BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

PHẠM THANH HIẾU

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: **Toán Giải tích**
Mã số: **62 46 01 02**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy
2. GS. TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy và GS. TS. Nguyễn Bường. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan của mình.

Tác giả

Phạm Thanh Hiếu

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TS. Nguyễn Bường và TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy và Cô.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng và seminar tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và những ý kiến đóng góp quý báu của GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Đinh Nho Hào, GS. TS. Nguyễn Văn Hiền, GS. TS. Jean Jacques Strodiot, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, PGS. TS. Phạm Ngọc Anh, PGS. TS. Hà Trần Phương, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, TS. Nguyễn Công Điều, TS. Vũ Mạnh Xuân và TS. Trịnh Thị Diệp Linh. Từ đáy lòng mình tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các Thầy và Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Phòng Đào tạo - Bộ phận đào tạo Sau đại học và Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả có thể hoàn thành luận án của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm và các thầy cô giáo trong Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Nông Lâm cùng toàn thể anh chị em nghiên cứu sinh chuyên ngành Toán Giải tích, bạn bè đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu, seminar và hoàn thành luận án.

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình niềm vinh hạnh to lớn này.

Tác giả

Phạm Thanh Hiếu

Mục lục

Danh sách các ký hiệu và chữ viết tắt

H	không gian Hilbert
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
sgn	hàm dấu
$\cap$	phép giao
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
c	không gian các dãy số hội tụ

c_0	không gian các dãy số hội tụ về 0
$C[a,b]$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$l^p,\ 1 \le p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
l_∞	không gian các dãy số bị chặn
$L^p[a,b],\ 1 \le p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
L_∞	không gian các hàm bị chặn
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\mathcal{H}(C_1,C_2)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp C_1 và C_2
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$\alpha_n \searrow \alpha_0$	dãy số thực $\{\alpha_n\}$ hội tụ giảm về α_0
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J_q	ánh xạ đối ngẫu tổng quát
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$W_p^m(\Omega)$	không gian Sobolev
n	số bước lặp
$\mathrm{int}(C)$	phần trong của tập hợp C
$\mathrm{CVI}(F,C)$	bất đẳng thức biến phân cổ điển trên tập C
$\mathrm{VI}(F,C)$	bất đẳng thức biến phân trên tập C với $F: E \to E^*$
$\mathrm{VI}^*(F,C)$	bất đẳng thức biến phân trên tập C với $F: E \to E$

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Cho H là không gian Hilbert, C là một tập con lồi đóng của H và $F : H \to H$ là một ánh xạ. Bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển (*classical variational inequality*), ký hiệu là CVI(F, C), được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm điểm } x_* \in C \textit{ thỏa mãn: } \langle Fx_*, x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{0.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nhà toán học người Italia, Stampacchia (Lions và Stampacchia, 1967 [51]; Stampacchia, 1964 [68]), nghiên cứu và đưa ra đầu tiên vào cuối những năm 60 và đầu những năm 70 của thế kỷ trước. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự, thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu do vai trò quan trọng của bài toán trong lý thuyết toán học cũng như trong nhiều ứng dụng thực tế. Bất đẳng thức biến phân được chỉ ra là một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán cân bằng chẳng hạn như bài toán cân bằng mạng giao thông [34], [56], bài toán cân bằng thị trường độc quyền nhóm, bài toán cân bằng tài chính [54] và bài toán cân bằng di cư [11], [47].

Các nghiên cứu về bất đẳng thức biến phân có thể chia theo hai hướng chính bao gồm những nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm (Chen, 1992 [28]; Giannessi, 2000 [36]) và các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân. Cho đến nay người ta đã thiết lập được nhiều kĩ thuật giải bất đẳng thức biến phân, chẳng hạn phương pháp chiếu của Lions (1977) [50], nguyên lý bài toán phụ của Cohen (1980) [32], phương pháp điểm gần kề của Martinet (1970) [53], phương pháp điểm gần kề quán tính do Alvarez và Attouch (2001) [6] đề xuất và phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov

(Browder, 1966 [16]; Tikhonov, 1963 [76]). Ở Việt Nam, trong một số năm trở lại đây bất đẳng thức biến phân đã trở thành một chủ đề nghiên cứu rất sôi động của các nhà nghiên cứu toán giải tích và toán ứng dụng. Một số tác giả trong nước có nhiều công trình nghiên cứu về bất đẳng thức biến phân có thể kể đến như N. Bường và N. T. T. Thủy (Buong, 2012 [24]; Thuy, 2015 [75]), N. Đ. Yên (Lee và đtg, 2005 [49]; Tam và đtg, 2005 [73]), L. D. Mưu và P. N. Anh (Anh và đtg, 2005 [7], 2012 [8]), P. H. Sách (Sach và đtg, 2008 [61]; Tuan và Sach, 2004 [64]) và P. Q. Khánh (Bao và Khanh, 2005 [13], 2006 [14]), ... Ngoài ra, bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan như điểm bất động và bài toán cân bằng cũng đã và đang là đề tài nghiên cứu của nhiều tác giả là tiến sĩ và nghiên cứu sinh trong nước như L. T. T. Dương (Buong và Duong, 2011 [21]), N. Đ. Lạng (Buong và Lang, 2011 [22]), T. M. Tuyên (Tuyen, 2012 [77]), N. Đ. Dương (Bường và Duong, 2011 [23]), D. V. Thông (Thong, 2011 [74]), N. T. H. Phương (Buong và Phuong, 2013 [25]), Đ. D. Thành (Anh và đtg, 2015 [9]), N. S. Hà (Buong và đtg, 2015 [26]) và P. D. Khánh (Khanh, 2015 [46]), ...

Khi tập ràng buộc C của bài toán (0.1) được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một ánh xạ không giãn hoặc một họ các ánh xạ không giãn thì bài toán (0.1) còn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế như xử lý tín hiệu [33], [41], khôi phục ảnh [39], [63], kiểm soát năng lượng trong hệ thống mạng CDMA [42], phân phối băng thông [43], [62] và bài toán điều khiển tối ưu [44]. Đối với lớp bài toán này, phương pháp lai ghép đường dốc của Yamada đề xuất năm 2001 [84] để giải (0.1) tỏ ra là phương pháp khá hiệu quả khi ánh xạ $F : H \to H$ là thỏa mãn điều kiện đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz vì nó đã khắc phục được khó khăn của việc thực hiện phép chiếu mêtric P_C lên tập con lồi đóng bất kỳ C khi dùng dãy lặp Picard dạng $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n F x_n)$ để giải (0.1). Dựa trên cách tiếp cận của Yamada, đã có nhiều nghiên cứu nhằm mở rộng và cải biên thuật toán lai ghép dạng đường dốc cho các bài toán phức tạp hơn chẳng hạn bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc C là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn ([20], [21]), họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn và nửa nhóm các ánh xạ không giãn. Chẳng hạn, khi $C := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$, với $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ là họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trên H, Yao và các cộng sự (2010) [86] và Wang (2011) [79] đã sử dụng phương pháp lai ghép đường dốc kết hợp với W-ánh xạ [72] để thiết lập dãy lặp hội tụ mạnh về nghiệm của bất đẳng thức biến phân (0.1). Khi $C = \mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s))$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ trên H, Yang và đồng tác giả (2012) [85] đã sử dụng ánh xạ tích phân Bochner trong dãy lặp để giải bất đẳng thức biến phân cổ điển trên tập ràng buộc $\mathcal{F}$. Tuy nhiên, các phương pháp kể đến ở trên đều được thiết lập trong không gian Hilbert H.

