BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

PHẠM THANH HIẾU

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-NĂM 2016

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học:
1. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy
2. GS. TS. Nguyễn Bường

Phản biện 1: ....
Phản biện 2: ....
Phản biện 3: ....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp đại học tại: Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên

Ngày........tháng........năm 2016

Có thể tìm hiểu về luận án tại:

- Thư viện Quốc gia
- Trung tâm học liệu, Đại học Thái Nguyên
- Thư viện trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên

Mở đầu

Cho H là không gian Hilbert, C là một tập con lồi đóng của H và $F : H \to H$ là một ánh xạ. Bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển (*classical variational inequality*), ký hiệu là $\mathrm{CVI}(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm điểm } x_* \in C \textit{ thỏa mãn: } \langle Fx_*, x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{0.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nhà toán học người Italia, Stampacchia (Lions và Stampacchia, 1967; Stampacchia, 1964), nghiên cứu và đưa ra đầu tiên vào cuối những năm 60 và đầu những năm 70 của thế kỷ trước. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự, thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu do vai trò quan trọng của bài toán trong lý thuyết toán học cũng như trong nhiều ứng dụng thực tế. Bất đẳng thức biến phân được chỉ ra là một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán cân bằng chẳng hạn như bài toán cân bằng mạng giao thông, bài toán cân bằng thị trường độc quyền nhóm, bài toán cân bằng tài chính và bài toán cân bằng di cư.

Các nghiên cứu về bất đẳng thức biến phân có thể chia theo hai hướng chính bao gồm những nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm (Chen, 1992; Giannessi, 2000) và các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân. Cho đến nay người ta đã thiết lập được nhiều kĩ thuật giải bất đẳng thức biến phân, chẳng hạn phương pháp chiếu của Lions (1977), nguyên lý bài toán phụ của Cohen (1980), phương pháp điểm gần kề của Martinet (1970), phương pháp điểm gần kề quán tính do Alvarez và Attouch (2001) đề xuất và phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov (Browder, 1966; Tikhonov, 1963). Ở Việt Nam, trong một số năm trở lại đây bất đẳng thức biến phân đã trở thành một chủ đề nghiên cứu rất sôi động của các nhà nghiên cứu toán giải tích và toán ứng dụng. Một số tác giả trong nước có nhiều công trình nghiên cứu về bất đẳng thức biến phân có thể kể đến như N. Bường và N. T. T. Thủy (Buong, 2012; Thuy, 2015), N. Đ. Yên (Lee và đtg, 2005; Tam và đtg, 2005), L. D. Mưu và P. N. Anh (Anh và đtg, 2005, 2012 , P. H. Sách (Sach và đtg, 2008; Tuan và Sach, 2004) và P. Q. Khánh (Bao và Khanh, 2005, 2006), ... Ngoài ra, bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan như điểm bất động và bài toán cân bằng cũng đã và đang là đề tài nghiên cứu của nhiều tác giả là tiến sĩ và nghiên cứu sinh trong nước như L. T. T. Dương (Buong và Duong, 2011), N. Đ. Lạng (Buong và Lang, 2011), T. M. Tuyên (Tuyen, 2012), N. Đ. Dương (Bường và Duong, 2011), D. V. Thông (Thong, 2011), N. T. H. Phương (Buong và Phuong, 2013), Đ. D. Thành (Anh và đtg, 2015), N. S. Hà (Buong và đtg, 2015) và P. D. Khánh (Khanh, 2015), ...

Khi tập ràng buộc C của bài toán (0.1) được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một ánh xạ không giãn hoặc một họ các ánh xạ không giãn thì bài toán còn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế như xử lý tín hiệu, khôi phục ảnh, kiểm soát năng lượng trong hệ thống mạng CDMA, phân phối băng thông và bài toán điều khiển tối ưu (Iiduka, 2008, 2010, 2012, 2013). Đối với lớp bài toán này, phương pháp lai ghép đường dốc của Yamada đề xuất năm 2001 để giải (0.1) tỏ ra là phương pháp khá hiệu quả khi ánh xạ $F : H \to H$ là thỏa mãn điều kiện đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz vì nó đã khắc phục được khó khăn của việc thực hiện phép chiếu mêtric lên tập ràng buộc C của bài toán khi dùng dãy lặp Picard dạng $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n F x_n)$ để giải (0.1). Dựa trên cách tiếp cận của Yamada, đã có nhiều nghiên cứu nhằm mở rộng và cải biên thuật toán lai ghép dạng đường dốc cho các bài toán phức tạp hơn chẳng hạn bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc C là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn, họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn và nửa nhóm các ánh xạ không giãn. Chẳng hạn, khi $C := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$, với $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ là họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trên H, Yao và các cộng sự (2010) và Wang (2011) đã sử dụng phương pháp lai ghép đường dốc kết hợp với W-ánh xạ để thiết lập dãy lặp hội tụ mạnh về nghiệm của bất đẳng thức biến phân (0.1). Khi $C = \mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s))$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ trên H, Yang và đồng tác giả (2012) đã sử dụng ánh xạ tích phân Bochner trong dãy lặp để giải bất đẳng thức biến phân cổ điển trên tập ràng buộc $\mathcal{F}$. Tuy nhiên, các phương pháp kể đến ở trên đều được thiết lập trong không gian Hilbert H.

Ta biết rằng, trong các không gian Banach, không gian Hilbert H là không gian có tính chất "khá đẹp" chẳng hạn như tính chất hình bình hành, hoặc sự tồn tại và duy nhất của phép chiếu mêtric P_C từ H lên một tập con lồi đóng bất kỳ C, ... Những tính chất này làm cho việc nghiên cứu các bài toán trong không gian Hilbert trở nên đơn giản hơn so với việc nghiên cứu bài toán đó trong không gian Banach tổng quát. Cũng cần nói thêm rằng, một số vấn đề của toán học được thiết lập và nghiên cứu trong không gian Banach có liên quan đến bất đẳng thức biến phân chẳng hạn như phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng, phương trình toán tử hoặc bài toán điểm bất động trong không gian Banach là một chủ đề nghiên cứu quan trọng của Toán học. Do vậy việc nghiên cứu đề xuất các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach hoặc mở rộng các kết quả nghiên cứu đã có cho các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân từ không gian Hilbert sang không gian Banach đã và đang là một vấn đề thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học.

