cho bài toán xác định hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$ trong bài toán giá trị biên ban đầu

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{trong } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{trên } \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(u(\xi, t))(u_\infty - u(\xi, t)), & \text{trên } S = \partial\Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (1.46)$$

với điều kiện quan sát

$$lu(\sigma) := \int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x, t)dS = h(t), \quad t \in (0, T], \quad (1.47)$$

trên tập chấp nhận được $\sigma \in \mathcal{A}_2$. Trong đó u_∞ là nhiệt độ môi trường xung quanh và được giả sử bằng một hằng số cho trước.

Vì nghiệm $u(x, t)$ bài toán (1.46) phụ thuộc vào hệ số truyền nhiệt σ nên ta kí hiệu nghiệm này là $u(\sigma)$ hoặc $u(x, t; \sigma)$. Và nghiệm yếu của bài toán (1.46) được xác định như sau

Định nghĩa 1.7 Một hàm $u \in H^{1,0}(Q)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.46) nếu với mọi hàm $\eta \in H^{1,1}(Q)$ thỏa mãn $\eta(\cdot, T) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_Q \left(-u(x, t)\eta_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \eta(x, t) \right) dxdt &= \int_\Omega u_0(x)\eta(x, 0)dx \\ &+ \int_S \sigma(u(\xi, t))(u_\infty - u(\xi, t))\eta(\xi, t)d\xi dt. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nếu ta giả sử rằng $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ thì tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1.46) trong không gian $W(0, T) \cap L^\infty(Q)$. Nghiệm này thuộc không gian $C(\bar{Q})$ (xem [13, 76, 77]) và nếu $u_0 \in C^\beta(\bar{\Omega})$ với hằng số $\beta \in (0, 1]$ nào đó thì $u \in C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{Q})$ với $\gamma \in (0, 1)$ nào đó. Hơn nữa, theo nguyên lý maximum (xem [86]), ta có

$$\min \left(u_\infty, \inf_{x \in \Omega} u_0(x) \right) \leq u(x, t) \leq \max \left(u_\infty, \sup_{x \in \Omega} u_0(x) \right).$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi xét bài toán tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \|lu(\sigma) - h\|_{L^2(0, T)}^2, \quad (1.49)$$

trên tập \mathcal{A}_2 . Sự tồn tại nghiệm của bài toán biến phân (1.49) được chứng minh trong [81] thông qua việc chỉ ra ánh xạ biến $\sigma \in C^1(I)$ vào $u(\sigma) \in C(Q)$ khả vi Fréchet. Ở đây,

$$I := \left[\min \left(u_\infty, \inf_{x \in \Omega} u_0(x) \right), \max \left(u_\infty, \sup_{x \in \Omega} u_0(x) \right) \right].$$

Tuy nhiên, các kết quả này cũng có thể được chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như bài toán ở Mục 1.2. Nếu ta lấy biến phân z như ở các phần trước thì đạo hàm Fréchet $\eta = \dot{u}(\sigma)z$ thỏa mãn bài toán "sensitivity" (xem [81])

$$\begin{cases} \eta_t - \Delta \eta = 0 & \text{trong } Q, \\ \eta(x, 0) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \left(\dot{\sigma}_u(u(\sigma))(u_\infty - u(\sigma)) - \sigma(u) \right) \eta \\ \quad + z(u(\sigma))(u_\infty - u(\sigma)) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.50)$$

Do đó, theo [13, 76, 77], tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (1.50) trong không gian $W(0, T) \cap L^\infty(Q)$, nghiệm này thuộc không gian $C(\bar{Q})$.

Bây giờ, chúng tôi sẽ đi tìm công thức tính gradient của phiếm hàm J . Để đạt được mục đích đó, chúng tôi cần bài toán liên hợp sau

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi = 0 & \text{trong } Q, \\ \varphi(x, T) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left(\dot{\sigma}_u(u(\sigma))(u_\infty - u(\sigma)) - \sigma(u) \right) \varphi \\ \quad + \omega(\xi) \left(\int_{\partial \Omega} \omega(x) u(x, t; \sigma) dS - h(t) \right) & \text{trên } S. \end{cases} \quad (1.51)$$

Kí hiệu u^ϵ là nghiệm của bài toán (1.46) khi ta thay σ bởi $\sigma + \epsilon z$ trong điều kiện biên, với $\epsilon > 0$ sao cho $\sigma + \epsilon z \in \mathcal{A}_2$. Ta có

$$\begin{aligned} J(\sigma + \epsilon z) - J(\sigma) &= \frac{1}{2} \|lu(\sigma + \epsilon z) - h\|_{L^2(0, T)}^2 - \frac{1}{2} \|lu(\sigma) - h\|_{L^2(0, T)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|lu(\sigma + \epsilon z) - lu(\sigma)\|_{L^2(0, T)}^2 + \langle lu(\sigma) - h \rangle_{L^2(0, T)} \\ &= \frac{1}{2} \|lu(\sigma + \epsilon z) - lu(\sigma)\|_{L^2(0, T)}^2 + \langle lu(\sigma + \epsilon z) - lu(\sigma), lu(\sigma) - h \rangle_{L^2(0, T)} \\ &= \frac{1}{2} \|l(u^\epsilon - u(\sigma))\|_{L^2(0, T)}^2 + \langle l(u^\epsilon - u(\sigma)), lu(\sigma) - h \rangle_{L^2(0, T)}. \end{aligned}$$

Khi $\epsilon \rightarrow 0$, theo Bổ đề 1.1 ta có

$$\|l(u^\epsilon - u(\sigma))\|_{L^2(0,T)}^2 = o(\|z\|_{L^\infty(I)}).$$

Mặt khác, vì $u(\sigma)$ khả vi Fréchet nên phiếm hàm $J(\sigma)$ cũng khả vi Fréchet và ta có

$$\begin{aligned} \nabla J(\sigma)z &= \langle l(u^\epsilon - u(\sigma)), lu(\sigma) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\ &= \langle l(\eta), lu(\sigma) - h \rangle_{L^2(0,T)} \\ &= \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)\eta(x,t)dS \right) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x,t;\sigma)dS - h \right) dt, \end{aligned}$$

trong đó, η là nghiệm của bài toán (1.50). Áp dụng Định lý 1.5 cho hai bài toán (1.50) và bài toán (1.51) ta nhận được

$$\begin{aligned} \int_S z(u(\sigma))(u_\infty - u(\sigma))\varphi(x,t)dSdt \\ = \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)\eta(x,t)dS \right) \left(\int_{\partial\Omega} \omega(x)u(x,t;\sigma)dS - h \right) dt, \end{aligned}$$

hay

$$J'(\sigma)z = \int_S z(u(\sigma))(u_\infty - u(\sigma))\varphi(x,t)dSdt. \quad (1.52)$$

Vậy, ta có kết quả sau

Định lý 1.15 *Phiếm hàm $J(\sigma)$ khả vi Fréchet trên tập \mathcal{A}_2 và gradient được tính theo công thức (1.52) trong đó $\varphi(x,t)$ là nghiệm của bài toán liên hợp (1.51).*

Chúng tôi nhấn mạnh rằng, phương pháp của chúng tôi có thể áp dụng để tìm hệ số truyền nhiệt $\sigma(u)$. Tuy nhiên, để giới hạn độ dài của luận án, chúng tôi sẽ không trình bày các kết quả số cho trường hợp này.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Các kết quả chính chúng tôi đạt được trong chương này là

- Đưa ra một cách tiếp cận mới và giải số cho bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát tích phân trên biên (1.19) và quan sát trên một phần của biên (1.42).

- Đưa ra công thức biến phân thông qua tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.20) và (1.43) trên tập chấp nhận được \mathcal{A}_1 (Mục 1.2 và 1.3) hoặc \mathcal{A}_2 (Mục 1.4).

- Đưa ra tính khả vi Fréchet (Định lý 1.10) của phiếm hàm quan sát và sự tồn tại nghiệm của bài toán biến phân (Định lý 1.13), cũng như công thức hiển (1.21) và (1.52) cho gradient được thiết lập một cách chặt chẽ.

- Các kết quả số được đưa ra dựa trên phương pháp lặp Gauss-Newton để tìm cực tiểu của phiếm hàm (1.35) dựa trên phương pháp (1.36) (phương pháp M1) hoặc (1.37) (phương pháp M2). Các kết quả số thu được đã chứng minh phương pháp đề xuất có thể xác định lại một cách chính xác, ổn định hàm $g(u)$ trong cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến từ đo đạc trên biên.

Chương 2

Xác định nguồn trong bài toán truyền nhiệt từ quan sát trên biên

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán xác định nguồn từ các quan sát tích phân bằng phương pháp biến phân. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền Lipschitz, giới nội với biên Γ . Ký hiệu $Q := \Omega \times (0, T]$, với $T > 0$ và biên $S = \Gamma \times (0, T]$. Giả sử

$$a_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, b \in L^\infty(Q), \quad (2.1)$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.2)$$

$$\lambda \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

$$0 \leq b(x, t) \leq \mu_1, \quad \text{hầu khắp trong } Q, \quad (2.4)$$

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad \varphi, \psi \in L^2(S), \quad (2.5)$$

$$\lambda \text{ và } \Lambda \text{ là các hằng số dương và } \mu_1 \geq 0. \quad (2.6)$$

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + b(x,t)u = F, \quad (x,t) \in Q, \quad (2.7)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

với điều kiện biên Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma u|_S = \varphi \text{ trên } S, \quad (2.9)$$

hoặc điều kiện biên Dirichlet

$$u|_S = \psi \text{ trên } S. \quad (2.10)$$

Ở đây,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}|_S := \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_j}) \cos(\nu, x_i)|_S,$$

ν là vectơ pháp tuyến ngoài đối với S và $\sigma \in L^\infty(S)$, được giả thiết là không âm hầu khắp nơi trên S .

Giả sử $\omega_i \in L^\infty(\Omega)$ và $\int_\Omega \omega_i(x)dx > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, là các hàm trọng và ta có các dữ kiện sau:

$$l_i u = \int_\Omega \omega_i(x)u(x,t)dx = h_i(t), \quad h_i \in L^2(0,T), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.11)$$

Ngoài ra giả sử rằng, vế phải F có dạng $F = fh(x,t) + g(x,t)$ (f có dạng $f(x,t)$, $f(x)$ hoặc $f(t)$) và ta có một ước lượng f^* của f . Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán xác định f từ các dữ kiện trên.

Chúng tôi sẽ dùng phương pháp bình phương tối thiểu để tiếp cận bài toán này. Đầu tiên, trong Mục 2.1. chúng tôi mô tả phương pháp và chứng minh rằng, phép hàm cần cực tiểu hóa khả vi Fréchet, sau đó biểu diễn đạo hàm Fréchet qua bài toán liên hợp. Để giải bài toán chúng tôi dùng phương pháp gradient liên hợp và mô tả thuật toán này. Trong Mục 2.2. chúng tôi rời rạc hóa bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn và thử nghiệm thuật toán trên một số ví dụ số. Ưu điểm của phương pháp phần tử hữu hạn là có thể áp dụng cho các bài toán tổng quát nhưng bài toán rời rạc nhận được bằng phương pháp này có số chiều lớn hơn hẳn bài toán rời rạc nhận được bằng phương pháp phần

tử biên hoặc phương pháp sai phân phân rã nên việc tính toán sẽ lâu hơn. Trong phần cuối của chương, chúng tôi áp dụng phương pháp sai phân phân rã để rời rạc cho bài toán xác định $f = f(t)$ từ quan sát tích phân trong miền và thử nghiệm thuật toán trên các ví dụ số. Phương pháp này có ưu điểm là đưa bài toán nhiều chiều về dãy các bài toán một chiều nên việc giải sẽ nhanh và đơn giản hơn rất nhiều, song nhược điểm của phương pháp này là chỉ thực hiện được khi miền có dạng hình hộp. Các kết quả của chương này được tổng kết trong các bài báo [35] và [64].

2.1. Phương pháp biến phân

Để cho đơn giản, trong mục này chúng tôi chỉ xét trường hợp bài toán Robin (2.7)–(2.9). Trường hợp bài toán Dirichlet (2.7), (2.8), (2.10) với điều kiện biên (2.10) thuần nhất cũng tương tự. Lời giải của bài toán Robin (2.7)–(2.8) được hiểu theo nghĩa yếu như sau: Giả sử $F \in L^2(Q)$, lời giải yếu trong $W(0, T)$ của bài toán (2.7)–(2.9) là hàm số $u(x, t) \in W(0, T)$ thỏa mãn đẳng thức

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_t, \eta)_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt + \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + b(x, t) u \eta \right) dx dt \\ & + \int_S \sigma u \eta d\xi dt = \int_Q F \eta dx dt + \int_S \varphi \eta d\xi dt, \quad \forall \eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

và

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.12)$$

Theo [97, Chương IV] và [94, p. 141–152] ta có thể chứng minh được rằng, bài toán (2.7)–(2.9) có nghiệm duy nhất trong $W(0, T)$. Ngoài ra tồn tại hằng số c_d không phụ thuộc vào a_{ij}, b, F và u_0 sao cho

$$\|u\|_{W(0, T)} \leq c_d (\|F\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(S)}). \quad (2.13)$$

Giả sử F có dạng $F(x, t) = f(x, t)h(x, t) + g(x, t)$ với $f \in L^2(Q), h \in L^\infty(Q)$ và $g \in L^2(Q)$. Ta muốn xác định f từ các quan sát (2.11). Vì lời giải $u(x, t)$ của (2.7)–(2.9) phụ thuộc vào $f(x, t)$, ta kí hiệu nó là $u(x, t; f)$ hoặc $u(f)$ để nhấn

mạnh sự phụ thuộc của nó vào f . Để xác định f , ta cực tiểu hóa phiếm hàm

$$J_0(f) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2, \quad (2.14)$$

trên $L^2(Q)$. Tuy nhiên, bài toán cực tiểu hóa này không ổn định và có thể có nhiều lời giải. Bởi vậy thay vào đó, chúng tôi cực tiểu hóa phiếm hàm Tikhonov

$$J_\gamma(f) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2, \quad (2.15)$$

với $\gamma > 0$ là tham số hiệu chỉnh Tikhonov, $f^* \in L^2(Q)$ là một dự đoán của f . Dễ thấy rằng nếu $\gamma > 0$, thì bài toán cực tiểu hóa này có lời giải duy nhất. Bây giờ ta chứng minh phiếm hàm J_γ khả vi Fréchet và đưa ra công thức cho đạo hàm của nó. Với mục đích đó, ta xét bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + b(x,t)p = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) (l_i u - h_i), & (x,t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)p = 0, & (x,t) \in S, \\ p(x,T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.16)$$

Vì $\omega_i \in L^2(\Omega)$, $l_i u - h_i \in L^2(0,T)$, vế phải của phương trình đầu trong (2.16) thuộc $L^2(Q)$. Bằng cách thay đổi chiều thời gian, dễ thấy bài toán liên hợp có nghiệm duy nhất trong $W(0,T)$.

Định lý 2.1 *Phiếm hàm J_γ khả vi Fréchet và đạo hàm của nó ∇J_γ tại f có dạng*

$$\nabla J_\gamma(f) = h(x,t)p(x,t) + \gamma(f(x,t) - f^*(x,t)), \quad (2.17)$$

với $p(x,t)$ là lời giải của bài toán liên hợp (2.16).