Ta biết rằng, trong các không gian Banach, không gian Hilbert H là không gian có tính chất "khá đẹp" chẳng hạn như tính chất hình bình hành, hoặc sự tồn tại và duy nhất của phép chiếu mêtric P_C từ H lên một tập con lồi đóng bất kỳ C, ... Những tính chất này làm cho việc nghiên cứu các bài toán trong không gian Hilbert trở nên đơn giản hơn so với việc nghiên cứu bài toán đó trong không gian Banach tổng quát. Cũng cần nói thêm rằng, một số vấn đề của toán học được thiết lập và nghiên cứu trong không gian Banach có liên quan đến bất đẳng thức biến phân chẳng hạn như phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng, phương trình toán tử hoặc bài toán điểm bất động trong không gian Banach là một chủ đề nghiên cứu quan trọng của Toán học ([15], [68]). Do vậy việc nghiên cứu đề xuất các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach hoặc mở rộng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân từ không gian Hilbert sang không gian Banach là một chủ đề cần được quan tâm.

Việc mở rộng bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach được xét trong hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất là xét ánh xạ $F : E \to E^*$ biến đổi từ E vào không gian đối ngẫu E^*. Một số phương pháp giải cho bài toán này có thể kể đến như phương pháp chiếu (Alber, 1996 [3]; Iiduka và Takahashi, 2008 [40]; Zeidler, 1985 [87]) và phương pháp hiệu chỉnh (Alber, 1983 [4]; Buong, 1991 [18]; Ryazantseva, 2002 [60]). Trường hợp thứ hai là xét ánh xạ $F : E \to E$ đi từ không gian Banach E vào E.

Một số kết quả nghiên cứu công bố gần đây theo hướng này có thể kết đến Ceng và đtg. (2008) [27], Chen và He (2008) [30], Thong (2011) [74] và Tuyen (2012) [77], [78], ... với các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện dựa trên phương pháp lai ghép đường dốc và các kĩ thuật lặp tìm điểm bất động chẳng như phương pháp lặp Mann [52]. Tuy nhiên một điều quan trọng đảm bảo cho sự hội tụ mạnh của các kết quả này là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E phải thỏa mãn tính chất liên tục yếu theo dãy. Người ta đã chỉ ra rằng các không gian l^p, $1 < p < \infty$, thỏa mãn tính chất này trong khi các không gian $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$ lại không thỏa mãn [31]. Một vấn đề tự nhiên nảy sinh từ đây là liệu có thể xây dựng được các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong các không gian Banach mà không đòi hỏi tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc? Nếu vấn đề được giải quyết thì phạm vi áp dụng các thuật toán sẽ được mở rộng sang các không gian Banach tổng quát hơn không gian l^p, chẳng hạn như không gian $L^p[a,b]$.

Một khía cạnh khác của bất đẳng thức biến phân chính là tính đặt không chỉnh của bài toán [4]. Do đó việc xây dựng các phương pháp giải ổn định cho bất đẳng thức biến phân cũng là một nội dung cần được quan tâm trong đó phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov ([16], [76]) tỏ ra là một phương pháp khá hữu hiệu để giải nhiều lớp bài toán đặt không chỉnh. Năm 2012, Buong và Phuong [24] đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder−Tikhonov cho bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trên tập chấp nhận được là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ trong không gian Banach E bằng việc sử dụng V-ánh xạ như một cải tiến của W-ánh xạ [72] trong phương trình hiệu chỉnh. Rất gần đây, Thuy (2015) [75] cải tiến V-ánh xạ bằng S-ánh xạ có cấu trúc đơn giản hơn V-ánh xạ. Trong trường hợp tập ràng buộc của bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu là tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn thì chưa có các kết quả về phương pháp hiệu chỉnh để giải lớp bài toán này.

Có thể khẳng định rằng, bài toán bất đẳng thức biến phân đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau nhằm xây dựng các phương pháp giải hữu hiệu cho bài toán. Việc xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach là một vấn đề được nảy sinh một cách tự nhiên và cần thiết để làm phong phú và hoàn thiện thêm cho lý thuyết về bài toán quan trọng này. Vì những lí do được phân tích ở trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu cho luận án là "**Phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach**".

Mục đích chính của luận án này là nghiên cứu phương pháp lai ghép đường dốc và phương pháp hiệu chỉnh để giải bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm các ánh xạ không giãn trong không gian Banach E mà không cần đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Cụ thể, luận án sẽ quan tâm giải quyết các vấn đề sau:

1. Xây dựng các phương pháp lai ghép đường dốc dạng ẩn và dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều.
2. Nghiên cứu thiết lập phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu đồng thời kết hợp phương pháp hiệu chỉnh với phương pháp điểm gần kề quán tính để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều; sử dụng kĩ thuật lặp hiện kết hợp với phương pháp hiệu chỉnh để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bài toán tương tự trong không gian Banach q-trơn đều.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị quan trọng cho việc trình bày các kết quả chính ở các chương sau gồm một số đặc trưng hình học của không gian Banach, ánh xạ loại đơn điệu, ánh xạ liên tục Lipschitz và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach. Chương 2 được xây dựng để trình bày các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện tương ứng cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Trong Chương 3, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov và kết hợp phương pháp này với phương pháp điểm gần kề quán tính để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân; đồng thời kết hợp phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov với kĩ thuật lặp hiện để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach q-trơn đều. Ví dụ số mang tính chất minh họa cho các phương pháp đã nghiên cứu được đề cập ở cuối Chương 2 và Chương 3.

Các kết quả của luận án đã được công bố trong các bài báo (1)–(5) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án và được báo cáo tại:

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên các năm 2013, 2014 và 2015.

• Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 11, 24-27/04/2013 và lần thứ 12, 23-25/04/2014, Ba Vì, Hà Nội.

• Đại hội Toán học Toàn quốc lần thứ 8, Nha Trang, 10-14/8/2013.

• Hội thảo quốc gia "Một số vấn đề chọn lọc về công nghệ thông tin và truyền thông" lần thứ 15, Hà Nội, 03-04/12/2012; lần thứ 16, Đà Nẵng, 14-15/11/2013; lần thứ 17, Tây Nguyên, 30-31/10/2014 và lần thứ 18, Thành phố Hồ Chí Minh, 5-6/11/2015.

• The 6th international conference on "High Performance Scientific Computing", Hanoi, Vietnam, March, 16-20, 2015.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về hình học của không gian Banach, bài toán bất đẳng thức biến phân và nửa nhóm không giãn. Nội dung của chương được chia thành 4 mục: Mục 1.1 dành cho việc trình bày một số đặc trưng hình học của không gian Banach, định nghĩa và một số tính chất của ánh xạ j-đơn điệu và ánh xạ liên tục Lipschitz. Mục 1.2 giới thiệu về nửa nhóm không giãn và ứng dụng của nửa nhóm không giãn trong nghiên cứu nghiệm của bài toán Cauchy. Trong Mục 1.3, chúng tôi phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển và một số bài toán liên quan. Mục 1.4 được xây dựng để giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu.

1.1. Một số đặc trưng hình học của không gian Banach

Cho E là không gian Banach với không gian đối ngẫu ký hiệu là E^*. Ta dùng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn trong E và E^* và viết tích đối ngẫu $\langle x, x^*\rangle$ thay cho giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$, tức là $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$.

1.1.1. Không gian Banach phản xạ

Định nghĩa 1.1 Không gian Banach E được gọi là phản xạ, nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in E^*.$$

Định lý 1.1 [1] *Cho E là không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E là không gian phản xạ.

(ii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Ví dụ 1.1 Các không gian vectơ định chuẩn hữu hạn chiều, không gian Hilbert H, không gian l^p, $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$ là các không gian Banach phản xạ.

1.1.2. Không gian Banach lồi và trơn

Ký hiệu $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach E.

Định nghĩa 1.2 Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in S_E$, $x \neq y$, suy ra

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Ví dụ 1.2 Không gian $E = \mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_2$ được xác định bởi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

là không gian lồi chặt. Không gian $E = \mathbb{R}^n, n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_1$ xác định bởi

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

không phải là không gian lồi chặt.

Định nghĩa 1.3 Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon \in (0, 2]$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ thỏa mãn thì tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$.

Ví dụ 1.3 Không gian Hilbert $H, l^p, L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$ là các không gian lồi đều.