Việc mở rộng bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach được xét trong hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất là xét ánh xạ $F : E \to E^*$ biến đổi E vào không gian đối ngẫu E^*. Một số phương pháp giải cho bài toán này có thể kể đến như phương pháp chiếu (Alber, 1996; Iiduka và Takahashi, 2008; Zeidler, 1985) và phương pháp hiệu chỉnh (Alber, 1983; Buong, 1991; Ryazantseva, 2002). Trường hợp thứ hai là xét ánh xạ $F : E \to E$ đi từ không gian Banach E vào chính nó. Một số kết quả nghiên cứu công bố gần đây theo hướng này có thể kết đến Ceng và đtg. (2008); Chen và He (2008); Thong (2011) và Tuyen (2012), ... với các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện dựa trên phương pháp lai ghép đường dốc và các kĩ thuật lặp tìm điểm bất động chẳng như phương pháp lặp Mann (Mann, 1953). Tuy nhiên một điều quan trọng đảm bảo cho sự hội tụ mạnh của các kết quả này là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E phải thỏa mãn tính chất liên tục yếu theo dãy. Người ta đã chỉ ra rằng các không gian $l^p,\ 1 < p < \infty$, thỏa mãn tính chất này trong khi các không gian $L^p[a,b],\ 1 < p < \infty$ lại không thỏa mãn. Một vấn đề tự nhiên nảy sinh là liệu có thể xây dựng được các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong các không gian Banach mà không đòi hỏi tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc? Nếu vấn đề được giải quyết thì phạm vi áp dụng các thuật toán sẽ được mở rộng sang các không gian Banach tổng quát hơn không gian $l^p,\ 1 < p < \infty$, chẳng hạn như không gian $L^p[a,b],\ 1 < p < \infty$.

Một khía cạnh khác của bất đẳng thức biến phân chính là tính đặt không chỉnh của bài toán. Do đó việc xây dựng các phương pháp giải ổn định cho bất đẳng thức biến phân cũng là một nội dung cần được quan tâm trong đó phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov tỏ ra là một phương pháp khá hữu hiệu để giải nhiều lớp bài toán đặt không chỉnh. Năm 2012, Buong và Phuong đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder−Tikhonov cho bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ trong không gian Banach E bằng việc sử dụng V-ánh xạ như một cải tiến của W-ánh xạ trong phương trình hiệu chỉnh. Rất gần đây, Thuy (2015) cải tiến V-ánh xạ bằng cách sử dụng S-ánh xạ có cấu trúc đơn giản hơn V-ánh xạ. Trong trường hợp tập ràng buộc của bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu là tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn thì chưa có các kết quả về phương pháp hiệu chỉnh để giải lớp bài toán này.

Có thể khẳng định rằng, bài toán bất đẳng thức biến phân đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau nhằm xây dựng các phương pháp giải hữu hiệu cho bài toán. Việc xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach là một vấn đề được nảy sinh một cách tự nhiên và cần thiết để làm phong phú và hoàn thiện thêm cho lý thuyết về bài toán quan trọng này. Vì những lí do được phân tích ở trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án là "**Phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach**".

Mục đích chính của luận án này là nghiên cứu phương pháp lai ghép đường dốc và phương pháp hiệu chỉnh để giải bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm các ánh xạ không giãn trong không gian Banach E mà không cần đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Cụ thể, luận án sẽ quan tâm giải quyết các vấn đề sau:

1. Xây dựng các phương pháp lai ghép đường dốc dạng ẩn và dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều.

2. Nghiên cứu thiết lập phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu đồng thời kết hợp phương pháp hiệu chỉnh với phương pháp điểm gần kề quán tính để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều; sử dụng kĩ thuật lặp hiện kết hợp với phương pháp hiệu chỉnh để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bài toán tương tự trong không gian Banach q-trơn đều.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị quan trọng cho việc trình bày các kết quả chính ở các chương sau gồm một số đặc trưng hình học của không gian Banach, ánh xạ loại đơn điệu, ánh xạ liên tục Lipschitz, bất đẳng thức biến phân cổ điển và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach. Chương 2 được xây dựng để trình bày các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện tương ứng cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Trong Chương 3, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov và kết hợp phương pháp này với phương pháp điểm gần kề quán tính để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân; sử dụng kĩ thuật lặp hiện kết hợp phương pháp hiệu chỉnh để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach q-trơn đều. Ví dụ số mang tính chất minh họa cho các phương pháp đã nghiên cứu được đề cập ở cuối Chương 2 và Chương 3.

Chương 1
Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1 của luận án giới thiệu những kiến thức cơ bản nhất phục vụ cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu đạt được trong các chương sau của luận án. Cụ thể, chương này gồm 5 mục:

Mục 1.1 dành cho việc trình bày một số đặc trưng hình học của không gian Banach, định nghĩa và một số tính chất của ánh xạ j-đơn điệu và ánh xạ liên tục Lipschitz

Mục 1.2 chúng tôi giới thiệu về nửa nhóm không giãn và ứng dụng của nửa nhóm không giãn trong nghiên cứu nghiệm của bài toán Cauchy.

Trong Mục 1.3, chúng tôi phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển và một số bài toán liên quan như bài toán hệ phương trình, bài toán bù, bài toán cực trị và bài toán điểm bất động.

Mục 1.4 được xây dựng để giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach. Đồng thời trong mục này chúng tôi trình bày phương pháp lai ghép đường dốc do Yamada đề xuất để giải bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm động của một họ các ánh xạ không giãn.

Mục 1.5 chúng tôi dùng để phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach (ký hiệu bài toán là $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$) và chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm của bài toán.