Chứng minh. Với biến phân $\delta f \in L^2(Q)$ đủ nhỏ của f , ta có

$$\begin{aligned} J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f + \delta f) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f + \delta f) - l_i u(f)\|_{L^2(0,T)}^2 + \sum_{i=1}^N \langle l_i u(f + \delta f) - l_i u(f), l_i u(f) - h_i \rangle_{L^2(0,T)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i \delta u(f)\|_{L^2(0,T)}^2 + \sum_{i=1}^N \langle l_i \delta u(f), l_i u(f) - h_i \rangle_{L^2(0,T)},$$

trong đó $\delta u(f)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right) + b(x,t) \delta u = \delta f(x,t) h(x,t), & (x,t) \in Q, \\ \frac{\partial \delta u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t) \delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in S, \\ \delta u(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

Theo đánh giá tiên nghiệm (2.13) cho bài toán, ta có

$$\|l_i \delta u(f)\|_{L^2(0,T)}^2 = o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}) \quad \text{khi } \|\delta f\|_{L^2(Q)} \rightarrow 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned} J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \sum_{i=1}^N \langle l_i \delta u(f), l_i u(f) - h_i \rangle_{L^2(0,T)} + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\int_{\Omega} \omega_i(x) \delta u(x,t) dx \right) (l_i u(f) - h_i) dt + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\int_{\Omega} \omega_i(x) \delta u(x,t) (l_i u(f) - h_i) dx \right) dt + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \delta u \omega_i(x) (l_i u - h_i) dx dt + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}). \end{aligned}$$

Sử dụng công thức Green cho (2.16) và (2.18) ta nhận được

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \delta u \omega_i(x) (l_i u - h_i) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \delta f(x,t) h(x,t) p(x,t) dx dt.$$

Vậy

$$\begin{aligned} J_0(f + \delta f) - J_0(f) &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta f(x,t) p(x,t) dx dt + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}) \\ &= \langle ph, \delta f \rangle_{L^2(Q)} + o(\|\delta f\|_{L^2(Q)}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Suy ra phiếm hàm J_0 khả vi Fréchet và gradient của nó có dạng

$$\nabla J_0(f) = h(x,t) p(x,t).$$

Vậy nên phiếm hàm Tikhonov J_γ cũng khả vi Fréchet và gradient của nó có dạng (2.17). Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 2.1 Trong định lý này chúng tôi viết phiếm hàm Tikhonov cho trường hợp $F(x, t) = f(x, t)h(x, t) + g(x, t)$. Khi F có cấu trúc khác, thì phiếm hàm cần thay đổi tương ứng. Cụ thể, nếu

- $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$, thì phiếm hàm phạt là $\|f - f^*\|_{L^2(0,T)}$ và

$$\nabla J_0(f) = \int_{\Omega} h(x, t)p(x, t)dx.$$

- $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$, thì phiếm hàm phạt là $\|f - f^*\|_{L^2(\Omega)}$ và

$$\nabla J_0(f) = \int_0^T h(x, t)p(x, t)dt.$$

Để tìm điểm cực tiểu của (2.15), chúng tôi sử dụng phương pháp gradient liên hợp, [63]. Quá trình được thực hiện như sau: Giả sử tại bước lặp k ta có f^k . Khi đó bước lặp tiếp theo được tính theo công thức

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d_k,$$

với

$$d_k = \begin{cases} -\nabla J_\gamma(f^k) & \text{nếu } k = 0, \\ -\nabla J_\gamma(f^k) + \beta_k d_{k-1} & \text{nếu } k > 0, \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{\|\nabla J_\gamma(f^k)\|_{L^2(Q)}^2}{\|\nabla J_\gamma(f^{k-1})\|_{L^2(Q)}^2},$$

và

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq 0} J_\gamma(f^k + \alpha d_k).$$

Để tính α_k ta ký hiệu $u(u_0, \varphi)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x, t)u = g(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t)u(x, t) = \varphi(x, t), & (x, t) \in S, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

và $u[f]$ là nghiệm của bài toán tuyến tính

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x,t)u = f(x,t)h(x,t), & (x,t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)u(x,t) = 0, & (x,t) \in S, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Khi đó toán tử quan sát có dạng $l_i u(f) = l_i u[f] + l_i u(u_0, \varphi) = A_i f + l_i u(u_0, \varphi)$ với A_i là các toán tử tuyến tính liên tục từ $L^2(Q)$ vào $L^2(0, T)$, $i = 1, \dots, N$.

Ta có

$$\begin{aligned} J_\gamma(f^k + \alpha d_k) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|l_i u(f^k + \alpha d_k) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f^k + \alpha d_k - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|\alpha A_i d_k + A_i f^k + l_i u(u_0, \varphi) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\alpha d_k + f^k - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \|\alpha A_i d_k + l_i u(f) - h_i\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\alpha d_k + f^k - f^*\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Đạo hàm $J_\gamma(f^k + \alpha d_k)$ theo biến α có dạng

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(f^k + \alpha d_k)}{\partial \alpha} &= \gamma \sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \sum_{i=1}^N \langle A_i d_k, l_i u(f^k) - h_i \rangle_{L^2(0,T)} \\ &\quad + \gamma \alpha \|d_k\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \langle d_k, f^k - f^* \rangle_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Cho $\frac{\partial J_\gamma(f^k + \alpha d_k)}{\partial \alpha} = 0$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \alpha_k &= - \frac{\sum_{i=1}^N \langle A_i d_k, l_i u(f^k) - h_i \rangle_{L^2(0,T)} + \gamma \langle d_k, f^k - f^* \rangle_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2} \\ &= - \frac{\sum_{i=1}^N \langle d_k, (A_i)^* (l_i u(f^k) - h_i) \rangle_{L^2(0,T)} + \gamma \langle d_k, f^k - f^* \rangle_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2} \\ &= - \frac{\sum_{i=1}^N \langle d_k, (A_i)^* (l_i u(f^k) - h_i) + \gamma (f^k - f^*) \rangle_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2} \\ &= - \frac{\langle d_k, \nabla J_\gamma(f^k) \rangle_{L^2(Q)}}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2}. \end{aligned}$$

Vì $d_k = -\nabla_\gamma(f^k) + \beta_k d_{k-1}$, $r_k = -\nabla J_\gamma(f^k)$ và $\langle r_k, d_{k-1} \rangle_{L^2(Q)} = 0$, nên ta có

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|_{L^2(Q)}^2}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2}.$$

Vậy thuật toán gradient liên hợp có dạng

Bước 1: Cho $k = 0$, chọn xấp xỉ ban đầu f^0 .

Bước 2: Tính $r_0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$, đặt $d_0 = r_0$.

Bước 3: Tính

$$\alpha_0 = \frac{\|r_0\|_{L^2(Q)}^2}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_0\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_0\|_{L^2(Q)}^2}.$$

Đặt $f^1 = f^0 + \alpha_0 d_0$.

Bước 4: Cho $k = 1, 2, \dots$. Tính

$$r_k = -\nabla J_\gamma(f^k), \quad d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$$

với

$$\beta_k = \frac{\|r_k\|_{L^2(Q)}^2}{\|r_{k-1}\|_{L^2(Q)}^2}.$$

Bước 5: Tính

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|_{L^2(Q)}^2}{\sum_{i=1}^N \|A_i d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(Q)}^2}.$$

Cập nhật

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d_k.$$

Quá trình lặp ở trên được viết cho bài toán liên tục. Để tìm cực tiểu của phiếm hàm $J_\gamma(F)$, chúng tôi tiến hành rời rạc bài toán thuận (2.7)–(2.9), rời rạc phiếm hàm $J_\gamma(F)$, sau đó xây dựng bài toán liên hợp tương ứng để tính đạo hàm cho phiếm hàm rời rạc này. Trong mục tiếp theo chúng tôi sẽ rời rạc bài toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn, sau đó chứng minh tính hội tụ của phương pháp cũng như đưa ra các ví dụ bằng số để khẳng định rằng, phương pháp của chúng tôi là hữu hiệu. Trong Mục 2.3., chúng tôi xét bài toán xác định $f(t)$ và chúng tôi rời rạc bài toán bằng phương pháp sai phân phân rã. Chúng tôi nhấn mạnh rằng, đây là lần đầu tiên bài toán xác định $f(t)$ cho trường hợp

hiều chiều được nghiên cứu. Ngoài ra, đây cũng là lần đầu tiên, bài toán xác định nguồn được thử nghiệm bằng số cho các bài toán với hệ số phụ thuộc thời gian.

2.2. Phương pháp phần tử hữu hạn

Trước hết, chúng tôi viết lại toán tử quan sát dưới dạng

$$l_k u(f) = l_k u[f] + l_k u(u_0, \varphi) = A_k f + l_k u(u_0, \varphi),$$

trong đó $A_k : L^2(Q) \rightarrow L^2(0, T)$ là các toán tử tuyến tính bị chặn, $k = 1, \dots, N$. Khi đó, phiếm hàm $J_\gamma(f)$ có dạng

$$\begin{aligned} J_\gamma(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \|l_k u[f] + l_k u(u_0, \varphi) - h_k\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \|A_k f + l_k u(u_0, \varphi) - h_k\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \|A_k f - \hat{h}_k\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Nghiệm f^γ của bài toán cực tiểu hóa (2.15) được biểu diễn bởi điều kiện tối ưu bậc nhất như sau

$$\sum_{k=1}^N A_k^* (A_k f^\gamma - \hat{h}_k) + \gamma (f^\gamma - f^*) = 0. \quad (2.20)$$

Ở đây, $A_k^* : L^2(0, T) \rightarrow L^2(Q)$ là toán tử liên hợp của A_k được xác định bởi $A_k^* q = p_k$, trong đó p_k là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_k}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial p_k}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right) + b(x, t) p_k = \omega_k(x) q(t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p_k}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t) p_k = 0, & (x, t) \in S, \\ p_k(x, T) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Chú ý rằng, ở đây chúng tôi chia bài toán liên hợp (2.16) thành N bài toán độc lập (2.21). Theo nguyên lý chồng chất tuyến tính, liên hợp p có dạng $\sum_{k=1}^N p_k$.

Chúng tôi sẽ xấp xỉ phương trình (2.20) bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Thực tế, chúng tôi sẽ xấp xỉ A_k và A_k^* .

2.2.1. Xấp xỉ phần tử hữu hạn của $A_k, A_k^*, k = 1, \dots, N$

Chúng tôi sẽ trình bày xấp xỉ rời rạc đầy đủ FE cho bài toán biến phân ở trên. Giả sử rằng Ω là một miền đa diện, chúng tôi chia Ω thành các tam giác tựa đều \mathcal{T}_h và xác định không gian các phần tử hữu hạn tuyến tính từng khúc $V_h \subset H^1(\Omega)$ như sau

$$V_h = \{v_h : v_h \in C(\overline{\Omega}), v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.22)$$

Ở đây, $P_1(K)$ là không gian các đa thức tuyến tính trong phần tử K . Chúng tôi chia $[0, T]$ bởi các điểm chia

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M, \text{ trong đó } t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M \text{ với cỡ lưới } \tau = T/M.$$

Đặt

$$a^n(v, w) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^n(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} b^n(x) v(x) w(x) dx + \int_{\Gamma} \sigma^n(\xi) v(\xi) w(\xi) d\xi,$$

với $v, w \in H^1(\Omega)$ và với mỗi hàm $\phi(x, t)$, ta xác định $\phi^n(x) := \phi(x, t_n)$. Khi đó, $a^n(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính bị chặn và $H^1(\Omega)$ -elliptic, tức là,

$$a^n(v, v) \geq C_1^a \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Tiếp theo, chúng ta xác định hệ xấp xỉ rời rạc đầy đủ FE của bài toán biến phân (2.12) bằng phương pháp Euler-Galerkin lùi như sau: Tìm $u_h^n \in V_h$ với $n = 1, 2, \dots, M$ thỏa mãn

$$\langle d_t u_h^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(u_h^n, \chi) = \langle F^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \varphi^n, \chi \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \chi \in V_h \quad (2.23)$$

và

$$\langle u_h^0, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_0, \chi \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \chi \in V_h, \quad (2.24)$$

trong đó $d_t u_h^n := \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$, $n = 1, 2, \dots, M$.

Bài toán biên phân rời rạc (2.23) chứa một nghiệm duy nhất $u_h^n \in V_h$. Đặt $u_h(x, t)$ là nội suy tuyến tính của u_h^n theo biến t . Do đó, bài toán rời rạc của bài toán điều khiển tối ưu (2.15) được viết dưới dạng

$$J_{\gamma, h}(f) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \|A_{k, h} f - \widehat{h}_{k, h}\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|f - f^*\|_{L^2(Q)}^2 \rightarrow \min. \quad (2.25)$$

Ở đây, quan sát tính toán $l_k u_h(f) = l_k u_h[f] + l_k u_h(u_0, \varphi) = A_{k, h} f + l_k u_h(u_0, \varphi)$ và $\widehat{h}_{k, h} = l_k u_h(u_0, \varphi) - h_k$. Nghiệm của bài toán tối ưu (2.25) được mô tả bởi đẳng thức biến phân

$$\sum_{k=1}^N A_{k, h}^* (A_{k, h} f - \widehat{h}_{k, h}) + \gamma(f - f^*) = 0, \quad (2.26)$$

với $A_{k, h}^*$ là toán tử đối ngẫu của toán tử tuyến tính $A_{k, h}$, $k = 1, \dots, N$.

Với xấp xỉ FE của bài toán (2.21) ta xác định một xấp xỉ $\widehat{A}_{k, h}^* q = p_{k, h}$ của $A_{k, h}^* q$. Hơn nữa, thay cho quan sát h_k ta chỉ dùng $h_k^{\delta_k}$ thỏa mãn

$$\|h_k^{\delta_k} - h_k\|_{L^2(0, T)} \leq \delta_k \quad \text{for } k = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

Khi đó, ta có bài toán biến phân sau

$$\sum_{k=1}^N \widehat{A}_{k, h}^* (A_{k, h} f_h^\gamma - \widehat{h}_{k, h}^{\delta_k}) + \gamma(f_h^\gamma - f^*) = 0, \quad (2.28)$$

trong đó $\widehat{h}_{k, h}^{\delta_k} = l_k u_h(u_0, \varphi) - h_k^{\delta_k}$, $k = 1, \dots, N$.

2.2.2. Sự hội tụ

Cho

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sum_{i, j=1}^d a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} b(x, t) u(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma} \sigma(\xi, t) u(\xi, t) v(\xi) d\xi,$$

với $u \in W(0, T)$, $v \in H^1(\Omega)$.

Ta định nghĩa nghiệm yếu $u(x, t) \in W(0, T)$ của bài toán (2.7)-(2.9) thỏa mãn đẳng thức biến phân

$$\langle u_t, v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u, v) = \langle F, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \varphi, v \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), t \in (0, T), \quad (2.29)$$

và

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.30)$$

Với $\phi \in H^1(\Omega)$ ta định nghĩa phép chiếu elliptic $R_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h$ như là nghiệm duy nhất của bài toán biến phân

$$a(R_h\phi, v_h) = a(\phi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.31)$$

Ở đây ta có đánh giá sai số (xem [91]),

$$\|\phi - R_h\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|\phi\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in H^2(\Omega). \quad (2.32)$$

Bổ đề 2.1 Cho u là nghiệm duy nhất của bài toán biến phân (2.29)-(2.30) và $u_h^n \in V_h$ với $n = 1, 2, \dots, M$ là nghiệm của (2.23)-(2.24). Khi đó, ta có đánh giá

$$\|u_h - R_h u\|_{\ell^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C (h^2 \|u_t\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \Delta t \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + h^2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}), \quad (2.33)$$

với

$$\|w\|_{\ell^2(0,T;H^1(\Omega))} := \left(\Delta t \sum_{n=1}^M \|w^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Chứng minh. Ta viết lại sai số như tổng của hai thành phần (xem [91]),

$$u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) =: \theta + \rho.$$

Trong công thức biến phân (2.29) với $v = \chi \in V_h \subset H^1(\Omega)$, $t = t_n$ từ bài toán biến phân Galerkin (2.23) ta có

$$\langle u_t^n - d_t u_h^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(u^n - u_h^n, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in V_h,$$

hoặc

$$\langle u_t^n - d_t u_h^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(R_h u^n - u_h^n, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in V_h. \quad (2.34)$$

Ta chú ý rằng

$$\begin{aligned} \langle d_t \theta^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(\theta^n, \chi) &= \langle d_t u_h^n - d_t R_h u^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(u_h^n - R_h u^n, \chi) \\ &= \langle u_t^n - d_t R_h u^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle u_t^n - d_t u^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle d_t u^n - d_t R_h u^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle u_t^n - d_t u^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle d_t \rho^n, \chi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \chi \in V_h. \end{aligned}$$

Đặt $\chi = \theta^n \in V_h$ ta suy ra

$$\langle d_t \theta^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(\theta^n, \theta^n) = \langle u_t^n - d_t u^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle d_t \rho^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (2.35)$$

Với vế phải của (2.35) ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \langle u_t^n - d_t u^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} &= (\Delta t)^{-1} \langle \Delta t u_t^n - (u^n - u^{n-1}), \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\Delta t)^{-1} \|\Delta t u_t^n - (u^n - u^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= (\Delta t)^{-1} \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\tau - t_{n-1}) u_{tt}(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\Delta t)^{-1} \sqrt{\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\tau - t_{n-1})^2 d\tau} \sqrt{\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\Delta t)^{1/2} \|u_{tt}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} -\langle d_t \rho^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle d_t u^n - R_h d_t u^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|d_t u^n - R_h d_t u^n\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C h^2 \|d_t u^n\|_{H^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C h^2 (\Delta t)^{-1} \|u(\cdot, t_n) - u(\cdot, t_{n-1})\|_{H^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C h^2 (\Delta t)^{-1} \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} u_t(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{H^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C h^2 (\Delta t)^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t(\cdot, \tau)\|_{H^2(\Omega)} d\tau \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C h^2 (\Delta t)^{-1/2} \|u_t\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Vế trái của (2.35) có thể đánh giá như sau

$$\begin{aligned} \langle d_t \theta^n, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} + a^n(\theta^n, \theta^n) &= \frac{1}{\Delta t} \left[\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \theta^{n-1}, \theta^n \rangle_{L^2(\Omega)} \right] + a^n(\theta^n, \theta^n) \\ &\geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + C_1^a \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Lấy tổng tương ứng hai vế ta nhận được với $n = 1, 2, \dots, M$, ta được

$$\begin{aligned}
& \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_1^a \Delta t \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{2}{\sqrt{3}} (\Delta t)^{3/2} \|u_{tt}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + 2C h^2 (\Delta t)^{1/2} \|u_t\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Young ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \|\theta^M\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\theta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_1^a \sum_{n=1}^M \Delta t \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^M (\Delta t)^{3/2} \|u_{tt}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + 2C \sum_{n=1}^M h^2 (\Delta t)^{1/2} \|u_t\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq C(\delta) (\Delta t)^2 \sum_{n=1}^M \|u_{tt}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2 + \delta \sum_{n=1}^M \Delta t \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C(\delta) h^4 \sum_{n=1}^M \|u_t\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))}^2 + \delta \sum_{n=1}^M \Delta t \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^M \Delta t \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq C(\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + C h^4 \|u_t\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \|\theta^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C(\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + C h^4 \|u_t\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))}^2 + C h^4 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Bỏ đề được chứng minh. \square