Định lý 1.2 [1] *Mọi không gian Banach lồi đều đều là lồi chặt và phản xạ.*

Ví dụ 1.4

(i) Không gian $E = c_0$ với chuẩn $\|.\|_\beta$ được xác định bởi

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2})^{1/2}, \quad x = (x_i) \in c_0$$

là một không gian Banach lồi chặt nhưng không phải là không gian lồi đều.

(ii) Các không gian $l^1, l_\infty, c, c_0, L^1[a,b], C[a,b]$ không lồi chặt và do đó cũng không lồi đều.

Mệnh đề 1.1 [1] *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach phản xạ và lồi chặt E. Khi đó, với mỗi $x \in E$ tồn tại duy nhất một điểm $y \in C$ thỏa mãn*

$$\|x - y\| = d(x, C),$$

với $d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

Chú ý 1.1 Điểm $y \in C$ trong Mệnh đề 1.1 còn được gọi là xấp xỉ tốt nhất của $x \in E$ bởi C.

Định nghĩa 1.4 Cho C là tập con khác rỗng của không gian Banach E. Ánh xạ $P_C : E \to 2^C$ xác định bởi

$$P_C(x) = \left\{ y \in C : \|x - y\| = d(x, C) \quad \forall x \in E \right\}$$

được gọi là phép chiếu mêtric từ E lên C.

Định nghĩa 1.5 Tập con C của không gian Banach E được gọi là tập Chebyshev trong E nếu mỗi điểm $x \in E$ có duy nhất một điểm $y \in C$ là xấp xỉ tốt nhất của x.

Nhận xét 1.1

(i) Từ Mệnh đề 1.1 suy ra, mọi tập con khác rỗng, lồi, đóng của một không gian Banach phản xạ và lồi chặt đều là tập Chebyshev.

(ii) Với mọi tập Chebyshev $C \subset E$, ta có

- $P_C(x)$ là tập chỉ gồm một phần tử.
- $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$ với mọi $x \in E$.

Mệnh đề 1.2 [65] *Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian Banach lồi đều E. Nếu mọi dãy con $\{x_{n_i}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về một điểm duy nhất $p_* \in E$ khi $i \to \infty$ thì cả dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về điểm p_* khi $n \to \infty$.*

Định nghĩa 1.6 Không gian Banach E được gọi là trơn nếu với mỗi điểm x nằm trên mặt cầu đơn vị S_E tồn tại duy nhất một phiếm hàm $g_x \in E^*$ sao cho $\langle x, g_x \rangle = \|x\|$ và $\|g_x\| = 1$.

Ví dụ 1.5

(i) Các không gian $l^p, L^p[a, b], 1 < p < \infty$ là không gian Banach trơn.

(ii) Các không gian $c_0, l^1, L^1, l_\infty, L_\infty$ không phải là không gian trơn.

Tính trơn của không gian Banach có mối liên hệ chặt chẽ với tính khả vi của chuẩn trong không gian Banach.

Định nghĩa 1.7

(i) Chuẩn của không gian Banach E được gọi là khả vi Gâteaux nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$

tồn tại với $x \in S_E$, ký hiệu $\langle y, \triangledown \|x\| \rangle$. Khi đó $\triangledown \|x\|$ được gọi là đạo hàm Gâteaux của chuẩn.

(ii) Chuẩn của E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi $y \in S_E$, giới hạn (1.1) đạt được đều với mọi $x \in S_E$.

(iii) Chuẩn của E được gọi là khả vi Fréchet nếu với mỗi $x \in S_E$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_E$.

(iv) Chuẩn của E được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x, y \in S_E$.

Định lý 1.3 [1] *Không gian Banach E là trơn khi và chỉ khi chuẩn của E khả vi Gâteaux trên $E \setminus \{0\}$.*

Ví dụ 1.6 Không gian Hilbert H là không gian có chuẩn khả vi Gâteaux với $\bigtriangledown\|x\| = x/\|x\|,\ x \neq 0$. Thật vậy, với mỗi $x \in H$ với $x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|^2-\|x\|^2}{t(\|x+ty\|+\|x\|)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2t\langle y,x\rangle+t^2\|y\|^2}{t(\|x+ty\|+\|x\|)} = \Big\langle y, \frac{x}{\|x\|}\Big\rangle.\end{aligned}$$

Vậy chuẩn của H là khả vi Gâteaux với $\bigtriangledown\|x\| = x/\|x\|,\ x \neq 0$.

Độ trơn của không gian Banach E còn được biểu diễn qua mô đun trơn.

Định nghĩa 1.8 Cho E là không gian Banach. Hàm $\rho_E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ được gọi là mô đun trơn của E nếu

$$\begin{aligned}\rho_E(t) &= \sup\Big\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}-1 :\ \|x\|=1, \|y\|=t\Big\}\\ &= \sup\Big\{\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|}{2}-1 :\ \|x\|=\|y\|=1\Big\},\quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra $\rho_E(0) = 0$ và $\rho_E(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Hơn nữa, ρ_E là hàm lồi, tăng và liên tục.

Ví dụ 1.7 Cho không gian Hilbert H. Khi đó, với $t > 0$

$$\rho_H(t) = \sup\{t\varepsilon/2 - 1 + (1-\varepsilon^2/4)^{1/2} :\ 0 < \varepsilon \leq 2\} = (1+t^2)^{1/2} - 1.$$

Tính trơn đều và q-trơn đều ($q > 1$) của không gian Banach được định nghĩa thông qua mô đun trơn như sau.

Định nghĩa 1.9

(i) Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu $\rho_E(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\rho_E(t)}{t} = 0$.

(ii) Với $q > 1$, E được gọi là không gian q-trơn đều nếu tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $\rho_E(\tau) \leq c\tau^q, \tau \in [0,\infty)$.

Ví dụ 1.8 Không gian $L^p[a,b]$ và l^p có tính trơn như sau:

$$L^p[a,b]\ \ \text{(hoặc)}\ \ l^p\ \ \text{là}\ \begin{cases}p\text{-trơn đều, nếu } 1 < p \leq 2,\\ 2\text{-trơn đều, nếu } p > 2.\end{cases}$$

1.1.3. Ánh xạ đối ngẫu

Định nghĩa 1.10 Ánh xạ $J_q : E \to 2^{E^*},\ q > 1$ (nói chung là đa trị) xác định bởi

$$J_q x = \{u_q \in E^* : \quad \langle x, u_q\rangle = \|x\|\|u_q\|,\ \|u_q\| = \|x\|^{q-1}\},$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian Banach E. Khi $q = 2$, ánh xạ J_2 được ký hiệu là J và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Tức là

$$Jx = \{u \in E^* : \quad \langle x, u\rangle = \|x\|\|u\|,\ \|u\| = \|x\|\}.$$

Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc tồn tại trong mọi không gian Banach. Khẳng định này được suy ra như một hệ quả trực tiếp của Định lý Hahn–Banach. Với số thực x, ta định nghĩa hàm dấu của x như sau

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0, \\ 1 \text{ nếu } x > 0, \\ 0 \text{ nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1.9

(i) Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị I.

(ii) [31] Trong không gian l^p $(1 < p < \infty)$ và $L^p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được xác định như sau:

$$Jx = \left(|x_i|^{p-1}\mathrm{sgn}\ (x_i)\right)_{i=1}^{\infty} \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^p \quad \text{và}$$

$$Jx = \frac{|x|^{p-1}}{\|x\|^{p-1}}\mathrm{sgn}\ (x) \quad \forall x \in L^p[0,1].$$

Bổ đề 1.1 [80] *Cho số thực $q > 1$ và E là không gian Banach thực trơn. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *E là không gian q-trơn đều.*

(ii) Tồn tại một hằng số $C_q > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$, bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\|x+y\|^q \le \|x\|^q + q\langle y, j_q(x)\rangle + C_q\|y\|^q.$$

Chú ý 1.2 Hằng số C_q trong Bổ đề 1.1 còn được gọi là hằng số q-trơn đều của không gian Banach E.

Bổ đề 1.2 [57] *Cho E là không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó, bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle \quad \forall x, y \in E\ \forall j(x+y) \in J(x+y).$$

Định nghĩa 1.11 Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to E^*$ của không gian Banach E được gọi là

(i) liên tục yếu theo dãy nếu J đơn trị và với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về điểm x thì Jx_n hội tụ yếu về Jx theo tôpô yếu* trong E^*.