1.5. Phát biểu bài toán

Cho E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E với $\mathcal{F} := \cap_{s \geq 0} \mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$, ở đây $\mathcal{F}$ là tập điểm bất động của nửa nhóm $\{T(t) : t \geq 0\}$. Chúng tôi xét bài toán sau:

$$\textit{Tìm điểm } p_* \in \mathcal{F} \textit{ sao cho}: \ \langle Fp_*, j(x - p_*)\rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{F}. \quad (1.1)$$

Mệnh đề 1.1 *Cho E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta, \gamma \in (0, 1)$ thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$ và cho $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E sao cho $\mathcal{F} := \cap_{s \geq 0} \mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. Khi đó, bài toán (1.1) tồn tại duy nhất một nghiệm $p_* \in \mathcal{F}$.*

Trong các chương sau của luận án chúng tôi sẽ đề xuất một số phương pháp giải bất đẳng thức biến phân dựa trên phương pháp lai đường dốc và phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach.

Chương 2
Phương pháp lai ghép đường dốc cho bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn

Chương này gồm 3 mục. Cụ thể, trong Mục 2.1, chúng tôi đề xuất ba phương pháp lặp ẩn dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ và trong Mục 2.2 chúng tôi đưa ra dạng hiện tương ứng cho các phương pháp lặp ẩn đã xét trong Mục 2.1. Ví dụ số minh họa cho các phương pháp đã đề xuất được trình bày trong Mục 2.3. Các kết quả của chương này được lấy từ các bài báo (2) và (3) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Phương pháp lặp ẩn lai ghép đường dốc

2.1.1. Mô tả phương pháp

Các phương pháp lặp ẩn để giải bất đẳng thức biến phân đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu do lợi thế của phương pháp là điều kiện đặt lên các dãy tham số của dãy lặp khá nhẹ và sự hội tụ của phương pháp lặp ẩn luôn được đảm bảo dựa trên nguyên lý ánh xạ co Banach. Một số kết quả nghiên cứu về các phương pháp lặp ẩn giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động một họ các ánh xạ không giãn của các tác giả khác có thể kể đến như các kết quả của Ceng và đồng tác giả (2008), Chen và He (2007), Shioji và Takahashi (1998), Suzuki (2005) và Xu (2005).

Các phương pháp trên hoặc là được xét đến trong không gian Hilbert H hoặc trong không gian Banach E có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy. Ta biết rằng, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trong không gian Hilbert H chính là ánh xạ đồng nhất I thỏa mãn tính chất liên tục yếu theo dãy và trong các không gian Banach quen thuộc, tính chất này thỏa mãn trong không gian $l^p,\ 1 < p < \infty$ nhưng chưa chắc đã thỏa mãn trong các không gian $L^p[a,b],\ 1 < p < \infty$. Vấn đề chúng tôi đặt ra trong chương này là liệu có thể xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn mà loại bỏ được tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach? Xuất phát từ ý tưởng này, trong mục này chúng tôi đề xuất ba phương pháp lặp ẩn dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc để giải bất đẳng thức biến phân (1.1) trong không gian Banach E mà không dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Việc chứng minh sự hội tụ của các phương pháp này cần sử dụng đến những kĩ thuật để vượt qua khó khăn gây ra bởi các tính chất hình học và các tính chất về tính liên tục của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j của không gian Banach như việc sử dụng giới hạn Banach μ hoặc ánh xạ co rút không giãn theo tia Q_C. Như vậy phạm vi ứng dụng của các phương pháp đã đề xuất có thể được mở rộng cho các không gian Banach tổng quát hơn, chẳng hạn $L^p[a,b],\ 1 < p < \infty$.

Phương pháp thứ nhất được thiết lập dựa trên việc thiết lập tổ hợp lồi của hai ánh xạ F_k và T_k lần lượt được xác định bởi

$$F_k x = (I - \lambda_k F)x \tag{2.1}$$

và

$$T_k x = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x ds, \quad x \in E. \tag{2.2}$$

Phương pháp 2.1. *Xuất phát từ điểm x_1 bất kỳ thuộc E, xác định dãy $\{x_k\}$ theo sơ đồ lặp ẩn sau:*

$$x_k = \gamma_k F_k x_k + (1-\gamma_k) T_k x_k,\ k \geq 1, \tag{2.3}$$

với $\gamma_k \in (0,1), \lambda_k \in (0,1]$ và $t_k > 0$ thỏa mãn $\lambda_k \to 0, t_k \to \infty$ khi $k \to \infty$.

Không dùng tích phân Bochner T_k mà thay bằng ánh xạ $T(t_k)$, chúng tôi nhận được kết quả sau.

Phương pháp 2.2. *Xuất phát từ điểm y_1 bất kỳ thuộc E, xác định dãy $\{y_k\}$ theo phương trình lặp ẩn*

$$y_k = \gamma_k F_k y_k + (1-\gamma_k) T(t_k) y_k,\ k \geq 1, \tag{2.4}$$

với $\lambda_k \in (0,1]$, $\gamma_k \in (0,1)$ *và* $t_k > 0$ *thỏa mãn* $\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{t_k} = 0$.

Phương pháp thứ ba được xây dựng bằng cách lấy hợp thành của hai ánh xạ T_k và F_k.

Phương pháp 2.3. *Xuất phát từ điểm* w_1 *bất kỳ thuộc* E, *xác định dãy* $\{w_k\}$ *theo phương trình sau*

$$w_k = T_k F_k w_k,\ k \geq 1, \tag{2.5}$$

với $\lambda_k \in (0,1]$ *và* $t_k > 0$ *sao cho* $\lambda_k \to 0$ *và* $t_k \to \infty$, *khi* $k \to \infty$.

2.1.2. Sự hội tụ

Định lí 2.1 *Cho* E *là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* η-j-*đơn điệu mạnh và* γ-*giả co chặt với* $\eta, \gamma \in (0,1)$ *thỏa mãn* $\eta + \gamma > 1$. *Cho* $\{T(s) : s \geq 0\}$ *là nửa nhóm không giãn trên* E *sao cho* $\mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. *Khi đó dãy* $\{x_k\}$ *xác định bởi* (2.3) *hội tụ mạnh đến điểm* $p_* \in \mathcal{F}$ *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (1.1) *khi* $k \to \infty$.