Bổ đề 2.2 Cho $u_h(x, t)$ và $(R_h u)(x, t)$ tương ứng là phép nội suy tuyến tính của u_h^n và $R_h u^n$ đối với biến t . Khi đó ta có đánh giá sai số như sau

$$\|u_h - R_h u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t). \quad (2.36)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có, với $x \in \Omega$, $t \in (t_{n-1}, t_n)$, $n = 1, 2, \dots, M$

$$\begin{aligned}
u_h(x, t) & = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} u_h^n(x) + \frac{t_n - t}{\Delta t} u_h^{n-1}(x), \\
(R_h u)(x, t) & = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} R_h u^n(x) + \frac{t_n - t}{\Delta t} R_h u^{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_h - R_h u\|_{H^1(\Omega)}^2 dt &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} \theta^n + \frac{t_n - t}{\Delta t} \theta^{n-1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} \right)^2 dt \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{t_n - t}{\Delta t} \right)^2 dt \|\theta^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2, \\ &= \frac{2}{3} \Delta t \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{3} \Delta t \|\theta^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

trong đó $\theta^n := u_h^n - R_h u^n$. Do đó, ta có

$$\int_0^T \|u_h - R_h u\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{4}{3} \sum_{n=1}^M \Delta t \|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{3} \Delta t \|\theta^0\|_{H^1(\Omega)}^2 = \mathcal{O}(h^4 + (\Delta t)^2).$$

Bổ đề được chứng minh. \square

Hơn nữa, theo xấp xỉ chuẩn ta có

$$\|R_h u - u\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + (\Delta t)^2). \quad (2.37)$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta thu được

$$\|u_h - u\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t).$$

Khi đó, ta có thể đánh giá quan sát đo đạc như sau

$$\begin{aligned} \|l_k u_h(f) - l_k u(f)\|_{L^2(0,T)}^2 &= \int_0^T [l_k u_h(f) - l_k u(f)]^2 dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} \omega_k(x) [u_h(x,t) - u(x,t)] dx \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} \omega_k^2(x) dx \int_{\Omega} [u_h(x,t) - u(x,t)]^2 dx \right) dt \\ &= \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u_h - u\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned}$$

hoặc

$$\|l_k u_h(f) - l_k u(f)\|_{L^2(0,T)} \leq \|\omega_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_h - u\|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + \Delta t).$$

Vì vậy ta có thể kết luận về các kết quả hội tụ như sau

$$\|(A_{k,h} - A_k)f\|_{L^2(0,T)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t) \quad \text{và} \quad \|(\widehat{A}_{k,h}^* - A_k^*)q\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t), \quad (2.38)$$

với mọi $f \in L^2(Q)$, $q \in L^2(0, T)$. Bằng kỹ thuật như trong chứng minh của [37] ta có thể chứng minh rằng với $\gamma > 0$ ta có

$$\|f_h^\gamma - f^\gamma\|_{L^2(Q)} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t + \delta), \quad \delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_N^2}. \quad (2.39)$$

2.2.3. Ví dụ số

Trong các ví dụ số, chúng tôi chọn miền $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $T = 1$ và

$$a_{ij}(x, t) = \delta_{ij}, \quad b(x, t) = 1, \quad \sigma(x, t) = 1.$$

Nghiệm chính xác được xác định bởi $u(x, t) = e^t(x_1 - x_1^2) \sin \pi x_2$.

Chúng tôi thử nghiệm với một vài hàm F có cấu trúc khác nhau, cụ thể,

- Ví dụ 1: $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$,
- Ví dụ 2: $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$,
- Ví dụ 3: $F(x, t) = f(x, t) + g(x, t)$,

với quan sát tích phân (2.11) hoặc quan sát điểm.

Bằng phương pháp Euler Galerkin lùi, chúng tôi miền Ω thành 4096 phần tử hữu hạn và bước lưới thời gian $\tau = T/M = 1/M$ với $M = 64$.

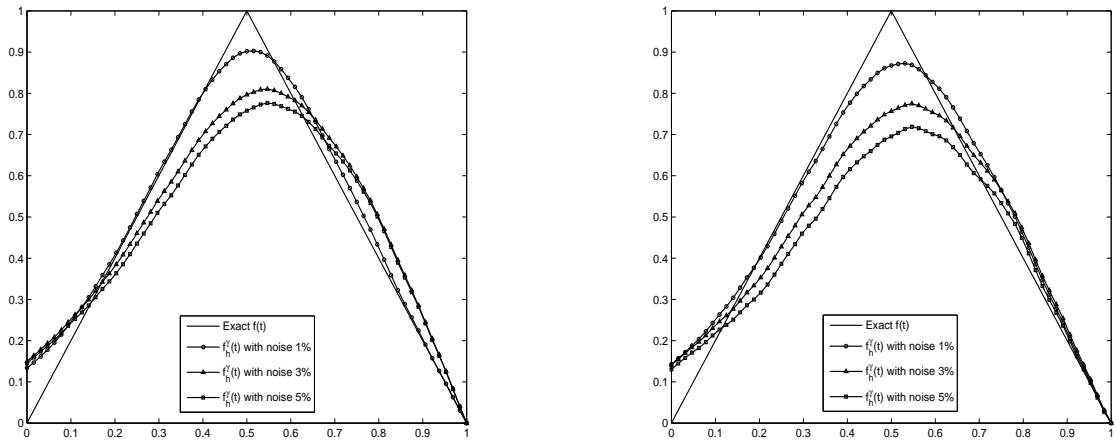
Trong ví dụ đầu tiên, chúng tôi sử dụng 1 quan sát $N = 1$: quan sát tích phân với $\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1$, hoặc quan sát điểm tại điểm $x_0 = (0.48; 0.48)$. Chúng tôi chọn hàm $h(x, t) = x_1 x_2 + t + 1$, dự đoán ban đầu $f^* = 0$, $\gamma = 10^{-5}$. Thay vào phương trình ta có dữ kiện hàm $g(x, t)$.

Chúng tôi thiết lập lại hàm $f(t)$ có dạng

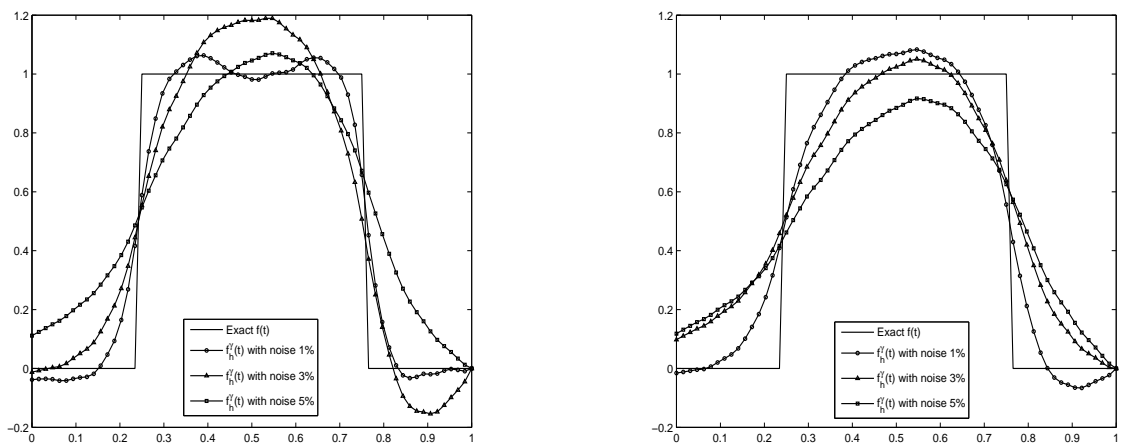
$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 0.5, \\ 2(1-t) & \text{nếu } 0.5 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \text{Ví dụ 1.1} \quad (2.40)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0.25 \leq t \leq 0.75, \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases} \quad \text{Ví dụ 1.2} \quad (2.41)$$

với nhiều quan sát là $\delta = 1\%$, 3% , 5% .



Hình 2.1: Nghiệm chính xác và nghiệm giải số của Ví dụ 1.1: quan sát tích phân (bên trái) và quan sát điểm (bên phải).



Hình 2.2: Nghiệm chính xác và nghiệm giải số của Ví dụ 1.2: quan sát tích phân (bên trái) và quan sát điểm (bên phải).

Trong Ví dụ 2, chúng tôi thiết lập lại hàm

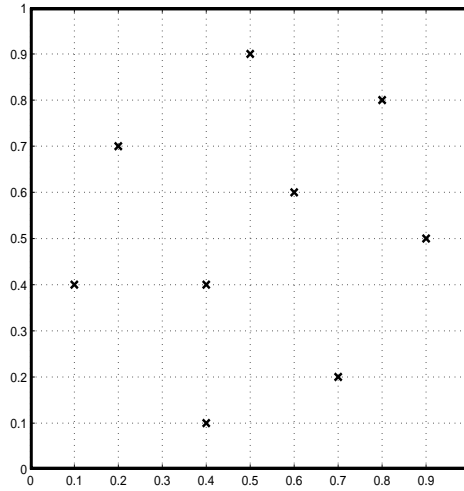
$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 \quad \text{Ví dụ 2.1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = (0.5; 0.5), \\ 0 & \text{với } x \in \{(0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0)\}, \\ \text{tuyến tính ngược lại,} & \end{cases} \quad \text{Ví dụ 2.2,}$$

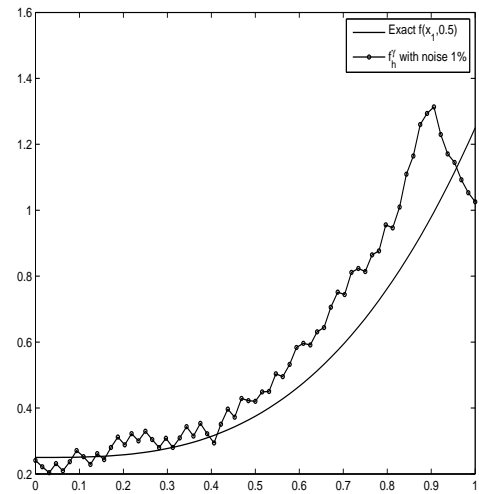
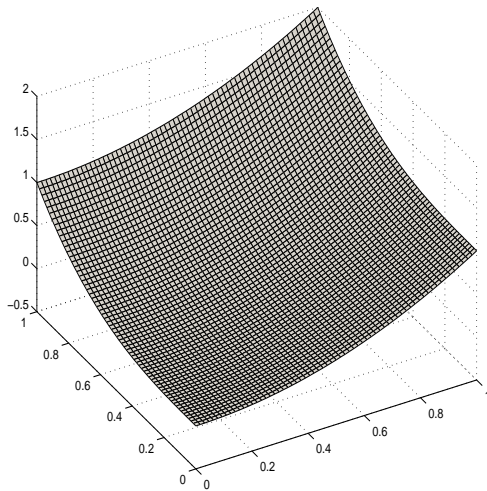
trong đó số điểm quan sát $N = 9$ và các điểm quan sát được trình bày trong Hình 2.3, ở đây

$$h(x, t) = t^2 + 2, \quad \gamma = 10^{-5}, \quad \delta = 1\%.$$

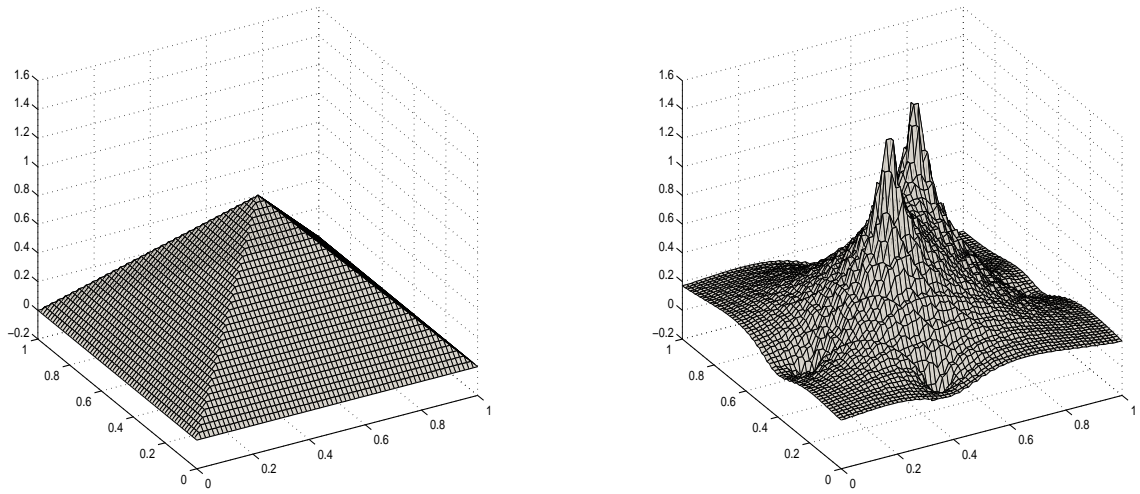
Các kết quả số được trình bày từ Hình 2.4 đến Hình 2.6



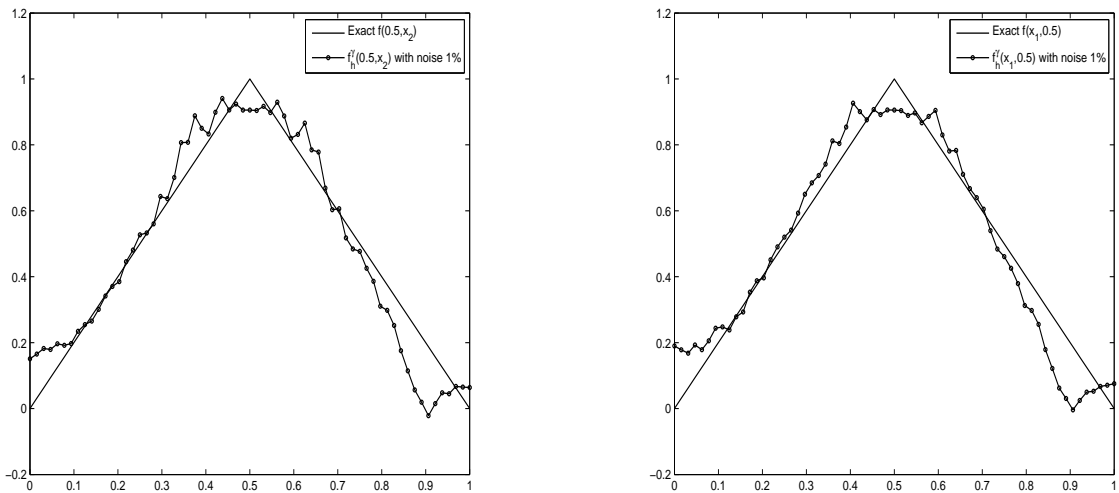
Hình 2.3: Điểm quan sát.



Hình 2.4: Nghiệm chính xác $f(0.5, x_2)$, $f(x_1, 0.5)$ và nghiệm giải số trong Ví dụ 2.1 với nhiễu 1%.



Hình 2.5: Nghiệm chính xác $f(x)$ và nghiệm giải số trong Ví dụ 2.2 với nhiễu 1%.

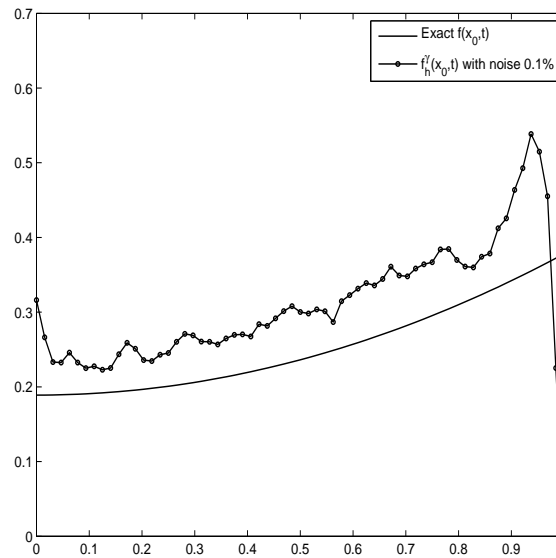


Hình 2.6: Nghiệm chính xác $f(0.5, x_2)$, $f(x_1, 0.5)$ và nghiệm giải số trong Ví dụ 2.2 với nhiễu 1%.