(ii) liên tục mạnh-yếu* nếu J đơn trị và với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về điểm x thì Jx_n hội tụ yếu về Jx theo tôpô yếu* trong E^*.

Ví dụ 1.10 [31] Không gian l^p, $1 < p < \infty$ có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu. Tuy nhiên, không gian $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$ lại không thỏa mãn tính chất này.

Tính liên tục của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có mối liên hệ với tính khả vi của chuẩn của không gian Banach như khẳng định trong các định lý sau đây.

Định lý 1.4 [1] *Cho E là không gian Banach với ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E là không gian trơn.

(ii) J là đơn trị.

(iii) Chuẩn của E là khả vi Gâteaux với $\bigtriangledown\|x\| = \|x\|^{-1}Jx$.

Chú ý 1.3 Ta dùng ký hiệu j để chỉ ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị.

Định lý 1.5 [1] *Cho E là không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Khi đó ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $j : E \to E^*$ là liên tục đều mạnh-yếu* trên mọi tập con bị chặn trong E.*

1.1.4. Giới hạn Banach

Xét không gian các dãy số bị chặn $\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : \sup_n |x_n| < \infty\}$.

Định nghĩa 1.12 Phiếm hàm $\mu : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn Banach nếu

(i) μ là tuyến tính, tức là: $\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y)$ và $\mu(cx) = c\mu(x)$ với mọi $x, y \in \ell_\infty$ và c là hằng số.

(ii) μ là ánh xạ dương, tức là: $\mu(x) \geq 0$ với mọi $x \in \ell_\infty$ sao cho $x_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\|\mu\| = \mu(1, 1, \ldots) = 1$.

(iv) $\mu(x_1, x_2, \ldots) = \mu(x_2, x_3, \ldots)$ với mỗi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$.

Ta viết $\mu(x_n)$ thay cho $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Sự tồn tại của giới hạn Banach được bảo đảm nhờ Định lý Hahn–Banach.

Định lý 1.6 [1] *Luôn tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục μ trên ℓ_∞ sao cho $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ và $\mu(x_n) = \mu(x_{n+1})$ với mỗi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$.*

Các mệnh đề sau đây cho ta những tính chất quan trọng của giới hạn Banach μ.

Mệnh đề 1.3 [1] *Cho μ là giới hạn Banach. Khi đó*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \mu(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

với mỗi $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$. Hơn nữa, nếu $x_n \to a$, thì $\mu(x_n) = a$.

Bổ đề 1.3 [71] *Cho C là tập con lồi trong không gian Banach E có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trong E, z là một điểm trong C và μ là giới hạn Banach. Khi đó,*

$$\mu\|x_n - z\|^2 = \min_{u\in C} \mu\|x_n - u\|^2$$

khi và chỉ khi $\mu\langle u - z, j(x_n - z)\rangle \le 0$ *với mọi* $u \in C$.

Giới hạn Banach là một mở rộng của khái niệm giới hạn thông thường. Tức là, với mọi $x = \{x_n\} \in c$, thì $\mu(x) = \ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ với mọi giới hạn Banach μ. Tuy nhiên, tồn tại những dãy không hội tụ nhưng lại có giới hạn Banach. Chẳng hạn xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.11 Lấy dãy $x = (1, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell_\infty$. Khi đó

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots) = (1, 1, 1, \ldots),$$

suy ra

$$\mu(x_n) + \mu(x_{n+1}) = \mu(1) = 1 \quad \forall \mu.$$

Sử dụng điều kiện (ii) trong Định nghĩa 1.12, ta có $\mu(x_n) = 1/2$.

Tiếp theo chúng tôi trình bày về một lớp các ánh xạ quan trọng trong lý thuyết về bất đẳng thức biến phân và lý thuyết điểm bất động đó là lớp các ánh xạ liên tục Lipschitz và ánh xạ j-đơn điệu.

1.1.5. Ánh xạ liên tục Lipschitz và ánh xạ j-đơn điệu

Định nghĩa 1.13 Cho C là tập con khác rỗng của không gian Banach E.

(i) Ánh xạ $T : C \to E$ được gọi là ánh xạ L-liên tục Lipschitz nếu tồn tại hằng số $L \ge 0$ sao cho

$$\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.2}$$

(ii) Trong (1.2), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

Định nghĩa 1.14 Ánh xạ $T : C \to E$ được gọi là ánh xạ không giãn tiệm cận nếu tồn tại một dãy $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [1, \infty)$ với $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ thì bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\|T^n x - T^n y\| \le k_n\|x - y\| \quad \forall x, y \in C,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ký hiệu $\mathrm{Fix}(T) := \{x \in C : \ Tx = x\}$ là tập điểm bất động của ánh xạ T. Ta có kết quả quan trọng sau về tính chất của tập $\mathrm{Fix}(T)$.

Định lý 1.7 [1]*Cho C là tập con lồi trong không gian Banach lồi chặt E và $T : C \to E$ là ánh xạ không giãn. Khi đó nếu tập điểm bất động* $\mathrm{Fix}(T)$ *của ánh xạ T là khác rỗng thì nó là tập lồi.*

Chú ý 1.4 Do tính liên tục của ánh xạ T nên tập $\mathrm{Fix}(T)$ luôn là tập đóng.

Hệ quả 1.1 [1] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng trong không gian Banach lồi chặt E và $T : C \to E$ là ánh xạ không giãn. Khi đó tập* $\mathrm{Fix}(T)$ *là tập lồi đóng.*

Nếu bỏ tính lồi chặt của không gian Banach E thì Định lý 1.7 không còn đúng.

Ví dụ 1.12 Cho $E = \mathbb{R}^2$ với chuẩn được xác định bởi

$$\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\} \quad \text{với mọi} \;\; x = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Khi đó, $\mathbb{R}^2$ không phải là không gian lồi chặt. Xét ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(a, b) = (|b|, b) \quad \text{với mọi} \;\; x = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Suy ra, T là ánh xạ không giãn với tập điểm bất động là $\mathrm{Fix}(T) = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Tuy nhiên không có điểm nào nằm trên đoạn thẳng nối hai điểm bất động trên là điểm bất động của T chứng tỏ $\mathrm{Fix}(T)$ không phải là tập lồi.

Định nghĩa 1.15 Ánh xạ $T : C \to E$ được gọi là ánh xạ γ-giả co chặt nếu tồn tại hằng số $\gamma \in (0, 1)$ và $j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle Tx - Ty, j(x - y)\rangle \leq \|x-y\|^2 - \gamma\|(I-T)x-(I-T)y\|^2 \quad \forall x, y \in C, \tag{1.3}$$

với γ là hằng số không âm cố định. Trong (1.3), nếu $\gamma = 0$ thì T được gọi là ánh xạ giả co.

Nhận xét 1.2 (xem [1])

(*i*) Nếu $F : E \to E$ là ánh xạ γ-giả co chặt thì F là ánh xạ L-liên tục Lipschitz với $L = 1 + 1/\gamma$.

(ii) Mọi ánh xạ không giãn đều là ánh xạ giả co liên tục.

Định nghĩa 1.16 Ánh xạ $A : E \to E$ được gọi là

(i) η-j-đơn điệu mạnh nếu tồn tại hằng số $\eta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D(A)$, ta có

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq \eta\|x-y\|^2,\ j(x-y) \in J(x-y);$$

(ii) α-j-đơn điệu mạnh ngược (hay α-đồng bức j-đơn điệu) nếu tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho với mọi $x, y \in D(A)$, ta có

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq \alpha\|Ax-Ay\|^2,\ j(x-y) \in J(x-y);$$

(iii) j-đơn điệu nếu với mọi $x, y \in D(A)$, ta có

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq 0,\ j(x-y) \in J(x-y);$$

(iv) j-đơn điệu cực đại nếu A là ánh xạ j-đơn điệu và đồ thị $G(A)$ của ánh xạ A không thực sự bị chứa trong bất kì một đồ thị của một ánh xạ j-đơn điệu khác;

(v) m-j-đơn điệu nếu A là ánh xạ j-đơn điệu và $R(A+I) = E$.