Định lí 2.2 *Cho* F *là ánh xạ* η-j-*đơn điệu mạnh và* γ-*giả co chặt trên* E, *không gian Banach phản xạ thực lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều, với* $\eta + \gamma > 1$ *và cho* $\{T(s) : s \geq 0\}$ *là nửa nhóm không giãn trên* E *sao cho* $\mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. *Khi đó, dãy* $\{y_k\}$ *xác định bởi* (2.4) *hội tụ mạnh về điểm* $p_* \in \mathcal{F}$ *là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (1.1) *khi* $k \to \infty$.

Định lí 2.3 *Cho* E, F, $\{T(s) : s \geq 0\}$ *và* $\mathcal{F}$ *thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1. Khi đó, dãy* $\{w_k\}$ *xác định bởi* (2.5) *hội tụ mạnh đến nghiệm* $p_* \in \mathcal{F}$ *của bất đẳng thức biến phân* (1.1) *khi* $k \to \infty$.

Nhận xét 2.1 Khi $C = \mathcal{F} := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn, năm 2013, Buong va Phuong đã đề xuất một phương pháp lặp ẩn hội tụ mạnh cho bài toán (1.1) trong không gian Banach E lồi phản xạ, lồi chặt và có chuẩn khả vi

Gâteaux đều với cấu trúc thuật toán tương tự (2.3) trong đó ánh xạ T_k được thay bởi ánh xạ V-ánh xạ.

Như vậy, có thể coi các phương pháp lặp ẩn (2.3), (2.4) và (2.5) được xét đến trong các Định lý 2.1, 2.2 và Định lý 2.3 là mở rộng của các phương pháp của Buong va Phuong (2013) theo nghĩa từ tập ràng buộc là tập điểm bất động của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn sang trường hợp khi tập ràng buộc là tập điểm bất động của một họ vô hạn không đếm được các ánh xạ không giãn.

Chú ý 2.1 Kĩ thuật chứng minh dùng giới hạn Banach cũng đã được Ceng (2008) sử dụng khi tác giả xây dựng phương pháp lặp ẩn lai ghép đường dốc để giải bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn.

2.2. Phương pháp lặp hiện lai ghép đường dốc

2.2.1. Mô tả phương pháp

Khi xây dựng các kĩ thuật lặp ẩn đã xét ở Mục 2.2, chúng tôi nhận thấy một khó khăn có thể gặp phải của các phương pháp đó trong thực hành tính toán là tại mỗi bước lặp thứ k, ta đều phải thực hiện các bước giải một phương trình dạng ẩn để tìm được nghiệm xấp xỉ x_k và sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được nghiệm xấp xỉ x_k gần với nghiệm chính xác của bài toán. Xuất phát từ ý tưởng khắc phục đặc điểm này của phương pháp lặp ẩn, chúng tôi thiết lập hai phương pháp lặp hiện dựa trên hai phương pháp lặp ẩn (2.3) và (2.5).

Phương pháp 2.4. *Xuất phát từ một điểm $x_1 \in E$ tùy ý, chúng tôi xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau:*

$$x_{n+1} = \gamma_n F_n x_n + (1-\gamma_n) T_n x_n, \quad n \geq 1,\ x_1 \in E. \tag{2.6}$$

Phương pháp 2.5. *Xuất phát từ một điểm $x_1 \in E$ tùy ý, chúng tôi xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau:*

$$x_{n+1} = (1-\gamma_n) x_n + \gamma_n T_n F_n x_n. \tag{2.7}$$

Các ánh xạ T_n và F_n trong (2.6) và (2.7) lần lượt được xác định bởi

$$T_n x = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x ds, \tag{2.8}$$

$$F_n x = (I - \lambda_n F)x, \quad \text{với mọi } x \in E, \tag{2.9}$$

và $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$, $\{t_n\}$ là các dãy tham số thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\lambda_n \in (0,1),\ \lambda_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty, \tag{2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0, \tag{2.11}$$

và

$$\gamma_n \in (0,1) \text{ sao cho } 0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \le \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1. \tag{2.12}$$

2.2.2. Sự hội tụ

Mệnh đề 2.1 *Giả sử $F : E \to E$ là là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$ và cho $\{T(t) : t \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E, với E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều, sao cho $\mathcal{F} := \cap_{t\ge 0}\mathrm{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Nếu tồn tại một dãy bị chặn $\{x_n\}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0$, với mọi $t \ge 0$, và tồn tại một dãy $\{y_k\}$ sao cho $p_* = \lim_{k\to\infty} y_k$, trong đó $\{y_k\}$ xác định bởi* (2.3), *tức là*

$$y_k = \gamma_k (I - \lambda_k F) y_k + (1-\gamma_k) \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} T(s) y_k ds,$$

thì

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F p_*, j(p_* - x_n)\rangle \le 0. \tag{2.13}$$

Định lí 2.4 *Cho E, F, $\{T(s) : s \ge 0\}$ và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ bởi* (2.6) *và các điều kiện* (2.10)-(2.12) *thỏa mãn. Khi đó dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm bất đẳng thức biến phân* (1.1).

Chú ý 2.2 Chúng tôi đã cải tiến kết quả (2.6) theo hướng không sử dụng tích phân Bochner $T_n x = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x ds$ mà thay bằng ánh xạ $T(t_n)$ xác định từ nửa nhóm $\{T(s) : s \ge 0\}$. Khi đó phương pháp (2.6) trở thành

$$x_{n+1} = \gamma_n (I - \lambda_n F)x_n + (1-\gamma_n)T(t_n)x_n, \quad n \ge 1,\ x_1 \in E. \tag{2.14}$$

với $\lambda_n \in (0,1], \gamma_n \in (0,1)$ và $t_n > 0$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{t_n} = 0$. Sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.14) được chứng minh với các điều kiện đặt lên không gian Banach E, ánh xạ F và nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ tương tự như trong Định lý 2.4.