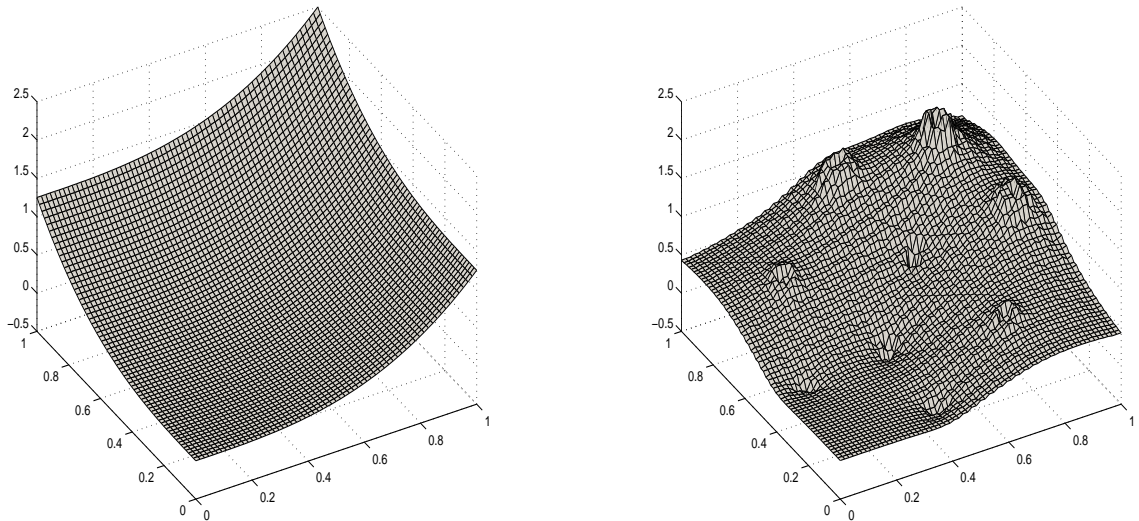
Trong ví dụ thứ 3, chúng tôi thiết lập hàm

$$f(x, t) = (x_1^3 + x_2^3)(t^2 + 1), \quad \text{Ví dụ 3.1,} \quad (2.42)$$

từ đo đạc tại 9 điểm như ở trên. Kết quả số được trình bày trong Hình 2.7 và Hình 2.8.



Hình 2.7: Nghiệm chính xác $f(x_0, t)$, $x_0 = (0.5; 0.4)$ và nghiệm giải số trong Ví dụ 3.1 với nhiễu 0.1%.



Hình 2.8: Nghiệm chính xác $f(x, 0.5)$ và nghiệm giải số trong Ví dụ 3.1 với nhiễu 0.1%.

2.3. Rời rạc hóa bài toán xác định thành phần chỉ phụ thuộc thời gian trong vế phải

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán xác định hàm $f(t)$ trong hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x, t)u = f(t)\varphi(x, t) + g(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in S, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.43)$$

từ quan sát bổ sung

$$lu(f) = \int_{\Omega} \omega(x)u(x, t)dx = h(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.44)$$

Trong đó, các hàm $a_i, i = \overline{1, n}, b, \varphi$ thuộc không gian $L^\infty(Q)$ và $g \in L^2(Q), f(t) \in L^2(0, T), u_0 \in L^2(\Omega)$. Hơn nữa, ta giả thiết rằng $a_i \geq \underline{a} > 0$ và $\varphi \geq \underline{\varphi} > 0$ với $\underline{a}, \underline{\varphi}$ là các hằng số cho trước. Hàm ω là hàm trọng như đã được mô tả từ đầu chương.

Như ta đã biết, tính giải được của bài toán ngược (2.43) với quan sát điểm $u(x_0, t) = h(t), t \in (0, T)$ đã được Prilepko và Solov'ev chứng minh bằng phương pháp Rothé [71], [72]. Tính giải được của bài toán ngược (2.43) với quan sát (2.44) được chứng minh trong [66]. Tuy nhiên, kết quả số cho các bài toán đó chưa được nghiên cứu nhiều. Vì vậy, mục đích của chúng tôi trong mục này là thiết lập phương pháp số ổn định để giải bài toán.

Trong phần đầu của mục này, chúng tôi sẽ giới thiệu lược đồ sai phân hữu hạn phân rã (finite difference splitting method) cho bài toán nhiều chiều; trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ rời rạc bài toán biến phân, đưa ra công thức gradient cho phiếm hàm rời rạc và mô tả phương pháp gradient liên hợp, và cuối cùng, chúng tôi trình bày kết quả số minh họa cho thuật toán này. Chúng tôi muốn nhấn mạnh thêm rằng, việc sử dụng phương pháp sai phân phân rã đã đưa bài toán nhiều chiều về bài toán một chiều, do đó việc tính toán số được thực hiện nhanh hơn.

2.3.1. Rời rạc hóa bài toán thuận bằng phương pháp sai phân hữu hạn phân rã

Giả sử rằng $\Omega := (0, L_1) \times (0, L_2) \times \cdots \times (0, L_n)$ trong không gian \mathbb{R}^n , với $L_i, i = \overline{1, n}$ là các hằng số dương cho trước. Áp dụng kỹ thuật của các tác giả trong [61], [62], [100] (xem [38], [90]), chúng tôi chia Ω thành các miền nhỏ bởi

các hình chữ nhật đều nhau xác định bởi

$$0 = x^0 < x_i^1 = h_i < \cdots < x_i^{N_i} = L_i, \quad i = 1, \dots, n$$

với $h_i = L_i/N_i$ là cỡ lưới theo hướng x_i , $i = 1, \dots, n$. Để đơn giản hóa, ta kí hiệu $x^k := (x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n})$, với $k := (k_1, \dots, k_n)$, $0 \leq k_i \leq N_i$. Kí hiệu $h := (h_1, \dots, h_n)$ là vectơ cỡ lưới không gian và $\Delta h := h_1 \cdots h_n$. Đặt e_i là vectơ đơn vị theo hướng x_i , $i = 1, \dots, n$, tức là $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Kí hiệu

$$\omega(k) = \{x \in \Omega : (k_i - 0.5)h \leq x_i \leq (k_i + 0.5)h, \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Trong phần tiếp theo, kí hiệu Ω_h là tập các chỉ số của các điểm lưới tương ứng thuộc miền trong của Ω . Chúng tôi cũng kí hiệu tập các chỉ số của các điểm lưới thuộc Ω_h là $\bar{\Omega}_h$ là

$$\Omega_h = \{k = (k_1, \dots, k_n) : 1 \leq k_i \leq N_i - 1, \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

$$\bar{\Omega}_h = \{k = (k_1, \dots, k_n) : 0 \leq k_i \leq N_i, \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Kí hiệu

$$\Omega_h^i = \{k = (k_1, \dots, k_n) : 0 \leq k_i \leq N_i - 1, 0 \leq k_j \leq N_j, \forall j \neq i\},$$

với $i = 1, \dots, n$. Với hàm $u(x, t)$ xác định trên miền Q , ta kí hiệu $u^k(t)$ là giá trị xấp xỉ của hàm u tại điểm (x^k, t) . Lược đồ sai phân tiến tại điểm x_i được xác định như sau

$$u_{x_i}^k := \frac{u^{k+e_i} - u^k}{h_i}.$$

Nghiệm của bài toán (2.43) được hiểu là hàm số $u \in W(0, T; H_0^1(\Omega))$ thỏa mãn đẳng thức

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_t, \eta)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_Q \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + b(x, t) u \eta \right) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left(f(t) \varphi(x, t) \eta + g(x, t) \eta \right) dx dt, \quad \forall \eta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (2.45)$$

và

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Các tích phân trong công thức (2.45) được xấp xỉ như sau

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t} \eta dx dt &\approx \Delta h \int_0^T \sum_{k \in \Omega_h} \frac{du^k(t)}{dt} \eta^k(t) dt, \\
\int_{Q_T} a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx dt &\approx \Delta h \int_0^T \sum_{k \in \Omega_h^i} a_i^{k+\frac{e_i}{2}}(t) u_{x_i}^k(t) \eta_{x_i}^k(t) dt, \\
\int_{Q_T} b(x, t) u \eta dx dt &\approx \Delta h \int_0^T \sum_{k \in \Omega_h} b^k(t) u^k(t) \eta^k(t) dt, \\
\int_{Q_T} f(t) \varphi(x, t) \eta dx dt &\approx \Delta h \int_0^T \sum_{k \in \Omega_h} f(t) \varphi^k(t) \eta^k(t) dt, \\
\int_{Q_T} g(x, t) \eta dx dt &\approx \Delta h \int_0^T \sum_{k \in \Omega_h} g^k(t) \eta^k(t) dt.
\end{aligned}$$

Ở đây, các hàm $\varphi^k(t)$, $g^k(t)$ và $a_i^{k+\frac{e_i}{2}}(t)$ là xấp xỉ của các hàm $\varphi(x, t)$, $g(x, t)$ và $a(x, t)$ tại điểm lưới x^k . Ta quy ước như sau nếu các hàm $\varphi(x, t)$, $g(x, t)$ liên tục thì $\varphi^k(t)$, $g^k(t)$ là giá trị của các hàm đó tại điểm x^k và nếu $a_i(x, t)$ là các hàm liên tục thì $a_i^{k+\frac{e_i}{2}}(t) := a_i(x^{k+\frac{h_i e_i}{2}}, t)$. Ngược lại, ta đặt

$$\varphi^k := \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} \varphi(x, t) dx, \quad g^k := \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} g(x, t) dx,$$

và

$$a_i^{k+\frac{e_i}{2}} := \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} a(x, t) dx.$$

Với các tích phân được xấp xỉ như trên, ta có bài toán rời rạc cho công thức nghiệm yếu (2.45)

$$\int_0^T \left[\sum_{k \in \Omega_h} \left(\frac{du^k}{dt} + b^k u^k - f \varphi^k - g^k \right) \eta^k + \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \Omega_h^i} a_i^{k+\frac{e_i}{2}} u_{x_i}^k \eta_{x_i}^k \right] dt = 0. \quad (2.46)$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần và điều kiện biên thuần nhất $u^k = 0$, $\eta^k = 0$ với $k_i = 0$, ta nhận được

$$\sum_{k \in \Omega_h^i} a_i^{k+\frac{e_i}{2}} u_{x_i}^k \eta_{x_i}^k = \sum_{k \in \Omega_h} \left(a_i^{k-\frac{e_i}{2}} \frac{u^k - u^{k-e_i}}{h_i^2} - a_i^{k+\frac{e_i}{2}} \frac{u^{k+e_i} - u^k}{h_i^2} \right) \eta^k.$$

Thay vào phương trình (2.46), ta thu được hệ xấp xỉ bài toán ban đầu (2.43)

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} + (\Lambda_1 + \dots + \Lambda_n)\bar{u} - f = 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \end{cases} \quad (2.47)$$

với $\bar{u} = \{u^k, k \in \Omega_h\}$ là hàm lưới. Hàm \bar{u}_0 là hàm lưới xấp xỉ điều kiện ban đầu $u_0(x)$ và được tính bằng công thức

$$\bar{u}_0^k = \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} u_0(x) dx.$$

Các ma trận hệ số Λ_i trong hệ (2.47) được xác định như sau

$$(\Lambda_i \bar{u})^k = \frac{b^k u^k}{n} + \begin{cases} \frac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} (u^k - u^{k-e_i}) - \frac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} (u^{k+e_i} - u^k), & 2 \leq k \leq N-2, \\ \frac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} u^k - \frac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} (u^{k+e_i} - u^k), & k = 1, \\ \frac{a_i^{k-\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} (u^k - u^{k-e_i}) + \frac{a_i^{k+\frac{e_i}{2}}}{h_i^2} u^k, & k = N-1, \end{cases} \quad (2.48)$$

với $k \in \Omega_h$. Hơn nữa,

$$f = \{f\varphi^k + g^k, k \in \Omega_h\}.$$

Ta thấy, ma trận hệ số Λ_i là nửa xác định dương (xem [90]). Để có lược đồ sai phân phân rã cho bài toán Cauchy (2.47), chúng tôi rời rạc bài toán theo biến thời gian. Chia khoảng thời gian $[0, T]$ thành M khoảng nhỏ.

$$0 = t_0 < t_1 = \Delta t < \dots < T_M = T,$$

với $\Delta t = T/M$. Ta kí hiệu $u^{m+\delta} := \bar{u}(t_m + \delta\Delta t)$, $\Lambda_i^m := \Lambda_i(t_m + \Delta t/2)$. Chúng tôi giới thiệu lược đồ sai phân phân rã

$$\begin{aligned} \frac{u^{m+\frac{i}{2n}} - u^{m+\frac{i-1}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_i^m \frac{u^{m+\frac{i}{2n}} + u^{m+\frac{i-1}{2n}}}{4} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{u^{m+\frac{1}{2}} - u^{m+\frac{n-1}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_n^m \frac{u^{m+\frac{1}{2}} + u^{m+\frac{n-1}{2n}}}{4} &= \frac{F^m}{2} + \frac{\Delta t}{8} \Lambda_n^m F^m, \\ \frac{u^{m+\frac{n+1}{2n}} - u^{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \Lambda_n^m \frac{u^{m+\frac{n+1}{2n}} + u^{m+\frac{1}{2}}}{4} &= \frac{F^m}{2} - \frac{\Delta t}{8} \Lambda_n^m F^m, \\ \frac{u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} - u^{m+1-\frac{i}{2n}}}{\Delta t} + \Lambda_i^m \frac{u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} + u^{m+1-\frac{i}{2n}}}{4} &= 0, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, \\ u^0 &= \bar{u}_0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

hay

$$\begin{aligned}
(E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+\frac{i}{2n}} &= (E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+\frac{i-1}{2n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\
(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(u^{m+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}F^m) &= (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)u^{m+\frac{n-1}{2n}}, \\
(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)u^{m+\frac{n+1}{2n}} &= (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(u^{m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}F^m), \\
(E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+1-\frac{i-1}{2n}} &= (E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)u^{m+1-\frac{i}{2n}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, \\
u^0 &= \bar{u}_0,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

với E_i là ma trận đơn vị tương ứng với Λ_i , $i = 1, \dots, n$. Lược đồ sai phân (2.50) có thể viết lại thành

$$\begin{cases} u^{m+1} = A^m u^m + \Delta t B^m (f^m \varphi^m + g^m), & m = 0, \dots, M-1, \\ u^0 = \bar{u}_0, \end{cases} \tag{2.51}$$

với

$$\begin{aligned}
A^m &= A_1^m \cdots A_n^m A_n^m \cdots A_1^m, \\
B^m &= A_1^m \cdots A_n^m,
\end{aligned}$$

trong đó $A_i^m := (E_i + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)^{-1}(E_i - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_i^m)$, $i = 1, \dots, n$.

Ta có thể chứng minh lược đồ sai phân (2.49) là ổn định (xem [38, 90]) và tồn tại một hằng số dương c_d không phụ thuộc vào các hệ số a_i , $i = 1, \dots, n$ và b thỏa mãn

$$\left(\sum_{m=0}^M \sum_{k \in \Omega_{1h}} |u^{k,m}|^2 \right)^{1/2} \leq c_d \left[\left(\sum_{k \in \Omega_{1h}} |u_0^k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m=0}^M \sum_{k \in \Omega_{1h}} |f^m \varphi^{k,m} + g^{k,m}|^2 \right)^{1/2} \right]. \tag{2.52}$$

Khi Ω là miền một chiều, ta xấp xỉ hệ phương trình (2.47) bằng phương pháp Crank-Nicholson và nghiệm của bài toán rời rạc cũng có dạng (2.51).