Chú ý 1.5

(i) Trong không gian Hilbert H, các khái niệm toán tử j-đơn điệu cực đại, m-j-đơn điệu và đơn điệu cực đại là trùng nhau.

(ii) Cho $A : E \to E$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó A là j-đơn điệu nếu và chỉ nếu với mọi $x \in D(A)$,

$$\langle Ax, j(x)\rangle \geq 0 \quad j(x) \in J(x).$$

Bổ đề 1.4 [27] *Cho E là không gian Banach trơn và $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Khi đó,*

(i) Ánh xạ $I - F$ là ánh xạ co với hệ số co $\sqrt{(1-\eta)/\gamma}$.

(ii) Với mọi $\lambda \in (0,1)$, $I - \lambda F$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \lambda\tau$, trong đó $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma} \in (0,1)$.

Mệnh đề 1.4 *Cho $A : E \to E$ là ánh xạ m-j-đơn điệu, khi đó A là j-đơn điệu cực đại và $R(I + \lambda A) = E$ với mọi $\lambda > 0$.*

Định nghĩa 1.17 Ánh xạ $A : E \to E$ được gọi là liên tục theo tia tại $x \in D(A)$ nếu $x + t_n y \in D(A)$, với $y \in E$ và $t_n \to 0^+$ thì $A(x + t_n y) \rightharpoonup Ax$ khi $n \to \infty$.

Định lý 1.8 [4] *Cho E là không gian Banach lồi đều và ánh xạ $A : E \to E$ là j-đơn điệu và liên tục theo tia với $D(A) = E$. Khi đó A là ánh xạ j-đơn điệu cực đại.*

Chú ý 1.6 Nếu $T : C \to E$ là một ánh xạ không giãn thì toán tử $I - T$ là j-đơn điệu. Nếu $C \equiv E$ thì $I - T$ là m-j-đơn điệu.

1.2. Nửa nhóm ánh xạ không giãn và bài toán Cauchy với ánh xạ m-j-đơn điệu

1.2.1. Nửa nhóm ánh xạ không giãn

Định nghĩa 1.18 Cho C là tập con lồi, đóng của E. Họ các ánh xạ $\{T(t) : t \geq 0\}$ từ C vào C được gọi là nửa nhóm không giãn trên C nếu

(i) $T(t)$ là ánh xạ không giãn với mỗi $t > 0$;

(ii) $T(0)x = x$ với mọi $x \in C$;

(iii) $T(t + s)x = T(t) \circ T(s)x$ với mọi $x \in C,\ t, s \geq 0$;

(iv) với mọi $x \in C,\ T(.)x : [0, \infty) \to C$ là ánh xạ liên tục theo s.

Ký hiệu $\mathcal{F} = \cap_{t \geq 0} \mathrm{Fix}(T(t))$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Ví dụ 1.13 Một ví dụ về nửa nhóm không giãn trên $\mathbb{R}^3$ là phép quay $T(t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$T(t)x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

ở đây $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định và $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Khi đó $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên $\mathbb{R}^3$ với tập điểm bất động chung $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (0, 0, x_3)^T\}$.

Ta có định lý sau về tính chất của tập điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn.

Định lý 1.9 (xem [31] và tài liệu dẫn) *Cho E là không gian Banach lồi đều, $C \subseteq E$ là tập con lồi, đóng, bị chặn trong E và $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn. Khi đó, T có điểm bất động. Hơn nữa tập điểm bất động* $\mathrm{Fix}(T)$ *của ánh xạ T là một tập lồi đóng.*

Định nghĩa 1.19 Ánh xạ $A : E \to E$ được gọi là thỏa mãn điều kiện (R) nếu A là ánh xạ j-đơn điệu và $\overline{D(A)} \subseteq \cap_{\lambda > 0} R(I + \lambda A)$.

Sau đây là một kết quả quan trọng về sự xác định một nửa nhóm không giãn từ một ánh xạ thỏa mãn điều kiện (R).

Định lý 1.10 (xem [31] và tài liệu dẫn) *Cho $A : E \to E$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (R). Khi đó giới hạn sau*

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = T(t)x \tag{1.4}$$

tồn tại với mọi $x \in D(A)$ và với mọi $t \in [0, +\infty]$. Hơn nữa, (1.4) *xác định một nửa nhóm không giãn trên $\overline{D(A)}$.*

Bổ đề 1.5 [29] *Cho C là tập con khác rỗng, bị chặn, lồi và đóng trong không gian Banach lồi đều E. Cho $\{T(s) : s \geq 0\}$ là nửa nhóm ánh xạ không giãn trên C. Khi đó, với bất kì $r > 0$ và $h \geq 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y \in C \cap B_r} \left\| T(h) \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s) y ds \right) - \frac{1}{t} \int_0^t T(s) y ds \right\| = 0,$$

ở đây $B_r = \{x \in E : \ \|x\| \leq r\}$.

1.2.2. Bài toán Cauchy với ánh xạ m-j-đơn điệu

Cho E là không gian Banach và ánh xạ $A : E \to E$ là ánh xạ m-j-đơn điệu. Xét bài toán Cauchy dưới dạng phương trình tiến hóa như sau

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ với mọi } t > 0, \\ u(0) = x, \quad x \in D(A). \end{cases} \tag{1.5}$$

Nghiệm của bài toán (1.5) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 1.20 Hàm $u : \mathbb{R}_+ \to E$ là nghiệm của bài toán (1.5) nếu u là liên tục tuyệt đối trên các đoạn bị chặn của $\mathbb{R}_+$, khả vi hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}_+$ và $u(0) = x$ thỏa mãn phương trình (1.5) hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}_+$.

Mệnh đề 1.5 [31] *Bài toán* (1.5) *có nhiều nhất một nghiệm.*

Định lý 1.11 [31] *Cho E là không gian Banach và ánh xạ $A : E \to E$ là ánh xạ đóng thỏa mãn điều kiện* (R) *và $T(t)$ là nửa nhóm không giãn xác định bởi công thức* (1.4). *Nếu với $x \in D(A)$, hàm $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto T(t)x$ là khả vi hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}_+$, thì $u(t) = T(t)x$ là nghiệm của bài toán Cauchy* (1.5).

Hệ quả 1.2 [31] *Nếu E là không gian Banach phản xạ và $A : E \to E$ là m-j-đơn điệu thì với mọi $x \in D(A)$, bài toán Cauchy* (1.5) *có duy nhất nghiệm xác định bởi*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n} x, \quad t \geq 0.$$

Hơn nữa, khi $\frac{du}{dt} = 0$, thì phương trình (1.5) trở thành $Au = 0$. Đây chính là trạng thái cân bằng của phương trình (1.5). Như vậy, tập các không điểm $A^{-1}(0)$ của toán tử m-j-đơn điệu A biểu thị trạng thái cân bằng của phương trình tiến hóa (1.5). Theo Hệ quả 1.2 (xem thêm [15]), tập không điểm của toán tử A còn là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$, tức là $A^{-1}(0) = \cap_{t\geq 0}\mathrm{Fix}(T(t))$.

Nếu $A = \partial f$, dưới vi phân của hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, thì tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$ còn là tập các điểm cực trị của hàm f.

1.3. Bất đẳng thức biến phân cổ điển và một số bài toán liên quan

1.3.1. Bất đẳng thức biến phân cổ điển

Cho H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng và chuẩn được ký hiệu lần lượt là $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và ánh xạ $F : C \to H$ là ánh xạ liên tục. Bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển *(classical variational inequality)*, ký hiệu là CVI(F, C), được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm điểm } x_* \in C \textit{ sao cho: } \langle Fx_*, x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1.6}$$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân cổ điển (1.6) phụ thuộc vào tính chất của ánh xạ F và miền ràng buộc C.