Hệ quả 2.1 *Cho E, F, $\{T(s) : s \geq 0\}$ và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ bởi* (2.14) *và các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $\lambda_n \in (0,1], \gamma_n \in (0,1)$ *và* $t_n > 0$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{t_n} = 0$.

Khi đó dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm bất đẳng thức biến phân (1.1).

Phương pháp lặp (2.14) là dạng hiện tương ứng của phương pháp (2.4) đã xét trong Định lý 2.2. Tiếp theo chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý về sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (2.7).

Định lí 2.5 *Giả sử E, F, và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, thiết lập $\{x_n\}$ bởi* (2.7) *và các điều kiện* (2.10)-(2.12) *thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm của* (1.1) *khi $n \to \infty$.*

Nhận xét 2.2

(a) Phương pháp (2.6) là dạng hiện tương ứng cho phương pháp (2.3) xét trong Định lý 2.1 và phương pháp (2.14) là dạng hiện tương ứng của dãy lặp ẩn (2.4) xét trong Định lý 2.2.

(b) Một số kết quả nghiên cứu theo hướng tiếp cận xây dựng phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn của các tác giả khác có thể kể đến như các kết quả của Ceng và các cộng sự (2008), Chen và He (2007), Yang và đồng nghiệp (2012), Yao và đồng tác giả (2010). Sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp hiện (2.6), (2.7) và (2.14) được chứng minh mà không cần dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E. Các phương pháp được kể đến ở trên cũng được các tác giả xét đến trong không gian Hilbert hoặc không gian Banach có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy. Sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp hiện (2.6), (2.7) và (2.14) trong các Định lý 2.4, Định lý 2.5 và Hệ quả 2.1 được chứng minh cũng không cần dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E. Như vậy có thể khẳng định các kết quả về phương pháp lặp hiện (2.6), (2.7) và (2.14) có tính cải tiến và mở rộng hơn các kết quả đã đề cập đến ở trên.

(c) Tích phân Bochner của toán tử $T(s), s \geq 0$ tại bước lặp thứ n trong các phương pháp lặp ẩn (2.3), (2.4), (2.5) và phương pháp lặp hiện (2.6), (2.7), (2.14) xác định bởi $T_n x_n = \int_0^{t_n} T(s)x_n ds$ có thể tính gần đúng bởi tổng Riemann (Neerven, 2002).

2.3. Ví dụ số minh họa

Trong mục này chúng tôi trình bày một ví dụ số nhằm minh họa cho các thuật toán lặp ẩn (2.3), (2.4), và (2.5), các phương pháp lặp hiện (2.6), (2.7) và (2.14) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân bằng ngôn ngữ MATLAB 7.0 và đã chạy thử nghiệm trên máy tính DELL INSPIRON, CORE i5, RAM 1,7GHz.

Xét bài toán cực trị có ràng buộc

$$\varphi(p_*) = \min_{x \in C} \varphi(x), \tag{2.15}$$

với C là tập con khác rỗng lồi đóng trong không gian Euclid $\mathbb{R}^N$, với $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là hàm lồi chính thường liên tục trên $\mathbb{R}^N$ có dạng

$$\varphi(x) = \|x - a\|^2,\ x \in \mathbb{R}^N, a = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N.$$

Khi đó, ta có gradient $\bigtriangledown\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ của hàm φ là

$$\bigtriangledown\varphi(x) = 2(x - a),$$

và điều kiện tối ưu cho bài toán (2.15) là bất đẳng thức biến phân sau:

$$\langle \bigtriangledown\varphi(p_*), x - p_* \rangle \geq 0,\ \forall x \in C. \tag{2.16}$$

Xét trường hợp $N = 100$ và $C = \mathcal{F}$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm các ánh xạ không giãn $\{T(t) : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100},\ t \geq 0\}$ sau:

$$T(t)x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{98} \\ x_{99} \\ x_{100} \end{pmatrix},$$

với $x = (x_1, x_2, \dots, x_{100})^T \in \mathbb{R}^{100}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định. Khi đó dễ dàng kiểm tra được $\{T(t) : t \geq 0\}$ thỏa mãn các tính chất của nửa nhóm không giãn và $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^{100} :\ x = (0, \dots, 0, x_5, \dots, x_{98}, 0, 0)^T\}$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$. Nghiệm đúng của bài toán (2.15) là điểm $p_* = (0, 0, 0, 0, 1, \dots, 1, 0, 0)^T \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{100}$.

Chúng tôi sử dụng các phương pháp lặp ẩn (2.3), (2.4) và (2.5); các phương pháp lặp hiện (2.7) và (2.6) để tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.16) cũng chính là nghiệm của bài toán (2.15) với hàm $F(x) = \bigtriangledown\varphi(x)$ có tính chất 2-đơn điệu mạnh và 1-liên tục Lipschitz.

Chương 3
Phương pháp hiệu chỉnh giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu các phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$. Nội dung của chương được trình bày trong 4 mục. Trong Mục 3.1 và Mục 3.2, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bài toán (1.1). Trong Mục 3.3, chúng tôi kết hợp phương pháp hiệu chỉnh trong Mục 3.1 với kĩ thuật lặp hiện để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach q-trơn đều. Mục 3.4, chúng tôi đưa ra ví dụ số mang tính chất minh họa cho các phương pháp đã đề xuất. Các kết quả của chương này được lấy từ các bài báo (1), (4) và (5) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

3.1. Phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov

Những nghiên cứu về phương pháp hiệu chỉnh trong không gian Banach xuất phát từ nhiều quan điểm Toán học khác nhau: một mặt, tồn tại nhiều ứng dụng trong thực hành mà việc sử dụng mô hình toán học thiết lập trong không gian Hilbert, chẳng hạn như phương trình toán tử trong không gian $L^2[a, b]$, không còn thực tế và thích hợp. Những ứng dụng này đòi hỏi đến một mô hình toán học tổng quát hơn xét trong các không gian Banach $L^p[a, b]$, không gian Sobolev, hoặc không gian các hàm liên tục; mặt khác, những công cụ toán học và các kĩ thuật điển hình của không gian Banach có thể giúp chúng ta vượt qua những hạn chế của những bài toán thiết lập trong không gian Hilbert. Thực tế cho thấy rằng các không gian Banach cho phép chúng ta thiết lập các mô hình cho các ứng dụng cụ thể trong một môi trường tổng quát hơn so với khi chỉ xét mô hình đó trong không gian Hilbert. Chẳng hạn, khi người ta xét đến những bài toán ứng dụng như nhiễu xạ tia X, bài toán xác định tham số của phương trình đạo hàm riêng, hay các bài toán ngược trong tài chính.