2.3.2. Rời rạc hóa bài toán biên phân

Từ điều kiện quan sát (2.44), phiếm hàm quan sát $J_0(f)$ có dạng

$$J_0(f) = \frac{1}{2} \|lu(f) - h\|_{L^2(0,T)}^2.$$

Khi đó, phiếm hàm quan sát rời rạc $J_0^{h,\Delta t}(f)$ được viết dưới dạng

$$J_0^{h,\Delta t}(f) := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left| \Delta h \sum_{k \in \Omega_h} \omega^k u^{k,m}(f) - h^m \right|^2, \quad (2.53)$$

với $u^{k,m}(f)$ chỉ sự phụ thuộc của nghiệm u vào điều kiện f và m là chỉ số trên lưới thời gian. Ta kí hiệu $\omega^k = \omega(x^k)$ là xấp xỉ của hàm $\omega(x)$ trong miền Ω tại điểm x^k , ví dụ như

$$\omega^k = \frac{1}{|\omega(k)|} \int_{\omega(k)} \omega(x) dx.$$

Để đơn giản kí hiệu, ta viết f là hàm lưới xác định trên lưới $\{0, \Delta t, \dots, M\Delta t\}$ với chuẩn được xác định như sau $\|f\|_{L^2(0,T)} = \left(\Delta t \sum_{i=1}^M |f^i|^2 \right)^{1/2}$. Với kí hiệu này, chúng tôi rời rạc phiếm hàm $l_h(u(f))$ dưới dạng

$$l_h(u(f)) = \left(l_h^1 u(f), l_h^2 u(f), \dots, l_h^M u(f) \right),$$

với

$$l_h^m u(f) = \Delta h \sum_{k \in \Omega_{1h}} \omega^k u^{k,m}(f), \quad m = 0, 1, \dots, M.$$

Để cực tiểu hóa bài toán (2.53) bằng phương pháp gradient liên hợp, đầu tiên chúng tôi tính gradient của phiếm hàm quan sát rời rạc $J_0^{h,\Delta t}(f)$ và kết quả đó được phát biểu trong định lý sau

Định lý 2.2 Gradient $\nabla J_0^{h,\Delta t}(f)$ của phiếm hàm $J_0^{h,\Delta t}$ tại điểm f được cho bởi

$$\nabla J_0^{h,\Delta t}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \Delta t (B^m)^* \varphi^m \eta^m, \quad (2.54)$$

trong đó η là nghiệm của bài toán liên hợp

$$\begin{cases} \eta^m = (A^{m+1})^* \eta^{m+1} + \psi^{m+1}, & m = M-2, \dots, 0, \\ \eta^{M-1} = \psi^M, \\ \eta^M = 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

với

$$\psi^m = \{ \psi^{k,m} = \omega^k (\Delta h \sum_{k \in \Omega_h} \omega^k u^{k,m}(f) - h^m), \quad k \in \Omega_h \}, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (2.56)$$

Ở đây $(A^m)^*$ và $(B^m)^*$ được xác định như sau

$$\begin{aligned} (A^m)^* &= (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1} \dots (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \\ &\quad \times (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \dots (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}, \\ (B^m)^* &= (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \dots (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Cho δf là biến phân đủ nhỏ của f , ta có

$$\begin{aligned} J_0^{h,\Delta t}(f + \delta f) - J_0^{h,\Delta t}(f) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^M \left[l_h^m u(f + \delta f) - h^m \right]^2 - \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^M \left[l_h^m u(f) - h^m \right]^2 \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{k \in \Omega_h} \left(\Delta h \omega^k v^{k,m} \right)^2 + \Delta t \sum_{m=1}^M \Delta h \sum_{k \in \Omega_h} v^{k,m} \omega^k \left[l_h^m u(f) - h^m \right] \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{k \in \Omega_h} \left(\Delta h \omega^k v^{k,m} \right)^2 + \Delta t \sum_{m=1}^M \Delta h \sum_{k \in \Omega_h} v^{k,m} \psi^{k,m} \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{k \in \Omega_h} \left(\Delta h \omega^k v^{k,m} \right)^2 + \Delta t \sum_{m=1}^M \langle v^m, \psi^m \rangle, \end{aligned} \quad (2.57)$$

với $v^m = \{v^{k,m} := u^{k,m}(f + \delta f) - u^{k,m}(f)\}$.

Từ (2.51) ta có v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v^{m+1} = A^m v^m + \Delta t B^m \delta f \varphi^m, & m = 0, \dots, M-1 \\ v^0 = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Nhân vô hướng hai vế các phương trình trong hệ (2.55) với vectơ bất kì $\eta^m \in \mathbb{R}^{N_1 \times \dots \times N_n}$, lấy tổng với $m = 0, \dots, M-1$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \langle v^{m+1}, \eta^m \rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} \langle A^m v^m, \eta^m \rangle + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \langle B^m \delta f \varphi^m, \eta^m \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \langle v^m, (A^m)^* \eta^m \rangle + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \langle B^m \delta f \varphi^m, \eta^m \rangle. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ở đây, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong không gian $\mathbb{R}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n}$ và $(A^m)^*$ là ma trận liên hợp của ma trận A^m .

Nhân vô hướng hai vế phương trình đầu trong hệ (2.55) với vectơ v^{m+1} bất kì, lấy tổng với $m = 0, \dots, M-2$, ta thu được

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-2} \langle v^{m+1}, \eta^m \rangle &= \sum_{m=0}^{M-2} \langle v^{m+1}, (A^{m+1})^* \eta^{m+1} \rangle + \sum_{m=0}^{M-2} \langle v^{m+1}, \psi^{m+1} \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, (A^m)^* \eta^m \rangle + \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, \psi^m \rangle. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Nhân vô hướng hai vế phương trình thứ hai trong hệ (2.55) với vectơ v^M , ta có

$$\langle v^M, \eta^{M-1} \rangle = \langle v^M, \psi^M \rangle. \quad (2.61)$$

Từ phương trình (2.60) và (2.61), ta có

$$\sum_{m=0}^{M-2} \langle v^{m+1}, \eta^m \rangle + \langle v^M, \eta^{M-1} \rangle = \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, (A^m)^* \eta^m \rangle + \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, \psi^m \rangle + \langle v^M, \psi^M \rangle. \quad (2.62)$$

Từ phương trình (2.59), (2.62) ta suy ra

$$\langle v^0, (A^0)^* \eta^0 \rangle + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \langle B^m \delta f \varphi^m, \eta^m \rangle = \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, \psi^m \rangle + \langle v^M, \psi^M \rangle.$$

Vì $v^0 = 0$ nên

$$\Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \langle B^m \delta f \varphi^m, \eta^m \rangle = \sum_{m=1}^{M-1} \langle v^m, \psi^m \rangle + \langle v^M, \psi^M \rangle = \sum_{m=1}^M \langle v^m, \psi^m \rangle. \quad (2.63)$$

Hay nói cách khác, từ bất đẳng thức (2.52) ta có

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k \in \Omega_h} (\omega^k v^{k,m})^2 = o(\|f\|)([90]).$$

Do đó, từ phương trình (2.57) và (2.63) ta thu được

$$J_0^{h,\Delta t}(f + \delta f) - J_0^{h,\Delta t}(f) = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \langle \delta f, (B^m)^* \varphi^m \eta^m \rangle + o(\|f\|).$$

Suy ra, gradient của phiếm hàm $J_0^{h,\Delta t}$ có dạng

$$\frac{\partial J_0^{h,\Delta t}}{\partial f} = \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} (B^m)^* \varphi^m \eta^m. \quad (2.64)$$

Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 2.2 Vì ma trận $\Lambda_i, i = 1, \dots, n, m = 0, \dots, M - 1$ đối xứng nên ta có

$$(A^m)^* = (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1} \dots (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \\ \times (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \dots (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}.$$

Tương tự, ta có

$$(B^m)^* = (E_n - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)(E_n + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_n^m)^{-1} \dots (E_1 - \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)(E_1 + \frac{\Delta t}{4}\Lambda_1^m)^{-1}.$$

2.3.3. Phương pháp gradient liên hợp

Phương pháp gradient liên hợp cho phiếm hàm rời rạc (2.53) được tiến hành theo các bước sau

Bước 1. Cho trước xấp xỉ ban đầu $f^0 \in \mathbb{R}^{M+1}$ của hàm $f(t)$ và tính thặng dư $\hat{r}_0 = \left(l_h^1 u(f^0) - h^1, l_h^2 u(f^0) - h^2, \dots, l_h^M u(f^0) - h^M \right)$ bằng cách giải lược đồ phân rã (2.49) với f được thay thế bởi xấp xỉ ban đầu f^0 và đặt $k = 0$.

Bước 2. Tính gradient $r_0 = -\nabla J_\gamma(f^0)$ xác định bởi (2.54) bằng cách giải bài toán liên hợp (2.55). Sau đó, đặt $d_0 = r_0$.

Bước 3. Tính

$$\alpha_0 = \frac{\|r_0\|_{L^2(0,T)}^2}{\|l_h d_0\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_0\|_{L^2(0,T)}^2},$$

với $l_h d_0$ có thể được tính từ lược đồ sai phân phân rã (2.49) với f được thay bằng d_0 và $g(x, t) = 0, u_0 = 0$. Đặt

$$f^1 = f^0 + \alpha_0 d_0.$$

Bước 4. Với $k = 1, 2, \dots$, tính $r_k = -\nabla J_\gamma(f^k), d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$, với

$$\beta_k = \frac{\|r_k\|_{L^2(0,T)}^2}{\|r_{k-1}\|_{L^2(0,T)}^2}.$$

Bước 5. Tính α_k

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|_{L^2(0,T)}^2}{\|l_h d_k\|_{L^2(0,T)}^2 + \gamma \|d_k\|_{L^2(0,T)}^2},$$

trong đó $l_h d_k$ được tính dựa vào lược đồ sai phân phân rã (2.49) với f được thay bởi d_k và $g(x, t) = 0$, $u_0 = 0$. Đặt

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_k d_k.$$

2.3.4. Ví dụ số

Trong mục này, chúng tôi trình bày một vài ví dụ số khi miền Ω là miền một chiều và hai chiều để chỉ ra tính hữu hiệu của thuật toán. Cho $T = 1$, chúng tôi thử nghiệm thuật toán nhằm thiết lập lại các hàm sau

- Ví dụ 1: $f(t) = \sin(\pi t)$.
- Ví dụ 2: $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } t \leq 0.5, \\ 2(1-t) & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$
- Ví dụ 3: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0.25 \leq t \leq 0.75, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$

Chúng tôi xét ba trường hợp mà độ trơn của hàm $f(t)$ bị giảm dần, cụ thể, hàm $f(t)$ trong ví dụ 1 là hàm trơn, hàm $f(t)$ trong ví dụ 2 là hàm không khả vi tại $t = 0.5$ và hàm $f(t)$ trong ví dụ 3 là hàm gián đoạn.

Trong mỗi ví dụ số, chúng tôi chọn trước nghiệm chính xác u và các hàm φ , f , rồi thay vào bài toán (2.43) ta có hàm g trong vế phải. Sau khi có nghiệm chính xác u , chúng tôi tính dữ kiện quan sát lu và đặt nhiễu ngẫu nhiên lên dữ kiện đo đạc h . Cuối cùng, chúng tôi sử dụng thuật toán để thiết lập lại hàm f và so sánh nghiệm giải số với nghiệm chính xác để chỉ ra thuật toán mà chúng tôi xây dựng là hữu hiệu.

2.3.4.1. Ví dụ số trong trường hợp 1 chiều

Cho $\Omega = (0, 1)$. Chúng tôi tìm hàm $f(t)$ từ bài toán

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t)\varphi(x, t) + g(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Trong trường hợp này, chúng tôi chọn nghiệm chính xác

$$u = \sin(\pi x)(1 - t),$$

và điều kiện ban đầu $u_0(x) = \sin(\pi x)$, hàm $\varphi(x, t) = (x^2 + 5)(t^2 + 5)$. Sau khi chọn một trong các hàm $f(t)$ như ở trên, thay vào bài toán ta sẽ có hàm $g(x, t)$.

Chúng tôi sử dụng quan sát tích phân (2.44) với hai hàm trọng được cho bởi

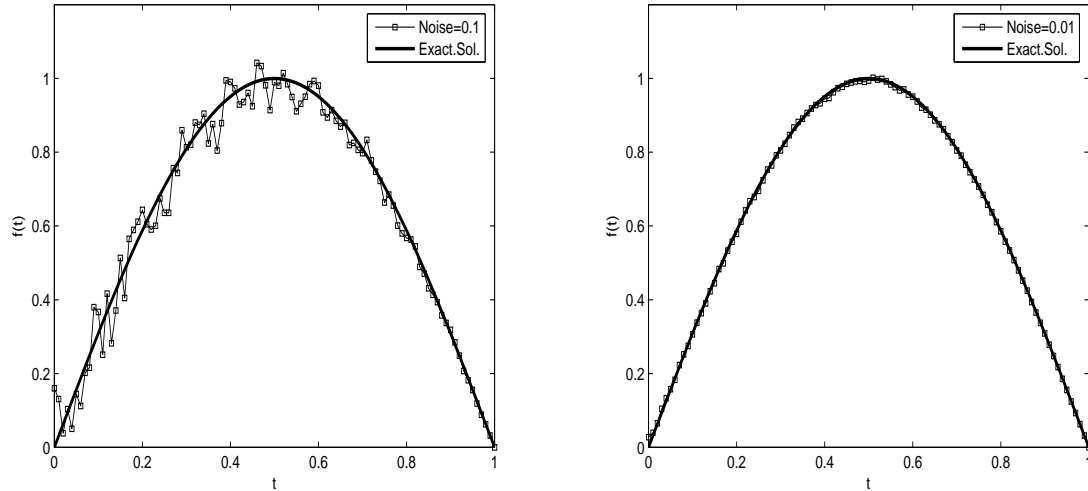
$$\omega(x) = x^2 + 1, \quad (2.65)$$

hoặc

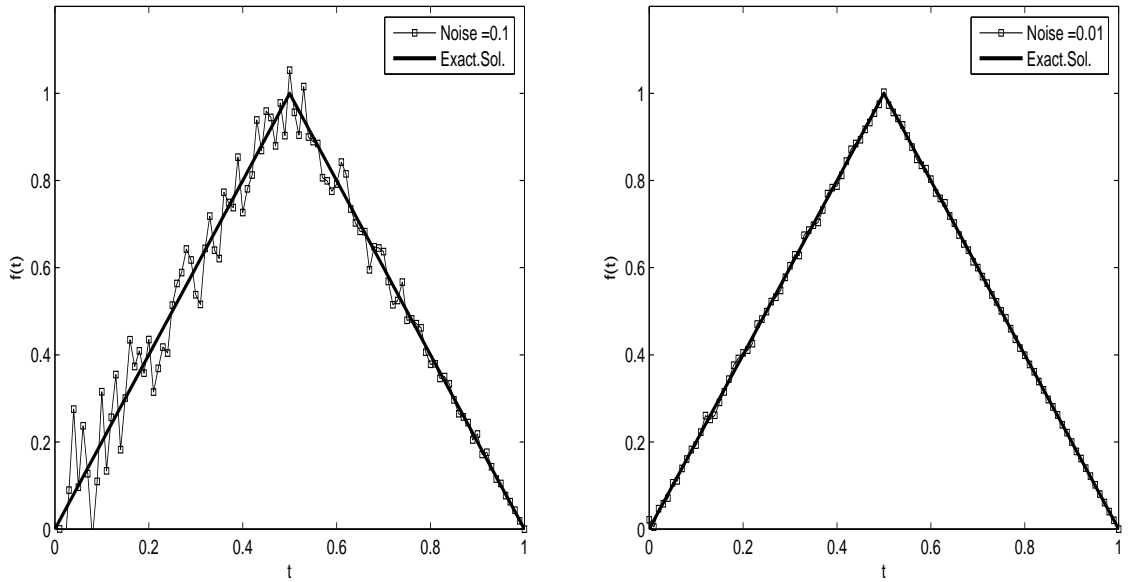
$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{nếu } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases} \quad \text{với } \varepsilon = 0.01. \quad (2.66)$$

Ta thấy rằng quan sát tích phân với hàm trọng (2.66) có thể xem như là quan sát điểm.

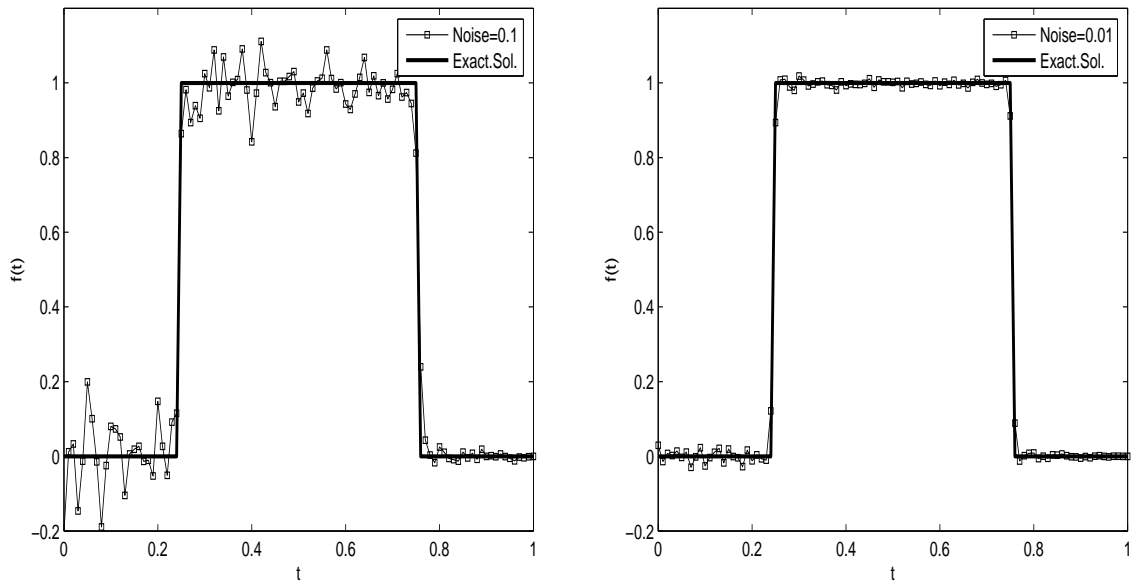
Kết quả số cho trường hợp này được thể hiện từ Hình 2.9 đến Hình 2.14. Từ những kết quả này, chúng ta thấy rằng các kết quả số trong các trường hợp một chiều là rất tốt, mặc dù nhiễu là 10%.