Định lý 1.12 [48] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert H và $F : C \to H$ là một ánh xạ liên tục trên C. Giả sử tồn tại một tập con compact khác rỗng U của C sao cho với mọi $u \in C \setminus U$, tồn tại $v \in U$ thỏa mãn*

$$\langle Fu, u - v \rangle > 0.$$

Khi đó, bài toán (1.6) *có ít nhất một nghiệm.*

Ngoài ra tính đơn điệu mạnh của ánh xạ F đảm bảo cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán CVI(F, C).

Định lý 1.13 [48] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert H và $F : C \to H$ là một ánh xạ đơn điệu mạnh và liên tục trên C. Khi đó, bài toán* (1.6) *có duy nhất một nghiệm.*

1.3.2. Một số bài toán liên quan

Bài toán hệ phương trình, bài toán bù phi tuyến và bài toán cực trị được coi là các trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển. Ngoài ra, bất đẳng thức biến phân còn tương đương với bài toán điểm bất động.

1.3.2.1. Hệ phương trình

Nhiều bài toán cân bằng kinh tế được thiết lập dưới dạng hệ phương trình chẳng hạn như bài toán cân bằng cung-cầu của thị trường. Trong (1.6) nếu $C = \mathbb{R}^n$ thì (1.6) trở thành bài toán:

$$\textit{Tìm } x_* \in \mathbb{R}^n \textit{ sao cho: } Fx_* = 0.$$

Nếu F là ánh xạ affine, tức là $F = Mx + q$, thì bài toán trên tương đương lớp bài toán hệ phương trình tuyến tính $Mx_* = q$.

1.3.2.2. Bài toán bù

Định nghĩa 1.21

(i) Tập C trong không gian Hilbert H được gọi là nón nếu với mọi $x \in C$ và hằng số $\lambda > 0$, ta có $\lambda x \in C$.

(ii) Nón C được gọi là nón lồi nếu C là tập lồi trong H.

Chú ý 1.7 Tập lồi C trong H là nón lồi khi và chỉ khi C thỏa mãn các tính chất $\lambda C \subset C$ và $C + C \subset C$.

Cho C là nón lồi trong H, bài toán bù, ký hiệu là CP, được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm điểm } x_* \in C \textit{ sao cho: } Fx_* \in C',\ \langle Fx_*, x_* \rangle = 0, \tag{1.7}$$

với C' *là nón đối ngẫu của* C, *tức là*

$$C' = \{y \in H : \ \langle y, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C\}.$$

Bài toán bù có thể coi là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân như khẳng định trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.6 [47] *Nếu* C *là nón lồi và đóng trong không gian Hilbert* H *thì bài toán* (1.7) *tương đương với bài toán* (1.6).

1.3.2.3. Bài toán cực trị

Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và $f : C \to \mathbb{R}$ là phiếm hàm lồi trên C. Bài toán cực trị được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm } x_* \in C \textit{ sao cho: } f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in C\}. \tag{1.8}$$

Mối quan hệ giữa bài toán cực trị (1.8) và bất đẳng thức biến phân cổ điển được khẳng định trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.7 [47] *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert H và $f : C \to \mathbb{R}$ là phiếm hàm lồi khả vi trên C. Khi đó, $x_* \in C$ là nghiệm của* (1.8) *khi và chỉ khi x_* là nghiệm của bài toán* CVI(F, C) *với $F = \bigtriangledown f$.*

1.3.2.4. Bài toán điểm bất động

Cho C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là ánh xạ liên tục. Bài toán điểm bất động được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm } x_* \in C \textit{ thỏa mãn: } x_* = Tx_*. \tag{1.9}$$

Mối quan hệ giữa bài toán điểm bất động và bất đẳng thức biến phân được phát biểu trong định lý sau đây:

Định lý 1.14 [48] *Nếu ánh xạ F xác định bởi $F = I - T$ thì bài toán điểm bất động* (1.9) *tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân* CVI(F, C).

Hơn nữa, ta còn có định lý quan trọng sau về bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động dựa trên phép chiếu mêtric P_C.

Định lý 1.15 [54] *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H và ánh xạ $F : C \to H$. Khi đó $x_* \in C$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân* CVI(F, C) *khi và chỉ khi với mỗi $\lambda > 0$ cố định, x_* là điểm bất động của ánh xạ $P_C(I - \lambda F)$, tức là*

$$x_* = P_C(I - \lambda F)x_*. \tag{1.10}$$

1.4. Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

1.4.1. Bất đẳng thức biến phân đơn điệu

Định nghĩa 1.22 Cho C là tập con khác rỗng, lồi và đóng của không gian Banach E. Ánh xạ $F : C \to E^*$ được gọi là:

(i) đơn điệu trên C nếu

$$\langle Fx - Fy, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C; \tag{1.11}$$

(ii) đơn điệu chặt trên C nếu dấu " $=$ " trong (1.11) xảy ra khi và chỉ khi $x = y$;

(iii) đơn điệu đều trên C nếu tồn tại một hàm liên tục và tăng ngặt $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ với $\alpha(0) = 0$ và $\alpha(t) \to \infty$ khi $t \to \infty$ sao cho

$$\langle Fx - Fy, x - y\rangle \geq \alpha(\|x - y\|)\|x - y\| \quad \forall x, y \in C;$$

(iv) η-đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$\langle Fx - Fy, x - y\rangle \geq \eta\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C;$$

(v) đơn điệu cực đại nếu F đơn điệu và đồ thị của F, $G(F) = \{(x, Fx) \in C \times E^* : x \in C\}$, không thực sự bị chứa trong đồ thị của một ánh xạ đơn điệu khác.

Định nghĩa 1.23 Cho C là tập con lồi và đóng của không gian Banach E. Ánh xạ $F : C \to E^*$ được gọi là liên tục trên không gian con hữu hạn chiều của E nếu với mọi không gian con hữu hạn chiều của $M \subset E$, thu hẹp của ánh xạ F trên $C \cap M$ là liên tục yếu, tức là ánh xạ $F : C \cap M \to E^*$ là liên tục yếu.

Định nghĩa 1.24 Ánh xạ $F : C \to E^*$ được gọi là bức trên C nếu tồn tại $v \in C$ sao cho

$$\frac{\langle Fu - Fv, u - v\rangle}{\|u - v\|} \to +\infty \ \text{ khi } \ \|u\| \to +\infty.$$

Định nghĩa 1.25 Toán tử $F : \ E \to E^*$ được gọi là liên tục theo tia tại điểm $x \in E$ nếu $F(x + th) \rightharpoonup Fx$, khi $t \to 0$ và F được gọi là liên tục theo tia trên E nếu nó liên tục theo tia tại mọi $x \in E$.

Nhận xét 1.3 Dễ thấy rằng nếu F là một toán tử liên tục, thì F là một toán tử liên tục theo tia, tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Nếu ánh xạ $F : E \to E^*$ đơn điệu và liên tục theo tia với $D(F) = E$ thì F là đơn điệu cực đại (xem [88]).

Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Banach E và ánh xạ $F : E \to E^*$, không gian đối ngẫu của E. Bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, ký hiệu là $\mathrm{VI}(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm phần tử } x_0 \in C \text{ thỏa mãn: } \langle Fx_0, y - x_0\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1.12}$$

Bổ đề 1.6 (Bổ đề Minty) [47] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của E và $F : C \to E^*$ là ánh xạ đơn điệu và liên tục trên không gian con hữu hạn chiều của E. Khi đó, $x_0 \in C$ là nghiệm của* (1.12) *khi và chỉ khi x_0 thỏa mãn*

$$\langle Fy, y - x_0\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1.13}$$

Định lý 1.16 [3] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Banach E và F là ánh xạ đơn điệu và liên tục theo tia từ C vào E^* với $C = D(F)$. Khi đó tập nghiệm của bài toán* (1.12) *là khác rỗng.*

Chú ý 1.8 Nếu F là đơn điệu chặt thì nghiệm x_0 của (1.12) là duy nhất.