Ta biết rằng bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach nói chung là một bài toán đặt không chỉnh. Do vậy các phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach cũng là một chủ đề nghiên cứu cần được quan tâm. Xét bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu, khi $F : E \to E$ là j-đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz và tập ràng buộc $C := \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$, năm 2012, sử dụng V-ánh xạ, Buong và Phuong đã đưa ra phương trình hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov cho bài toán này. Sau đó, tác giả Thuy (2015) đã cải tiến kết quả trên cho bài toán tương tự bằng cách sử dụng S-ánh xạ có cấu trúc đơn giản hơn V-ánh xạ. Mở rộng kết quả của Buong và Phuong (2012) và Thuy (2015) từ $C := \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ lên $C := \mathcal{F} = \cap_{s\geq 0} \mathrm{Fix}(T(s))$, ta xây dựng phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ trong không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều như sau.

Phương pháp 3.1. *Phương trình hiệu chỉnh cho bất đẳng thức biến phân* (1.1) *được cho bởi*

$$A_n x_n + \varepsilon_n F x_n = 0, \; n \geq 0 \tag{3.1}$$

trong đó $A_n = I - T_n$, *và* T_n *được xác định bởi*

$$T_n x = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x ds \quad \text{với mọi } x \in E, \tag{3.2}$$

và $\{t_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ *là các dãy tham số dương thỏa mãn* $t_n \to \infty$ *và* $\varepsilon_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$.

Định lí 3.1 *Cho* E *là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* η-j-*đơn điệu mạnh và* L-*liên tục Lipschitz với* η *and* L *là các tham số dương. Cho* $\{T(s) : s \geq 0\} : E \to E$ *là nửa nhóm không giãn trên* E *sao cho* $\mathcal{F} = \cap_{s\geq 0} \mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. *Khi đó,* *(i) Với mỗi $t_n > 0$ và $\varepsilon_n > 0$, phương trình hiệu chỉnh (3.1) có duy nhất nghiệm x_n.*

(ii) Nếu các dãy tham số t_n và ε_n được chọn sao cho

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p_* \in \mathcal{F}$ thỏa mãn bất đẳng thức biến phân (1.1).

(iii) Hơn nữa, ta có đánh giá sau:

$$\|x_n - x_m\| \leq \left(\frac{|\varepsilon_m - \varepsilon_n|}{\varepsilon_n} + 2\frac{|t_m - t_n|}{\varepsilon_n t_m}\right)\frac{M_1}{\eta} \tag{3.3}$$

ở đây M_1 là một tham số dương, x_n, x_m là các nghiệm hiệu chỉnh của (3.1) với các dãy tham số tương ứng t_n, ε_n và t_m, ε_m.

Chú ý 3.1 Đánh giá (3.3) trong Định lý 3.1 được dùng để chứng minh các kết quả của Định lý 3.2 và Định lý 3.5. Ngoài ra, khi các tham số t_n, t_m và $\varepsilon_n, \varepsilon_m$ được chọn thích hợp thì vế phải của (3.3) sẽ hội tụ về 0 khi $n, m \to \infty$, chẳng hạn khi $m = n + 1$ và t_n, ε_n thỏa mãn các điều kiện (i) và (iv) của Định lý 3.2 được phát biểu ngay sau đây.

3.2. Phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính

Dựa vào phương pháp hiệu chỉnh (3.1), chúng tôi kết hợp hiệu chỉnh với phương pháp điểm gần kề quán tính để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính như sau.

Phương pháp 3.2. *Xuất phát từ hai điểm $z_0, z_1 \in E$ bất kỳ, ta xây dựng dãy $\{z_n\}$ xác định bởi phương trình dưới đây:*

$$c_n(A_n + \varepsilon_n F)(z_{n+1}) + z_{n+1} - z_n = \gamma_n(z_n - z_{n-1}), \tag{3.4}$$

ở đây $\{c_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy tham số dương.

Định lí 3.2 *Giả sử E, $\mathcal{F}$, và F thỏa mãn lần lượt các điều kiện như trong Định lý 3.1. Giả sử các dãy tham số c_n, ε_n, t_n và γ_n được chọn* *sao cho*

(i) $0 < m < c_n < M,\ 0 \le \gamma_n < \gamma_0;\ 1 \ge \varepsilon_n \searrow 0,\ t_n \to \infty;$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty,\ b_n = \eta c_n \varepsilon_n/(1+\eta c_n \varepsilon_n);$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n b_n^{-1} \|z_n - z_{n-1}\| = 0;$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n^2 t_{n+1}} = 0.$

Khi đó, dãy lặp $\{z_n\}$ được xác định bởi (3.4) hội tụ mạnh về điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.1) khi $n \to +\infty$.

Nhận xét 3.1

(a) Trong trường hợp $\{T(s) : s \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên một tập con lồi đóng khác rỗng C của E, chúng tôi xét phương trình hiệu chỉnh sau:

$$(I - T_n Q_C)x_n + \varepsilon_n F x_n = 0. \tag{3.5}$$

Với các điều kiện tương tự như trong Định lý 3.1, chúng tôi cũng thu được các kết quả tương tự như (i), (ii) và (iii) của Định lý 3.1.