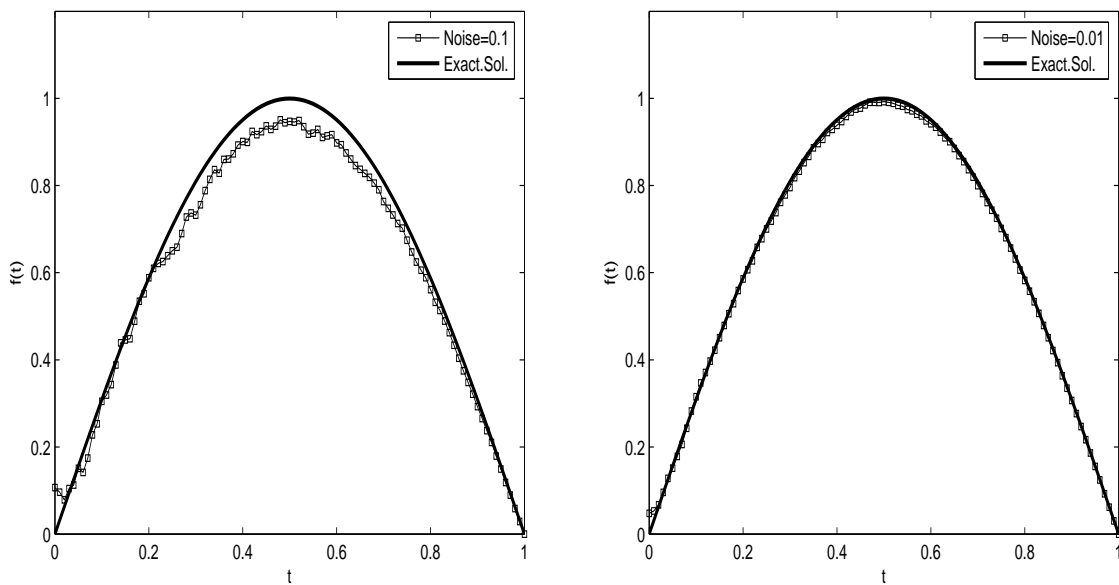
Hình 2.9: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 1: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 1 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.65)



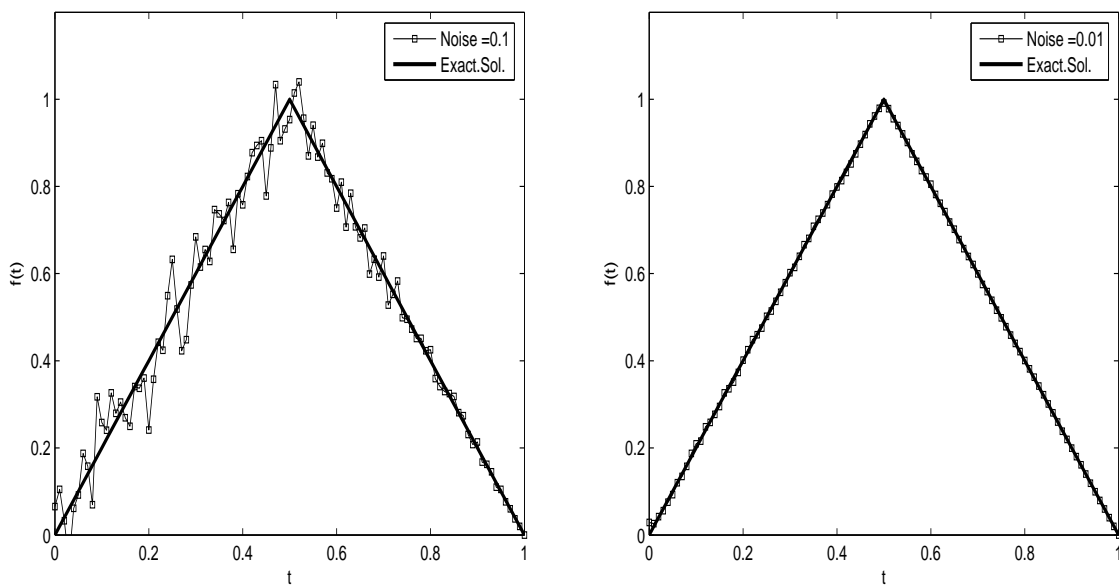
Hình 2.10: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 2: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 2 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.65)



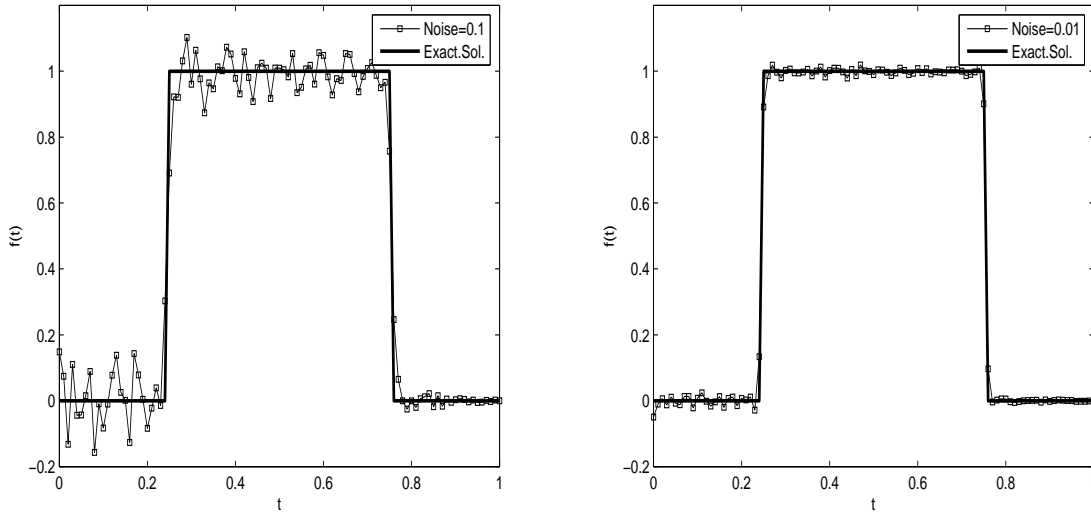
Hình 2.11: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 3: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 3 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.65)



Hình 2.12: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 1: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 1 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.66)



Hình 2.13: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 2: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 2 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.66)



Hình 2.14: Trường hợp 1 chiều, Ví dụ 3: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số trong ví dụ 3 với nhiễu bằng 0.1 (bên trái) và nhiễu bằng 0.01 (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.66)

2.3.4.2. Ví dụ số trong trường hợp 2 chiều

Trong tiểu mục này, chúng tôi trình bày kết quả số cho một vài bài toán. Cho $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q = \Omega \times (0, 1)$. Khi đó, bài toán (2.43) có dạng

$$\begin{cases} u_t - (a_1(x, t)u_{x_1})_{x_1} - (a_2(x, t)u_{x_2})_{x_2} + b(x, t)u = f(t)\varphi(x, t) + g(x, t), (x, t) \in Q \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.67)$$

Trong tất cả các thử nghiệm, chúng tôi chọn nhiễu là 10^{-1} và 10^{-2} , hàm trọng được cho bởi

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\varepsilon^2} & \text{nếu } x_1^0 - \varepsilon < x_1 < x_1^0 + \varepsilon \text{ và } x_2^0 - \varepsilon < x_2 < x_2^0 + \varepsilon \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad \text{với } \varepsilon = 0.01. \quad (2.68)$$

Tham số hiệu chỉnh γ là 10^{-3} . Tuy nhiên, các kết quả số cho trường hợp nhiễu bằng 10^{-2} không có nhiều khác biệt so với trường hợp nhiễu bằng 10^{-1} . Do đó, chúng tôi chỉ trình bày kết quả cho trường hợp nhiễu bằng 10^{-1} .

Giống như trường hợp một chiều, chúng tôi thay các dữ kiện a_1, a_2, b, f, φ và u vào hệ phương trình (2.67) để tìm g . Sau đó, chúng tôi sử dụng nhiễu trong lu để tìm nhiễu đo đạc h và áp dụng thuật toán để thiết lập lại hàm $f(t)$.

Thử nghiệm 1. Ví dụ 1: $f(t) = \sin(\pi t)$.

$$a_1(x, t) = a_2(x, t) = 0.5(1 - 0.5(1 - t) \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2)),$$

$$b(x, t) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1t + 1,$$

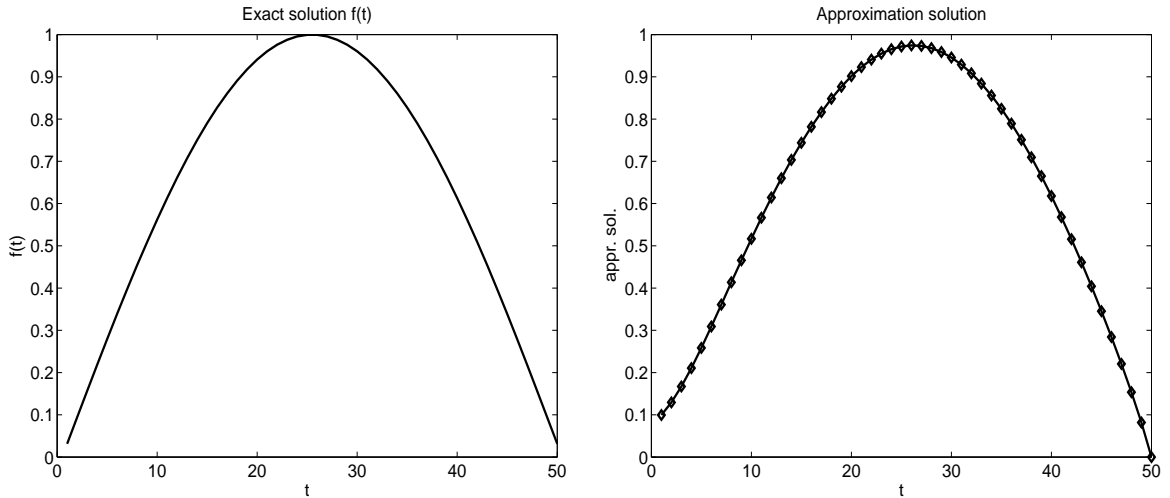
$$u_0(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

$$u(x, t) = u_0(x) \times (1 - t),$$

$$\varphi(x, t) = (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 2).$$

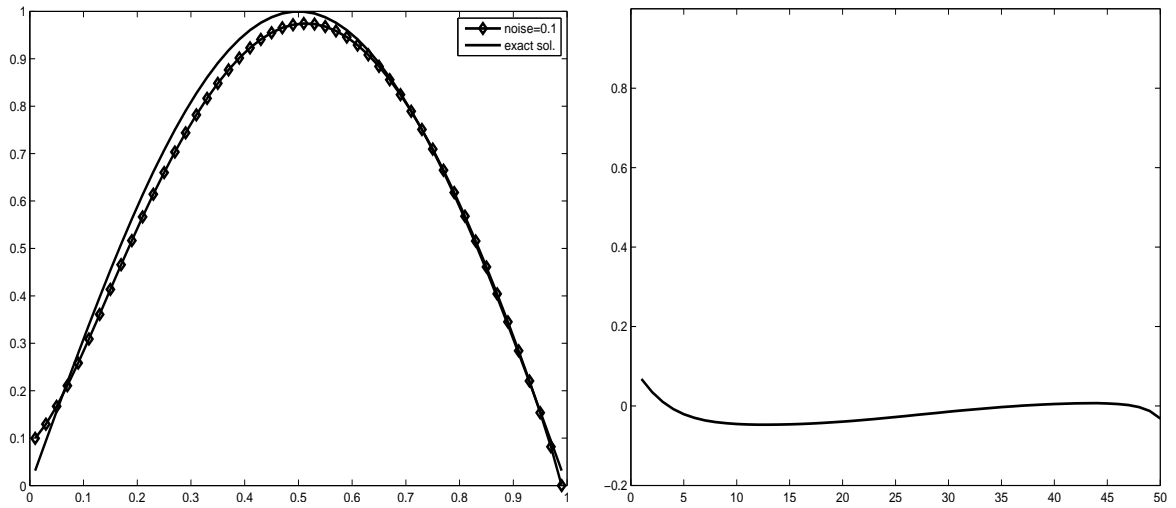
Thay vào phương trình (2.67) ta có

$$\begin{aligned} g(x, t) = & -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - (1 - t)(\pi^2 + 0.5\pi^2 \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ & + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1t + 1)) + 0.75\pi^2(1 - t)^2 (\sin(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ & + \cos(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2)) - (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 2) \sin(\pi t). \end{aligned}$$



Hình 2.15: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 1, Thử nghiệm 1: Nghiệm chính xác (bên trái) và nghiệm giải số (bên phải) với nhiễu = 0.1. Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).

Từ các kết quả trên ta thấy rằng, thuật toán ổn định hơn nếu φ "lớn". Nếu φ "nhỏ", thì kết quả số không được tốt bằng trường hợp φ "lớn". Điều này có thể thấy trong thử nghiệm 2 dưới đây.

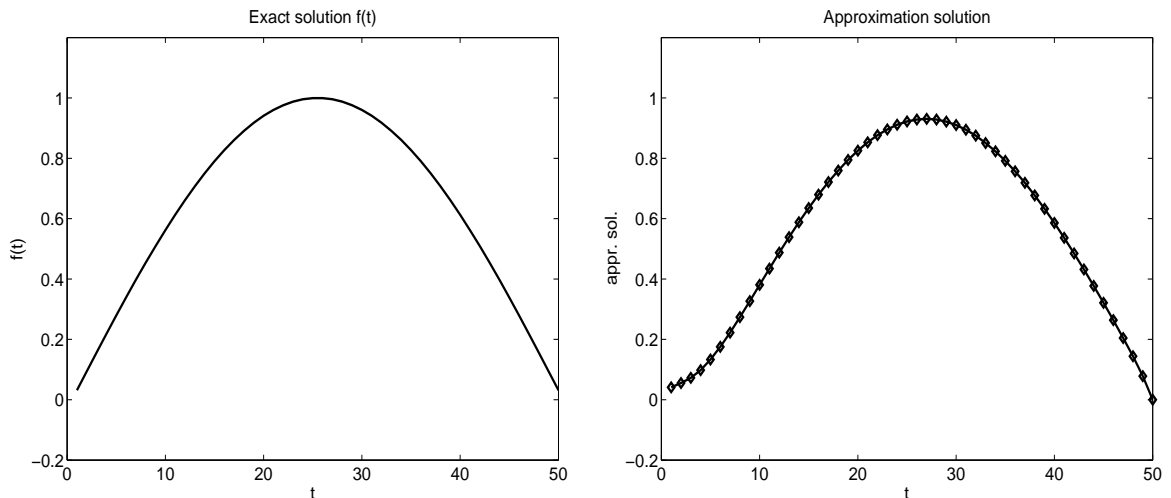


Hình 2.16: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 1, Thử nghiệm 1: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số với nhiễu = 0.1 (bên trái) và sai số (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).

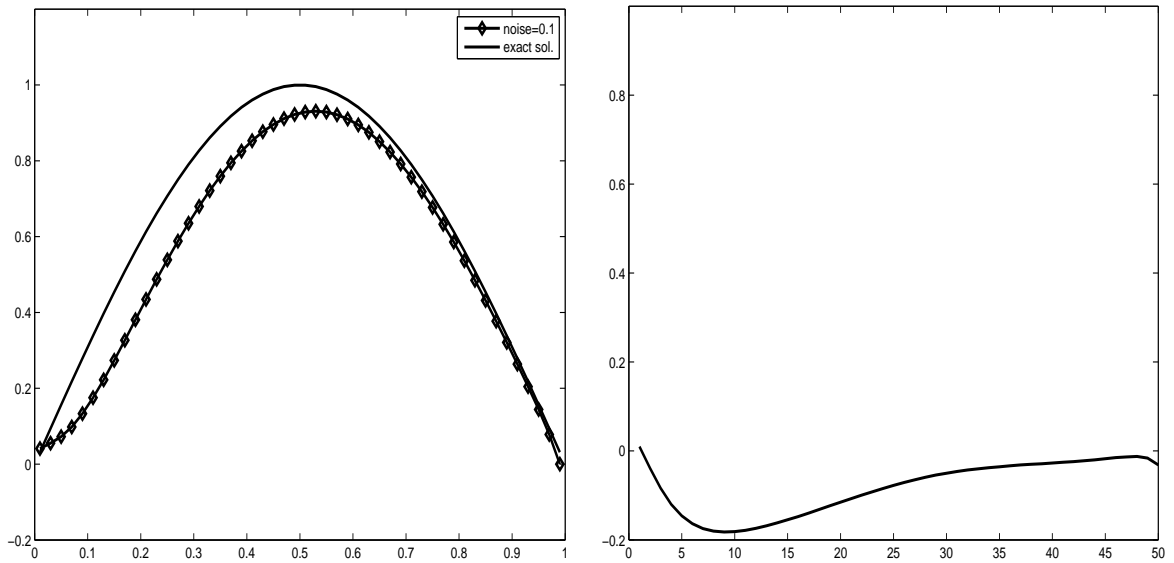
Thử nghiệm 2. Ví dụ 1: $f(t) = \sin(\pi t)$.

Trong thử nghiệm này, chúng tôi sử dụng các hàm tương tự như trong thử nghiệm trước nhưng hàm $\varphi(x, t) = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(t^2 + 1)$. Chúng tôi chú ý rằng, trong thử nghiệm này, chuẩn của hàm φ nhỏ hơn so với thử nghiệm 1.

Kết quả số trong trường hợp này không tốt bằng thử nghiệm trước. Điều này được chỉ ra trong Hình 2.17 và Hình 2.18.



Hình 2.17: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 1, Thử nghiệm 2: Nghiệm chính xác (bên trái) và nghiệm giải số (bên phải) với nhiễu = 0.1. Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).