Bài toán tổng quát cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}(F, C)$ được phát biểu dưới dạng sau:

$$\text{Tìm } x_0 \in C \text{ sao cho: } \langle Fx_0 - f_0, x - x_0\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C,\ f_0 \in E^*, \tag{1.14}$$

Định lý 1.17 [4] *Cho $F : E \to E^*$ là ánh xạ đơn điệu cực đại và có tính chất bức với miền xác định $D(F)$. Cho C là tập con lồi, đóng trong $D(F)$ sao cho $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ hoặc $\mathrm{int}C \cap D(F) \neq \emptyset$. Khi đó bất đẳng thức biến phân* (1.14) *có ít nhất một nghiệm với mọi $f_0 \in E^*$.*

1.4.2. Bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu

Cho E là không gian Banach và $j : E \to E^*$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị của E. Trong phần này ta luôn giả sử ánh xạ $F : E \to E$ là đơn trị.

Bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu, ký hiệu là $\mathrm{VI}^*(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\textit{Tìm } x_0 \in C \textit{ thỏa mãn: } \langle Fx_0, j(x - x_0)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1.15}$$

Trong không gian Hilbert H, bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F, C)$ trở thành bất đẳng thức biến phân cổ điển $\mathrm{CVI}(F, C)$.

Định nghĩa 1.26 Ánh xạ $Q_C : E \to C$ được gọi là phép co rút không giãn theo tia từ E lên C nếu Q_C thỏa mãn:

(i) Q_C là phép co rút trên C, tức là $Q_C^2 = Q_C$;

(ii) Q_C là ánh xạ không giãn;

(iii) Q_C là ánh xạ theo tia, tức là với mọi $0 < t < \infty$

$$Q_C(Q_C(x) + t(x - Q_C(x))) = Q_C(x).$$

Tập C được gọi là tập co rút không giãn theo tia nếu tồn tại phép co rút không giãn theo tia Q_C từ E lên C.

Bổ đề 1.7 [1] *Mọi tập con C lồi đóng của không gian Banach lồi đều E đều là tập co rút của E, tức là tồn tại phép co rút từ E lên C.*

Bổ đề 1.8 [58] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Banach trơn E và $Q_C : E \to C$ là phép co rút từ E lên C. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*

(i) Q_C là ánh xạ không giãn theo tia.

(ii) $\langle x - Q_C(x), j(y - Q_C(x))\rangle \leq 0 \quad \forall x \in E,\ y \in C$.

Chú ý 1.9

(i) Khi E là không gian Hilbert H, ánh xạ Q_C chính là phép chiếu mêtric P_C từ H lên C.

(ii) Nếu C là tập con khác rỗng, lồi đóng của không gian Hilbert H thì phép chiếu mêtric $P_C : H \to C$ là phép co rút không giãn theo tia từ H lên C. Tuy nhiên điều này không còn đúng trong không gian Banach.

Từ Bổ đề 1.8 ta có kết quả quan trọng sau về mối quan hệ của bất đẳng thức biến phân (1.15) với bài toán điểm bất động trong không gian Banach trơn.

Mệnh đề 1.8 [10] *Cho C là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Banach trơn E. Khi đó bất đẳng thức biến phân* (1.15) *tương đương với phương trình điểm bất động:*

$$p_* = Q_C(I - \lambda F)p_*, \quad \lambda > 0, \tag{1.16}$$

tức là $\mathrm{VI}^*(F, C) = \mathrm{Fix}(Q_C(I - \lambda F))$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.8, ta có $p_* \in \mathrm{Fix}(Q_C(I - \lambda F))$ khi và chỉ khi

$$\langle (p_* - \lambda F p_*) - p_*, j(x - p_*)\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle -\lambda F p_*, j(x - p_*)\rangle \leq 0$$

với mọi $x \in C$ và $\lambda > 0$. Do $\lambda > 0$ nên ta suy ra $x_0 \in \mathrm{VI}^*(F, C)$. Mệnh đề được chứng minh.

□

Do sự tương đương của bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach trơn với bài toán điểm bất động mà nhiều phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach cũng được xây dựng dựa vào các phương pháp xấp xỉ điểm bất động.

1.4.3. Phương pháp lai ghép đường dốc

Khi $F : E \to E$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz và η-j-đơn điệu mạnh thì ánh xạ $Q_C(I - \lambda F)$, với $\lambda \in (0, 2\eta/L^2)$ là ánh xạ co. Khi đó, theo Nguyên lý ánh xạ co Banach, dãy lặp Picard xác định bởi

$$x_{n+1} = Q_C(I - \lambda_n F)x_n \tag{1.17}$$

hội tụ mạnh về điểm p_* là nghiệm bất đẳng thức biến phân (1.15).

Trong trường hợp $F = \nabla\varphi$, trong đó $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ là hàm lồi khả vi Gâteaux thì bất đẳng thức biến phân cổ điển $\mathrm{CVI}(F, C)$ chính là điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu lồi, $\min_{x \in C} \varphi(x)$, trên tập C và khi đó dãy lặp Picard được viết dưới dạng

$$x_{n+1} = P_C(I - \lambda_n \nabla \varphi)x_n$$

còn được gọi là phương pháp chiếu gradient. Tuy nhiên việc thực hiện phép chiếu mêtric P_C từ H lên tập con lồi đóng C của H là không dễ dàng do sự phức tạp của cấu trúc tập C. Khó khăn này cũng tương tự như khi thực hiện phép co rút không giãn theo tia Q_C từ E lên một tập con lồi đóng C bất kỳ của E. Mặt khác, để ý rằng bản thân ánh xạ chiếu mêtric P_C là một ánh xạ không giãn có $\text{Fix}(P_C) = C$. Hơn nữa, trong nhiều trường hợp chẳng hạn trong các bài toán xử lý tín hiệu hoặc khôi phục ảnh [41], tập ràng buộc C của bài toán thường được cho dưới dạng ẩn chẳng hạn như tập điểm bất động chung của một ánh xạ không giãn hoặc một họ các ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^N$. Xuất phát từ ý tưởng đó, năm 2001, Yamada [84] đã đề xuất phương pháp lai ghép đường dốc để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc $C := \cap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$ bằng dãy lặp xoay vòng dưới dạng:

$$u_{n+1} = T_{[n+1]}u_n - \lambda_{n+1}\lambda F(T_{[n+1]}u_n), \tag{1.18}$$

ở đây $[n] := n \mod N$ là hàm modulo lấy giá trị trong tập $\{1, 2, \ldots, N\}$, u_0 là điểm ban đầu bất kỳ trong H, $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$. Phương pháp do Yamada (2001) [84] đề xuất được chứng minh là hội tụ mạnh về một thành phần nằm trong tập điểm bất động của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn $\cap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$ đồng thời thỏa mãn là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân cổ điển $\text{CVI}(F, C)$ khi $C := \cap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$ với điều kiện đặt lên dãy tham số $\{\lambda_n\}$ như sau: (L_1) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, (L_2) $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = \infty$, và (L_3) $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n - \lambda_{n+N}| < \infty$.

Khi $N = 1$, phương pháp lai ghép đường dốc của Yamada trở về dạng

$$x_{n+1} = T(u_n) - \lambda_{n+1}\lambda F(Tu_n).$$

Trong trường hợp $F = \bigtriangledown\varphi$ thì dãy lặp (1.18) hội tụ mạnh về điểm p_* là điểm cực tiểu của hàm $\varphi(x)$ trên tập ràng buộc $\cap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i)$. Kết quả này đã được Deutsch và Yamada [35] công bố năm 1998. Ưu điểm của phương pháp lai ghép đường dốc là không cần thực hiện phép chiếu lên tập ràng buộc C của bất đẳng thức biến phân mà thay vào đó là dạng đóng của họ các ánh xạ mà tập điểm bất động chung của họ ánh xạ đó là tập chấp nhận được của bài toán.

Cho đến nay, phương pháp lai ghép đường dốc đã được nhiều tác giả cải tiến theo hướng giảm nhẹ các điều kiện đặt lên dãy tham số $\{\lambda_n\}$ ([21], [82],...) hoặc mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân trong những trường phức tạp hơn, chẳng hạn như khi tập ràng buộc C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn ([25], [75], [79], ...) hoặc C là tập điểm bất động chung của một nửa nhóm ánh xạ không giãn ([29], [30], ...).