Hệ quả 3.1 *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Banach lồi đều và trơn đều E và cho $\{T(t) : t \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C sao cho $\mathcal{F} = \cap_{t\ge 0}\mathrm{Fix}(T(t)) \ne \emptyset$. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz với η và L là các số thực dương cố định. Khi đó ta có:*

(i) Với mỗi $t_n > 0$ và $\varepsilon_n > 0$, phương trình hiệu chỉnh (3.5) có nghiệm duy nhất x_n.

(ii) Nếu các tham số t_n và ε_n được chọn sao cho $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ thì dãy nghiệm hiệu chỉnh $\{t_n\}$ hội tụ mạnh về điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (1.1).

(iii) Hơn nữa, với x_n và x_m lần lượt là các nghiệm hiệu chỉnh ứng với các tham số t_n, ε_n và t_m, ε_m ta có đánh giá sau:

$$\|x_n - x_m\| \le \left(\frac{|\varepsilon_m - \varepsilon_n|}{\varepsilon_n} + 2\frac{|t_m - t_n|}{\varepsilon_n t_m} \right) \frac{M_1}{\eta}.$$

(b) Khi $E \equiv H$, chúng tôi nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov và phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ trên một tập con C lồi đóng của không gian Hilbert H có $\mathcal{F} = \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$ mà không dùng đến tích phân Bochner. Bài toán được phát biểu dưới dạng như sau: *Tìm điểm $p \in \mathcal{F}$ thỏa mãn*

$$\|x_* - p\| = \min_{y\in\mathcal{F}} \|x_* - y\|, \tag{3.6}$$

trong đó x_* là một điểm thuộc H nhưng không thuộc $\mathcal{F}$.

Xuất phát từ ý tưởng hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn dưới dạng (3.1), chúng tôi xây dựng phương pháp hiệu chỉnh để tìm nghiệm của bài toán (3.6) mà không dùng đến tích phân Bochner $T_n x = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x ds$ dưới dạng như sau: tìm phần tử $x_n \in H$ sao cho

$$A^C(t_n)x_n + \varepsilon_n(x_n - x_*) = 0, \quad A^C(t_n) = I - T(t_n)P_C, \tag{3.7}$$

ở đây I là ánh xạ đồng nhất trong H, P_C là ánh xạ chiếu mêtric từ H lên tập con C và $\{t_n\}, \{\varepsilon_n\}$ là hai dãy thực dương thỏa mãn một số điều kiện xác định.

Định lí 3.3 *Cho H là không gian Hilbert, C là tập con khác rỗng lồi đóng của H, và $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} \mathrm{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Khi đó ta có:*
(i) Với mỗi ε_n, $t_n > 0$, phương trình (3.7) có nghiệm duy nhất x_n.
(ii) Nếu ε_n và t_n được chọn sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = 0, \ \limsup_{n\to\infty} t_n > 0, \ \lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0 \ \text{và} \ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

thì $\lim_{k\to\infty} x_k = p$, là nghiệm duy nhất của bài toán (3.6).

Ngoài ra, ta có đánh giá cho $\|x_n - x_m\|$ với x_n, x_m là các nghiệm hiệu chỉnh với các tham số hiệu chỉnh tương ứng ε_n và ε_m trong bổ đề sau đây. Bổ đề 3.1 được dùng để chứng minh sự hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề và phương pháp hiệu chỉnh lặp cho nửa nhóm không giãn mà ta sẽ xét trong Định lý 3.4 và Định lý 3.6 (xem (4) trong Danh mục các công trình công bố để biết thêm chi tiết).

Bổ đề 3.1 *Cho H, C, $\{T(t): \ t \geq 0\}$ và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 3.3. Cho x_n và x_m là nghiệm hiệu chỉnh của phương trình* (3.7) *với các tham số hiệu chỉnh tương ứng ε_n và ε_m. Nếu $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ với mỗi $x \in C$, ở đây $\gamma(x)$ là một hàm bị chặn thì*

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_m|}{\varepsilon_n}\|y - x_*\| + \frac{|t_n - t_m|}{\varepsilon_n}\gamma_1$$

với mỗi ε_n, ε_m, t_n, $t_m > 0$, $y \in \mathcal{F}$, và hằng số dương γ_1.

Phương pháp thứ hai được thiết lập dựa trên việc kết hợp phương pháp điểm gần kề do Rockafellar (1976) đề xuất với phương pháp hiệu chỉnh (3.7) và được gọi là phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề. Ý tưởng để xây dựng thuật toán thứ hai ở đây là thiết lập dãy lặp $\{z_n\}$ cho bài toán (3.6) như sau. Từ một điểm bất kì $z_0 \in H$, dãy $\{z_n\}$ được xác định từ phương trình:

$$c_n[A^C(t_n)z_{n+1} + \varepsilon_n(z_{n+1} - x_*)] + z_{n+1} = z_n, \quad n \geq 0, \tag{3.8}$$

với $\{c_n\}$ là thực dương dãy bị chặn.

Định lí 3.4 *Cho H là không gian Hilbert, C là tập con khác rỗng lồi đóng của H, và $\{T(t): \ t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \bigcap_{t\geq 0} \mathrm{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử các tham số c_n, t_n và ε_n được chọn sao cho*

(i) $0 < m < c_n < M$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0,\ \limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$;

(iii) $\varepsilon_n \leq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty,$ *với* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{\varepsilon_n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n^2} = 0$;

và $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ với mỗi $x \in C$, ở đây $\gamma(x)$ là hàm bị chặn. Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (3.8) *hội tụ mạnh đến một thành phần $p \in \mathcal{F}$ thỏa mãn bài toán* (3.6)*, khi $n \to +\infty$.*

Chúng tôi đã thu được sự hội tụ mạnh của các phương pháp (3.7) và (3.8) về điểm p là nghiệm có x_* chuẩn nhỏ nhất trong $\mathcal{F}$.