Hình 2.18: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 1, Thử nghiệm 2: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số với nhiễu = 0.1 (bên trái) và sai số (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).

Thử nghiệm 3. Ví dụ 2:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{nếu } t \leq 0.5 \\ 2(1-t) & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

$$a_1(x, t) = a_2(x, t) = 0.5(1 - 0.5(1-t) \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2)),$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

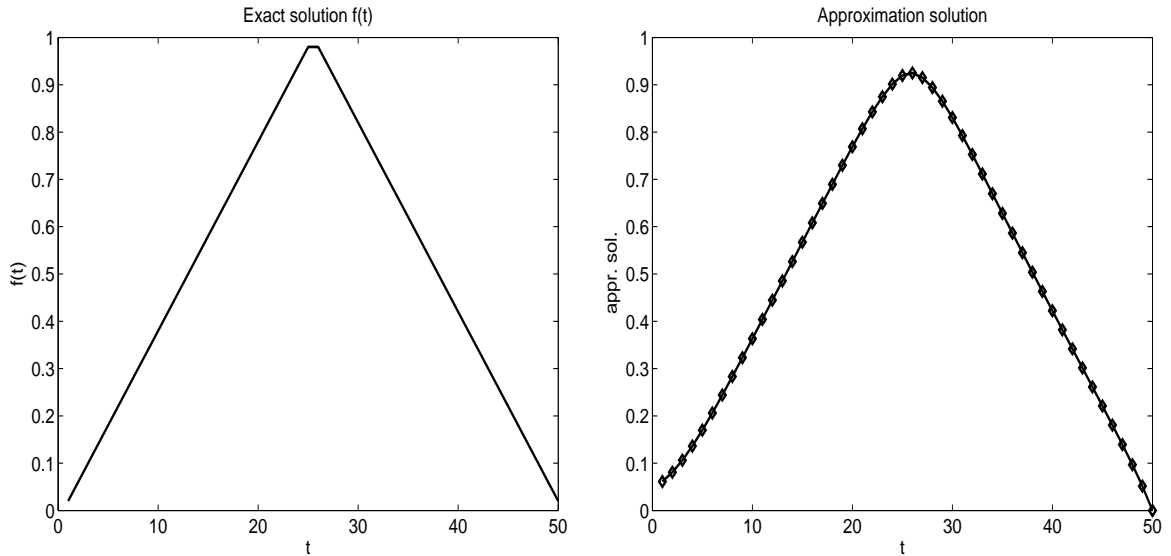
$$b(x, t) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1,$$

$$\varphi(x, t) = (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 3).$$

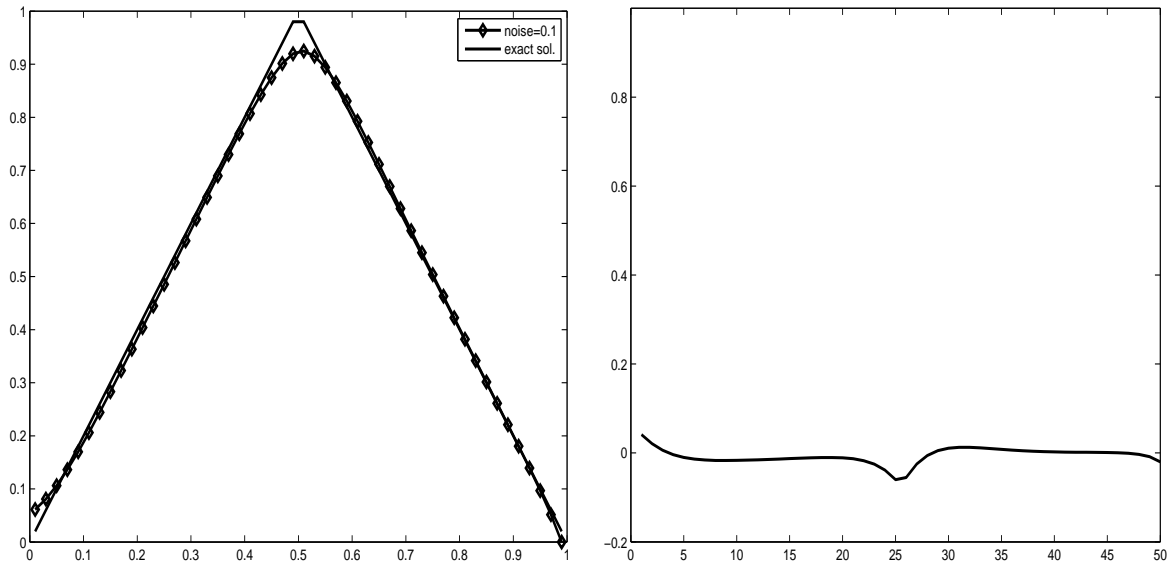
Thay vào phương trình (2.67) ta có

$$g(x, t) = \begin{cases} -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - (1 - t)(\pi^2 + 0.5\pi^2 \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ \quad + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1)) \\ \quad + 0.75\pi^2 (1 - t)^2 (\sin(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ \quad + \cos(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2)) \\ \quad - (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 3)2t & \text{nếu } t \leq 0.5, \\ -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - (1 - t)(\pi^2 + 0.5\pi^2 \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ \quad + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1)) \\ \quad + 0.75\pi^2 (1 - t)^2 (\sin(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ \quad + \cos(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2)) \\ \quad - (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 3)2(1 - t) & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Kết quả số được thể hiện trong Hình 2.19 và 2.20.



Hình 2.19: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 2, Thử nghiệm 3: Nghiệm chính xác (bên trái) và nghiệm giải số (bên phải) với nhiễu = 0.1. Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).



Hình 2.20: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 2, Thử nghiệm 3: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số với nhiễu = 0.1 (bên trái) và sai số (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).

Thử nghiệm 4. Ví dụ 3:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0.25 \leq t \leq 0.75, \\ 0, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

$$a_1(x, t) = a_2(x, t) = 0.5(1 - 0.5(1 - t) \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2)),$$

$$b(x, t) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1,$$

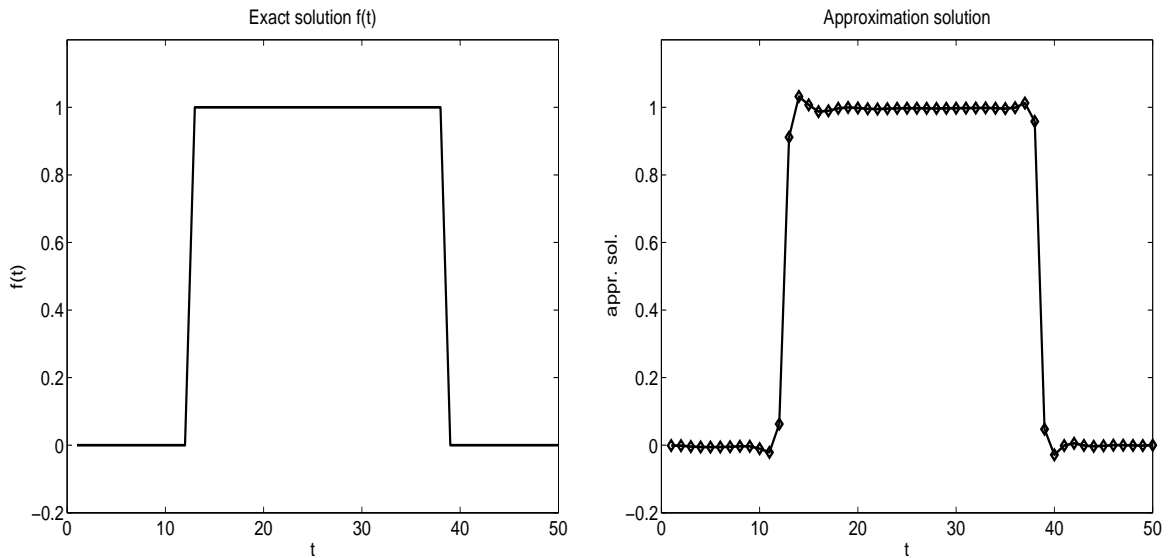
$$u_0(x) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2),$$

$$\varphi = (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 3).$$

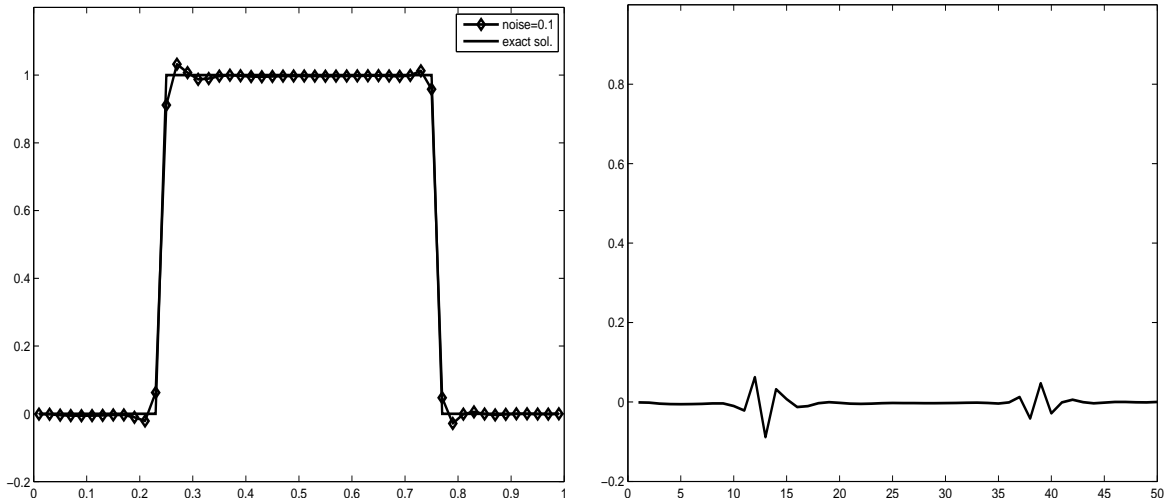
Thay vào phương trình (2.67) ta có

$$g = \begin{cases} \begin{aligned} & -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - (1-t)(\pi^2 + 0.5\pi^2 \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ & \quad + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1)) \\ & + 0.75\pi^2 (1-t)^2 (\sin(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ & \quad + \cos(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2)) \\ & - (x_1^2 + 5)(x_2^2 + 3)(t^2 + 3) \end{aligned} & \text{nếu } 0.25 \leq t \leq 0.75, \\ \begin{aligned} & -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) (1 - (1-t)(\pi^2 + 0.5\pi^2 \cos(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ & \quad + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 t + 1)) \\ & + 0.75\pi^2 (1-t)^2 (\sin(3\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ & \quad + \cos(3\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2)) \end{aligned} & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Kết quả số cho thử nghiệm này được trình bày trong Hình 2.21 và 2.22.



Hình 2.21: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 3, Thử nghiệm 4: Nghiệm chính xác (bên trái) và nghiệm giải số (bên phải) với nhiễu = 0.1. Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).



Hình 2.22: Trường hợp 2 chiều, Ví dụ 3, Thử nghiệm 4: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm giải số với nhiễu = 0.1 (bên trái) và sai số (bên phải). Hàm trọng ω được cho bởi (2.68).

Các kết quả số được chúng tôi trình bày trong các Bảng 2.1, 2.2 và 2.3. Trong Bảng 2.1 và Bảng 2.2, chúng tôi trình bày tham số hiệu chỉnh, sai số L^2 , số bước lặp để thuật toán dừng và giá trị của phiếm hàm Tikhonov trong trường hợp 1 chiều. Trong Bảng 2.3, chúng tôi đưa ra sai số trong L^2 , giá trị của phiếm hàm quan sát tương ứng với nhiễu trong trường hợp 2 chiều. Từ đó cho thấy thuật toán chúng tôi đưa ra là hiệu quả.

Ví dụ	Nhiễu	γ	n^*	$\ f - f_{n^*}\ _{L^2(0,T)}$	$J_\gamma(f_{n^*})$
1	10^{-1}	0.05	8	$9.7E - 3$	$1.50E - 2$
1	10^{-2}	0.01	10	$2.0E - 4$	$2.49E - 3$
2	10^{-1}	0.05	13	$8.9E - 3$	$8.47E - 3$
2	10^{-2}	0.01	15	$5.9E - 5$	$1.66E - 3$
3	10^{-1}	0.05	18	$9.8E - 3$	$1.27E - 2$
3	10^{-2}	0.01	29	$8.4E - 4$	$2.54E - 3$

Bảng 2.1: Tham số hiệu chỉnh γ , số bước lặp n^* , sai số $\|f - f_{n^*}\|_{L^2(0,T)}$ và giá trị của phiếm hàm $J_\gamma(f_{n^*})$ (hàm trọng ω được cho bởi (2.65)).

Ví dụ	Nhiều	γ	n^*	$\ f - f_{n^*}\ _{L^2(0,T)}$	$J_\gamma(f_{n^*})$
1	10^{-1}	0.05	8	$7.8E - 3$	$1.42E - 2$
1	10^{-2}	0.01	9	$2.9E - 4$	$2.47E - 3$
2	10^{-1}	0.05	13	$8.5E - 3$	$8.50E - 3$
2	10^{-2}	0.01	14	$7.8E - 5$	$1.66E - 3$
3	10^{-1}	0.05	17	$9.5E - 2$	$1.28E - 2$
3	10^{-2}	0.01	29	$1.0E - 3$	$2.53E - 3$

Bảng 2.2: Tham số hiệu chỉnh γ , số bước lặp n^* , sai số $\|f - f_{n^*}\|_{L^2(0,T)}$ và giá trị của phiếm hàm $J_\gamma(f_{n^*})$ (hàm trọng ω được cho bởi (2.66)).

Ví dụ	Nhiều	Sai số L^2	J_γ
1	10^{-1}	$1.9E - 2$	$3.96E - 3$
1	10^{-2}	$7.4E - 3$	$2.95E - 4$
2	10^{-1}	$1.0E - 1$	$2.23E - 4$
2	10^{-2}	$9.0E - 2$	$2.21E - 4$
3	10^{-1}	$1.8E - 2$	$2.82E - 4$
3	10^{-2}	$7.8E - 3$	$2.62E - 4$

Bảng 2.3: Sai số trong L^2 , giá trị của phiếm hàm quan sát tương ứng với nhiều.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Các kết quả chính chúng tôi đạt được trong chương này là

- Đưa ra cách tiếp cận mới và phương pháp số cho bài toán xác định nguồn trong quá trình truyền nhiệt (xác định về phải trong phương trình parabolic) từ các quan sát tích phân.

- Đưa ra phương pháp biến phân để giải bài toán và công thức tính gradient (2.17) thông qua bài toán liên hợp (Định lý 2.1).

- Rời rạc hóa bài toán biến phân bằng các phương pháp khác nhau như phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp sai phân hữu hạn phân rã, sau đó chứng minh các kết quả tương tự về tính khả vi Fréchet cũng như công thức tính đạo hàm Fréchet cho các phiếm hàm rời rạc cần tối thiểu hóa.

- Giải số các bài toán bằng phương pháp gradient liên hợp khẳng định sự hữu hiệu của phương pháp.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án này nghiên cứu bài toán xác định quy luật biên phi tuyến và xác định nguồn trong các quá trình truyền nhiệt. Cụ thể luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Đối với bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến trên biên, về lý thuyết chúng tôi đã giải quyết triệt để bài toán trong trường hợp nhiều chiều dựa trên phương pháp biến phân. Chứng minh tính khả vi theo nghĩa Fréchet của phiếm hàm cần tối ưu hóa, đưa ra công thức tính đạo hàm bằng bài toán liên hợp. Trong một số trường hợp chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán biến phân. Bài toán được rời rạc bằng phương pháp phần tử biên (BEM) và sau đó được giải số bằng phương pháp lặp Gauss-Newton. Các thử nghiệm bằng số trên máy tính cho thấy phương pháp và thuật toán là hữu hiệu.

2. Với bài toán xác định nguồn trong các quá trình truyền nhiệt, chúng tôi đưa ra một cách tiếp cận mới có ý nghĩa thực tế để giải bài toán xác định nguồn nhiều chiều với hệ số phụ thuộc thời gian (chưa được nghiên cứu từ trước), sau đó chuyển bài toán về bài toán biến phân. Vì bài toán biến phân không ổn định, nên chúng tôi đã hiệu chỉnh nó bằng phương pháp chỉnh Tikhonov, sau đó chứng minh phiếm hàm Tikhonov khả vi Fréchet rồi đưa ra công thức cho đạo hàm Fréchet qua sự trợ giúp của bài toán liên hợp. Bài toán được rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và phương pháp sai phân phân rã (finite difference splitting method), sau đó được giải bằng phương pháp gradient liên hợp (conjugate gradient method). Thuật toán được thử nghiệm trên máy tính và các kết quả số cho thấy phương pháp rất hữu hiệu.

Luận án mở ra một số hướng tiếp tục nghiên cứu là:

1. Nghiên cứu phương pháp giải số bài toán xác định quy luật trao đổi nhiệt phi tuyến từ quan sát một phần biên và phương pháp giải số bài toán xác định hệ số truyền nhiệt từ quan sát tích phân. Nghiên cứu bài toán cho phương trình phức tạp hơn.

2. Nghiên cứu bài toán xác định nguồn cho quá trình truyền nhiệt phi tuyến, nghiên cứu bài toán xác định nguồn điểm.

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ
LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN**

1. Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Phan Xuan Thanh, D. Lesnic (2015), "Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations", *Applicable Analysis*, 94 (9), pp. 1784–1799.
2. Nguyen Thi Ngoc Oanh, Bui Viet Huong (2015), "Determination of a time-dependent term in the right-hand side of linear parabolic equations", *Acta Mathematica Vietnamica*, DOI: 10.1007/ s40306-015-0143-y.
3. Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Nguyen Thi Ngoc Oanh, and Phan Xuan Thanh, "Determination of a term in the right-hand side of parabolic equations", Preprint 2015.

Tài liệu tham khảo

- [1] Alifanov O.M. (1994), *Inversr Heat Transfer Problems*, Wiley, New York.
- [2] Andrle M., Ben Belgacem F. and El Badia A. (2011), "Identification of moving pointwise sources in an advection-dispersion-reaction equation", *Inverse Problems* 27, 025007.
- [3] Andrle M., El Badia A. (2015), "On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem II", *Inverse Probl. Sci. Eng.* 23, pp. 389–412.
- [4] Barbu V. (1982), "Boundary control problems with nonlinear state equation", *SIAM J. Control Optim.* 20, pp. 125–143.
- [5] Beck J. V., Blackwell B., Clair St. C. R. (1985), *Inverse Heat Conduction, Ill-Posed Problems*, Wiley, New York.
- [6] Borukhov V. T. and Vabishchevich P. N. (1998), "Numerical solution of a inverse problem of source reconstructions in a parabolic equation", *Mat. Model.* 10, pp. 93–100 (Russian).
- [7] Borukhov V. T. and Vabishchevich P. N. (2000), "Numerical solution of a inverse problem of reconstructing a distributed right-hand side of a parabolic equation", *Comput. Phys. Comm.* 126, pp. 32–36.
- [8] Cannon J. R. (1968), "Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data", *SIAM J. Numer. Anal.* 5, pp. 275–286.

- [9] Cannon J. R. (1984), *The One-dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA.
- [10] J. R. and DuChateau P. (1998), "Structural identification of an unknown source term in a heat equation", *Inverse Problems* 14, pp. 535–551.
- [11] Cannon J. R. and Ewing R. E. (1976), "Determination of a source term in a linear parabolic partial differential equation", *Z. Angew. Math. Phys.* 27, pp. 393–401.
- [12] Cannon J. R. and Lin Y. P. (1986), "Determination of a source term in a linear parabolic differential equation with mixed boundary conditions", *Inverse Problems* (Oberwolfach, 1986), pp. 31–49, *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.* 77, Birkhäuser, Basel.
- [13] Casas E. (1997), "Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations", *SIAM J. Control Optim.* 35, pp. 1297–1327.
- [14] Choulli M. (1999), "On the determination of an unknown boundary function in a parabolic equation", *Inverse Problems* 15, pp. 659–667.
- [15] Choulli M. and Yamamoto M. (2004), "Conditional stability in determining a heat source", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 12, pp. 233–243.
- [16] Choulli M. and Yamamoto M. (2006), "Some stability estimates in determining sources and coefficients", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 14, pp. 355–373.
- [17] Costabel M. (1990), "Boundary integral operators for the heat equations", *Integral Equations and Operator Theory* 13, pp. 498–552.
- [18] Engl H. W., Fusek P. and Pereverzev S. V. (2005), "Natural linearization for the identification of nonlinear heat transfer laws. Inverse problems: modeling and simulation", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 13, pp. 567–582.
- [19] El Badia A. and Ha-Duong T. (2002), "On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 10, pp. 585–599.

- [20] El Badia A., Ha-Duong T. and Hamdi A. (2005), "Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem", *Inverse Problems* 21, pp. 1121–1136.
- [21] El Badia A. and Hamdi A. (2007), "Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution", *Inverse Problems* 23, pp. 2103–2120.
- [22] Engl H. W., Scherzer O. and Yamamoto M. (1994), "Uniqueness and stable determination of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data", *Inverse Problems* 10, pp. 1253–1276.
- [23] Erdem A., Lesnic D. and Hasanov A. (2013), "Identification of a spacewise dependent heat source", *Appl. Math. Model.* 37, pp. 10231–10244.
- [24] Farcas A. and Lesnic D. (2006), "The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable", *J. Eng. Math.* 54, pp. 375–388.
- [25] Gol'dman N. L. (2003), "Inverse problem with final observation for quasilinear parabolic equations with unknown right hand side", *Vychislit. Metody i Programirovanie*, 4, pp. 155–166.
- [26] Gol'dman N. L. (2005), "Determination of the right-hand side in a quasilinear parabolic equation with final observation", *Differ. Equ.* 41, pp. 384–392.
- [27] Gol'dman N. L. (2007), "Finding the right-hand side in multidimensional parabolic equations with terminal observation", *Differ. Equ.* 43, pp. 1101–1110.
- [28] Grever W. (1998), "A nonlinear parabolic initial-boundary value problem modelling the continuous casting of steel", *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 78, pp. 109–119.
- [29] Dinh Nho Hào (1992), "A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equations II: A variational method", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 13, pp. 541–564.

- [30] Dinh Nho Hào (1992), "A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equations III: A variational method and its approximation schemes", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 13, pp. 565–583.
- [31] Dinh Nho Hào (1992), "A Noncharacteristic Cauchy Problem for Linear Parabolic Equations and Related Inverse Problems II: A Variational Method", *Pitman Res. Notes in Maths* 263, pp. 43–56.
- [32] Dinh Nho Hào (1994), "A Noncharacteristic Cauchy Problem for Linear Parabolic Equations and Related Inverse Problems I: Solvability", *Inverse Problems* 10, pp. 295–315.
- [33] Dinh Nho Hào (1998), *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*, Peter Lang Verlag, Frankfurt/Main, Bern, New York, Paris.
- [34] Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Phan Xuan Thanh, D. Lesnic (2015), "Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations", *Applicable Analysis*, 94, no. 9, pp. 1784–1799.
- [35] Dinh Nho Hào, Bui Viet Huong, Nguyen Thi Ngoc Oanh, and Phan Xuan Thanh, "Determination of a term in the right-hand side of parabolic equations", Preprint 2015.
- [36] Dinh Nho Hào, Phan Xuan Thanh, and Lesnic D. (2013), "Determination of heat transfer coefficients in transient heat conduction", *Inverse Problems* 29, 095020, 21 pp.
- [37] Hào D. N., Thanh P. X., Lesnic D and Johansson B. T. (2012), "A boundary element method for a multi-dimensional inverse heat conduction problem", *Inter. J. Comput. Math.* 89, pp. 1540–1554.
- [38] Dinh Nho Hào, Nguyen Trung Thành, and H. Sahli (2009), "Splitting-based gradient method for multi-dimensional inverse conduction problems", *J. Comput. Appl. Math.*, 232, pp. 361–377.

- [39] Hamdi A. (2007), "Identification of point sources in two-dimensional advection-diffusion-reaction equation: application to pollution sources in a river. Stationary case", *Inverse Probl. Sci. Eng.* 15, pp. 855–870.
- [40] Hamdi A. (2009), "Identification of a time-varying point source in a system of two coupled linear diffusion-advection-reaction equations: Application to surface water pollution", *Inverse Problems* 25, 115009.
- [41] Hasanov A. (2012), "Identification of spacewise and time-dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurable at a final time", *Int. J. Heat Mass Transfer* 55, pp. 2069–2080.
- [42] Hasanov A. and PektaşB. (2013), "Identification of unknown time-dependent heat source term from overspecified Dirichlet boundary data by conjugate gradient method", *Comput. Math. Appl.* 65, pp. 42–57.
- [43] Hasanov A. and Pektaş B. (2014), "A unified approach to identifying an unknown spacewise dependent source in a variable coefficient parabolic equation from final and integral overdeterminations", *Appl. Numer. Math.* 78, pp. 49–67.
- [44] Hettlich F. and Rundell W. (2001), "Identification of a discontinuous source in the heat equation", *Inverse Problems* 17, pp. 1465–1482.
- [45] Hinze M. (2005), "A variational discretization concept in control constrained optimization: The linear-quadratic case", *Computat. Optimiz. Appl.*, 30, pp. 45–61.
- [46] Isakov V. (1990), *Inverse Source Problems*. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [47] Isakov V. (2006), *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Second edition. Springer, New York.
- [48] Iskenderov A. D. (1976), "Some inverse problems on determining the right-hand sides of differential equations", *Izv. Akad. Nauk Azerbaijan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk* 2, pp. 58–63 (in Russian).

- [49] Iskenderov A. D. and Tagiev R. G. (1979), "An inverse problem on determining the right hand side of evolution equations in Banach spaces", *Questions of Applied Mathematics and Cybernetics* (A collection of Scientific Papers, Azerbaijan State University) 1, pp. 51–56.
- [50] Janicki M. and Kindermann S. (2009), "Recovering temperature dependence of heat transfer coefficient in electronic circuits", *Inverse Probl. Sci. Eng.* 17, pp. 1129–1142.
- [51] Kaiser T. and Tröltzsch F. (1987), "An inverse problem arising in the steel cooling process", *Wiss. Z. Tech. Univ. Karl-Marx-Stadt* 29, pp. 212–218.
- [52] Kamynin V. L. (2003), "On the unique solvability of an inverse problem for parabolic equations with a final overdetermination condition", *Math. Notes* 73, pp. 202–211.
- [53] Kamynin V. L. (2005), "On an inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation with the integral overdetermination condition", *Math. Notes* 77, pp. 482–493.
- [54] Kriksin Yu. A., Plyushchev S. N., Samarskaya E. A. ., and Tishkin V. F (1995), "The inverse problem of source reconstruction for a convective diffusion equation", *Mat. Model.* 7 (11), pp. 95–108. (Russian)
- [55] Ladyzhenskaya O. A. (1985), *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York.
- [56] Ladyzhenskaya O. A. (1968), V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, AMS Translations of Mathematical Monographs 23, Providence.
- [57] Lavrent'ev M. M. and Maksimov V. I. (2008), "On the reconstruction of the right-hand side of a parabolic equation", *Comput. Math. Math. Phys.* 48, pp. 641–647.
- [58] Lesnic D., Onyango T. T. M. and Ingham D. B. (2009), "The boundary element method for the determination of nonlinear boundary conditions in

- heat conduction", *Mesh Reduction Methods-BEM/MRM XXXI*, pp. 45–55, *WIT Trans. Model. Simul.*, 49, WIT Press, Southampton.
- [59] Ling LV and Takeuchi T. (2009), "Point sources identification problems for heat equations", *Commun. Comput. Phys.* 5, pp. 897—913.
- [60] Ling LV, Yamamoto M., Hon Y. C. and Takeuchi T. (2006), "Identification of source locations in two-dimensional heat equations", *Inverse Problems* 22, pp. 1289–1305.
- [61] Marchuk G. I. (1975), *Methods of Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- [62] Marchuk G. I. (1990), "Splitting and alternating direction methods", In Ciaglet P. G. and Lions J. L. , editors, *Handbook of Numerical Mathematics. Volume 1: Finite Difference Methods*. Elsevier Science Publisher B.V., North-Holland, Amsterdam.
- [63] Nemirovskii A. S. (1986), "The regularizing properties of the adjoint gradient method in ill-posed problems", *Zh. vychisl. Math. Phys.* 26(2), pp. 7–16.
- [64] Nguyen Thi Ngoc Oanh, Bui Viet Huong (2015), "Determination of a time-dependent term in the right hand side of linear parabolic equations", *Acta Mathematica Vietnamica*, DOI: 10.1007/ s40306-015-0143-y.
- [65] Orlovskii D.G.(1991), "Determination of parameter evolution in an abstract quasilinear parabolic equation", *MatZametki* 50 (2), pp. 111–119 (Russian).
- [66] Orlovskii D. G. (1991), "Solvability of an inverse problem for a parabolic equation in the Hölder class", *Mat. Zametki* 50(3), pp. 107–112 (Russian).
- [67] Onyango T. T. M., Ingham D. B. and Lesnic D. (2009), "Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method", *Comput. Math. Appl.* 57, pp. 153–168.
- [68] Noon P. J. (1998), *The Single Layer Heat Potential and Galerkin Boundary Element Methods for the Heat Equation*, Dissertation, The University of Maryland, USA.

- [69] Pilant M. and Rundell W. (1989), "An iteration method for the determination of an unknown boundary condition in a parabolic initial-boundary value problem", *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 32, pp. 59–71.
- [70] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., and Vasin I. A. (2000), *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- [71] Prilepko A. I. and Solov'ev V. V. (1987), "Solvability theorems and the Rothe method in inverse problems for an equation of parabolic type. I (Russian)", *Differentsial'nye Uravneniya* 23, pp. 1791–1799.
- [72] Prilepko A. I. and Solov'ev V. V. (1987), "Solvability theorems and the Rothe method in inverse problems for an equation of parabolic type. II (Russian)", *Differentsial'nye Uravneniya* 23, pp. 1971–1980.
- [73] Prilepko A. I. and Tkachenko D. S. (2003), "Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination", *Comput. Math. Math. Phys.* 43, pp. 537–546.
- [74] Prilepko A. I. and Tkachenko D. S. (2003), "The Fredholm property and the well-posedness of the inverse source problem with integral overdetermination", *Comput. Math. Math. Phys.* 43, pp. 1338–1347.
- [75] Prilepko A. I. and Tkachenko D. S. (2003), "Inverse problem for a parabolic equation with integral overdetermination", *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 11, pp. 191–218.
- [76] Raymond J. P. and Zidani H. (1998), "Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls", *SIAM J. Control Optim.* 36, pp. 1853–1879.
- [77] Raymond J. P. and Zidani H. (1999), "Hamiltonian-Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations", *Appl. Math. Optim.* 39, pp. 143–177.

- [78] Rundell W. (1980), "Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data", *Applicable Analysis*, 10(3), pp. 231–242.
- [79] Rundell W. and Yin H. M. (1990), "A parabolic inverse problem with an unknown boundary condition", *J. Differential Equations* 86, pp. 234–242.
- [80] Rösch A. (1994), "Identification of nonlinear heat transfer laws by optimal control", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 15, pp. 417–434.
- [81] Rösch A. (1996), "Fréchet differentiability of the solution of the heat equation with respect to a nonlinear boundary condition", *Z. Anal. Anwendungen* 15, pp. 603–618.
- [82] Rösch A. (1996), "Stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws", *Inverse Problems* 12, pp. 743–756.
- [83] Rösch A. (1996), "Identification of nonlinear heat transfer laws by means of boundary data", *Progress in Industry (at ECMI 94)*, pp. 405–412. Wiley–Teubner.
- [84] Rösch A. (1998), "Second order optimality conditions and stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws", *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems* (Vorau, 1996), 237–246, *Internat. Ser. Numer. Math.*, 126, Birkhäuser, Basel.
- [85] Rösch A. (2002), "A Gauss-Newton method for the identification of nonlinear heat transfer laws", *Optimal Control of Complex Structures* (Oberwolfach, 2000), 217–230, *Internat. Ser. Numer. Math.*, 139, Birkhäuser, Basel.
- [86] Rösch A. and Tröltzsch F. (1992), "An optimal control problem arising from the identification of nonlinear heat transfer laws", *Arch. Control Sci.* 1, pp. 183–195.
- [87] Schmidt E. J. P. G. (1989), "Boundary control for the heat equation with nonlinear boundary condition", *J. Differential Equations* 78, pp. 89–121.

- [88] Tao L. N. (1981), "Heat conduction with nonlinear boundary condition", *Z. Angew. Math. Phys.* 32, pp. 144–155.
- [89] Phan Xuan Thành (2011), *Boundary Element Methods for Boundary Control Problems*, PhD thesis, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- [90] Nguyen Trung Thành (2007), *Infrared Thermography for the Detection and Characterization of Buried Objects*. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, Brussel, Belgium.
- [91] Thomée V. (2006), *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin.
- [92] Tkachenko D. S. (2004), "On an inverse problem for a parabolic equation", *Math. Notes* 75, pp. 676–689.
- [93] Trefethen L.N., Bau D. III (1997), *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia.
- [94] Tröltzsh F.(2010), *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, Amer.Math.Soc.,Providence,Rhode Island.
- [95] Trong D. D., Pham Ngoc Dinh A., Nam P. T. (2009), "Determine the special term of a two-dimensional heat source", *Applicable Analysis*, 88, pp. 457–474.
- [96] Vabishchevich P. N. (2003), "Numerical solution of the problem of the identification of the right-hand side of a parabolic equation", *Russian Math. (Iz. VUZ)* 47(1), pp. 27–35.
- [97] Wloka J. (1987), *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [98] Yamamoto M.(1993), "Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle", *Math. Comput. Modelling* 18, pp.79-88.
- [99] Yamamoto M. (1994), "Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain", In *Control and Estimation of*

Distributed Parameter Systems: Nonlinear Phenomena (Vorau, 1993), pp. 359–370, *Internat. Ser. Numer. Math.* 118, Birkhäuser, Basel.

- [100] Yanenko N. N. (1971), *The Method of Fractional Steps*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.