Trong trường hợp $C \equiv H$ thì các phương pháp (3.7) và (3.8) sẽ có dạng như sau:

$$(I - T(t_n))x_n + \varepsilon_n(x_n - x_*) = 0,$$
$$c_n[(I - T(t_n))z_{n+1} + \varepsilon_n(z_{n+1} - x_*)] + z_{n+1} = z_n, \quad n \geq 0.$$

3.3. Phương pháp hiệu chỉnh lặp

Bằng cách kết hợp phương pháp hiệu chỉnh với phương pháp lặp hiện, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp để xấp xỉ nghiệm cho bất đẳng thức biến phân (1.1) bắt đầu từ một điểm bất kì $w_1 \in E$ dưới dạng như sau:

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n[A_n w_n + \varepsilon_n F w_n], \quad n \geq 1, \tag{3.9}$$

với $A_n = I - T_n$ và dãy $\{\beta_n\}$ thỏa mãn một vài điều kiện xác định.

Định lí 3.5 *Cho E là không gian Banach lồi đều và q-trơn đều với hằng số cố định $q : 1 < q \leq 2$. Cho $\mathcal{F}$ và F thỏa mãn các điều kiện như Định lý 3.1. Giả sử*

$$(i)\ 0 < \beta_n < \beta_0,\ \varepsilon_n \searrow 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{\varepsilon_n^2 \beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n+1}|}{\beta_n \varepsilon_n^2 t_n} = 0,$$

$$(ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \beta_n = \infty, \quad \limsup_{n\to\infty} C_q \beta_n^{q-1} \frac{(2 + \varepsilon_n L)^p}{\varepsilon_n \eta} < 1,$$

với C_q là hằng số q-trơn đều của E. Khi đó, dãy lặp $\{w_n\}$ được xác định bởi (3.9)*, hội tụ mạnh về điểm p_*, thỏa mãn bất đẳng thức biến phân* (1.1).

Nhận xét 3.2

(a) Các tác giả Buong–Phuong (2012) và Thuy (2015) cũng sử dụng phương pháp hiệu chỉnh lặp với cấu trúc thuật toán tương tự như (3.9) để tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán (1.1), trong đó, Buong và Phuong (2012) sử dụng V-ánh xạ V_n và Thuy (2015) sử dụng S-ánh xạ S_n thay cho ánh xạ T_k trong (3.9) khi tập $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Banach lồi đều và trơn. Phương pháp hiệu chỉnh lặp hiện chúng tôi xét trong Định lý 3.5 là một mở rộng cho các kết quả trên. Tuy nhiên kết quả của chúng tôi cần thêm tính trơn đều của không gian Banach E.

(b) Dựa trên ý tưởng kết hợp phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov với lược đồ lặp hiện để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn phát biểu dưới dạng

(3.6) trong không gian Hilbert, chúng tôi đã xây dựng và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi lược đồ lặp sau đây:

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n[A^C(t_n)w_n + \alpha_n(w_n - x_*)],\ n \geq 0,\ w_0 \in H, \quad (3.10)$$

ở đây $\{\beta_n\}$ là dãy thực dương thỏa mãn một số điều kiện xác định.

Định lí 3.6 *Cho H, C, $\{T(t), t \geq 0\}$, và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 3.3. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*
(i) $\beta_n \leq \frac{\alpha_n}{4+4\alpha_n+4\alpha_n^2}$ với mọi n, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{\alpha_n^2\beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n+1}|}{\alpha_n^2\beta_n} = 0$, và $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\beta_n = +\infty, \quad \alpha_n \to 0$;
(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$;
(iii) $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ với mỗi $x \in C$, trong đó $\gamma(x)$ là hàm bị chặn.
Khi đó, dãy $\{w_n\}$ xác định bởi (3.10) hội tụ mạnh về điểm $p \in \mathcal{F}$ thỏa mãn (3.6), khi $n \to +\infty$.

3.4. Ví dụ số minh họa

Trong mục này, chúng tôi sử dụng các phương pháp hiệu chỉnh (3.1), (3.4) và (3.9) để giải bất đẳng thức biến phân (2.16) và các phương pháp hiệu chỉnh (3.7), (3.8) và (3.10) để tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn đã xét trong bài toán (2.15) ở Chương 2 bằng ngôn ngữ MATLAB 7.0 và đã chạy thử nghiệm trên máy tính DELL INSPIRON, CORE i5, RAM 1,7GHz..

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

(1) Nghiên cứu xây dựng các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện tương ứng dựa trên phương pháp lai ghép dạng đường dốc cho bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach E mà không cần dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j của E. Kết quả này làm mở rộng lớp các không gian Banach áp dụng cho thuật toán.

(2) Thiết lập phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder—Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach lồi đều và trơn đồng thời xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach q-trơn đều.

(3) Đưa ra phương pháp hiệu chỉnh để tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert không cần dùng đến tích phân Bochner.

(4) Đưa ra các ví dụ số minh họa cho các phương pháp đã đề xuất.

Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo:

(1) Nghiên cứu nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên hàm F, chẳng hạn, các điều kiện đơn điệu hoặc giả đơn điệu.

(2) Nghiên cứu các tiêu chuẩn dừng của các phương pháp lặp đã đề xuất từ đó có cơ sở để so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp đã đề xuất so với các kết quả của một số tác giả khác.

(3) Nghiên cứu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách (bất đẳng thức biến phân nhiều bậc).

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

(1) Phạm Thanh Hiếu (2014), "Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, Tập 126, số 12, tr. 87-92.

(2) Nguyen Buong, Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013), "An explicit iteration method for a class of variational inequalites in Banach spaces", *Kỷ yếu Hội thảo khoa học quốc gia lần thứ XV về một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và Truyền thông*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

(3) Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013), "Implicit iteration methods for variational inequalites in Banach spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, (2) 36(4), pp. 917-926 (SCIE).

(4) Pham Thanh Hieu, Nguyen Thi Thu Thuy (2015), "Regularization methods for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", *Vietnam J. Math.*, DOI 10.1007/s10013-015-0178-3 (SCOPUS).

(5) Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu, Jean Jacques Strodiot (2016), "Regularization methods for accretive variational inequalities over the set of common fixed points of nonexpansive semigroups", *Optimization*, DOI 10.1080/02331934.2016.1166501 (SCIE).