Trong luận án này, chúng tôi quan tâm đến các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung một nửa nhóm các ánh xạ không giãn, ký hiệu là $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$, trong không gian Banach không cần thỏa mãn tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu. Ta phát biểu bài toán $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ như sau.

1.4.4. Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn

Cho E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$ và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E với tập điểm bất động $\mathcal{F} := \cap_{s \geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. Ta xét bài toán sau:

$$\text{\textit{Tìm điểm} } p_* \in \mathcal{F} \text{ \textit{sao cho:} } \langle Fp_*, j(x - p_*)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{F}. \tag{1.19}$$

Với các điều kiện đã cho đặt lên ánh xạ F và không gian Banach E, sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1.19) được khẳng định trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.9 *Cho E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với $\eta, \gamma \in (0, 1)$ thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$ và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E sao cho $\mathcal{F} := \cap_{s \geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. Khi đó, bài toán* (1.19) *có duy nhất một nghiệm $p_* \in \mathcal{F}$.*

Chứng minh. Với giả thiết $\mathcal{F} \neq \emptyset$, suy ra $\mathcal{F}$ là tập lồi đóng trong không gian Banach trơn. Do đó, $\mathcal{F}$ là tập co rút không giãn theo tia của E.

Theo Mệnh đề 1.16, bài toán (1.19) tương đương với phương trình điểm bất động sau:

$$p_* = Q_{\mathcal{F}}(I - \lambda F)p_*, \tag{1.20}$$

trong đó tham số $\lambda > 0$ xác định. Ta có $Q_{\mathcal{F}}$ là ánh xạ không giãn. Từ giả thiết về tính γ-giả co chặt của ánh xạ F, ta có F là ánh xạ liên tục Lipschitz với hằng số $L = 1 + 1/\gamma > 2$, do $0 < \gamma < 1$.

Lấy $\lambda \in (0, 2\eta/L^2)$. Từ $\eta \in (0,1)$ và $L > 2$, suy ra $\lambda \in (0,1)$. Khi đó, áp dụng Bổ đề 1.4, suy ra $(I - \lambda F)$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \lambda\tau \in (0,1)$, $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$. Từ đó dẫn đến ánh xạ $Q_{\mathcal{F}}(I - \lambda F)$ trong vế phải của phương trình điểm bất động (1.20) là co. Theo Nguyên lý ánh xạ co Banach, ta suy ra ánh xạ $Q_{\mathcal{F}}(I - \lambda F)$ có duy nhất một điểm bất động. Điều này có nghĩa là phương trình (1.20) có nghiệm duy nhất. Do tính tương đương của hai bài toán (1.20) và (1.19) ta kết luận được sự tồn tại và duy nhất nghiệm p_* của bất đẳng thức biến phân (1.19).

$\square$

Dựa vào Định lý 1.11 và Hệ quả 1.2 xét trong Mục 1.2.2, ta có thể kể đến một số trường hợp phải xét đến bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bât động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach như sau:

(1) Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập không điểm của một toán tử m-j-đơn điệu A trong không gian Banach thỏa mãn phương trình tiến hóa (1.5).

(2) Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm cực trị của một phiếm hàm lồi chính thường và nửa liên tục dưới $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mà dưới vi phân ∂f của hàm f thỏa mãn phương trình tiến hóa (1.5) với $A = \partial f$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Trong chương này chúng tôi đã trình bày một số kiến thức bổ trợ phục vụ cho việc nghiên cứu và trình bày các kết quả chính ở các chương tiếp theo như các khái niệm và tính chất hình học của không gian Banach cụ thể như không gian Banach lồi chặt, lồi đều, trơn, trơn đều, có chuẩn khả vi Gâteaux và khả vi Gâteaux đều; ánh xạ đơn điệu và j-đơn điệu, ánh xạ giả co chặt, ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn; tổng quan về bất đẳng thức biến phân cổ điển và một số bài toán liên quan, bất đẳng thức biến phân đơn điệu và j-đơn điệu. Trong các chương tiếp theo chúng tôi sẽ nghiên cứu xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập chấp nhận được là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều với một số điều kiện đặt lên ánh xạ F như tính j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt. Cụ thể, trong Chương 2, chúng tôi xây dựng các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện dựa trên phương pháp lai ghép đường dốc cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ trong không gian Banach E lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều; trong Chương 3, chúng tôi trình bày các phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ và phương pháp hiệu chỉnh tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert.

Chương 2
Phương pháp lai ghép đường dốc cho bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn

Trong chương này, chúng tôi đề xuất các phương pháp lai ghép đường dốc dạng ẩn và dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$. Nội dung của chương được viết trong 3 mục. Mục 2.1 và Mục 2.2 ta xây dựng ba phương pháp lặp ẩn dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ và dạng hiện tương ứng cho các phương pháp lặp ẩn đã xét. Mục 2.3 dành cho việc đưa ra ví dụ số minh họa cho các phương pháp đã đề xuất. Các kết quả của chương này được viết trên cơ sở các bài báo (2) và (3) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Phương pháp lặp ẩn lai ghép đường dốc

2.1.1. Mô tả phương pháp

Các phương pháp lặp ẩn để giải bất đẳng thức biến phân đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu do lợi thế của phương pháp là điều kiện đặt lên các dãy tham số của dãy lặp khá nhẹ và sự hội tụ của phương pháp lặp ẩn luôn được đảm bảo dựa trên nguyên lý ánh xạ co Banach. Một số kết quả nghiên cứu về các phương pháp lặp ẩn giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động một họ các ánh xạ không giãn của các tác giả khác có thể kể đến như các kết quả của Ceng và đồng tác giả (2008) [27], Chen và He (2007) [30], Shioji và Takahashi (1998) [67], Suzuki (2005) [69] và Xu (2005) [83].

Trong trường hợp khi $F : E \to E$ là đơn điệu mạnh và giả co chặt và tập ràng buộc $C := \mathrm{Fix}(T)$ là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn $T : E \to E$, Ceng và các cộng sự (2008) [27] đã đưa ra phương pháp lặp ẩn để giải (1.15) có dạng:

$$x_t = t(I - \mu_t F)x_t + (1-t)Tx_t, \tag{2.1}$$

với $t, \mu_t \in (0,1)$ sao cho $t \to 0^+$. Các tác giả đã chứng minh sự hội tụ mạnh của lưới x_t xác định bởi (2.1) về điểm p_* thỏa mãn (1.15) trong không gian Banach lồi đều có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu. Ceng và đồng nghiệp (2008) [27] cũng đã nghiên cứu sự hội tụ mạnh của lưới x_t trong (2.1) trong trường hợp $T : E \to E$ là ánh xạ giả co liên tục và không gian Banach E là không gian lồi đều và trơn.

Khi E là không gian Hilbert H, Shioji và Takahashi (1998) [67], đã đề xuất phương pháp lặp ẩn có sử dụng tích phân Bochner T_k

$$x_k = \gamma_k u + (1-\gamma_k)T_k x_k, \quad k \geq 1,$$

với u cố định cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn tiệm cận $\{T(s) : s \geq 0\}$ trên tập con C khác rỗng lồi đóng trong H. Phương pháp của Shioji và Takahashi được xây dựng dựa trên phương pháp lặp Halpern (Halpern, 1967 [38]) và các tham số γ_k, t_k thỏa mãn

$$0 < \gamma_k < 1,\ t_k > 0,\ \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0. \tag{2.2}$$

Không dùng tích phân Bochner T_k, Suzuki (2005) [69] đã nghiên cứu sự hội tụ mạnh cho dãy lặp

$$x_k = \gamma_k u + (1-\gamma_k)T(t_k)x_k, \quad k \geq 1, \tag{2.3}$$

về điểm $P_{\mathcal{F}}u$ trong không gian Hilbert H. Ngoài ra, Xu (2005) [83] cũng nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp (2.3) trong không gian Banach E

thỏa mãn tính chất có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy và các tham số γ_k, t_k thỏa mãn

$$0 < \gamma_k < 1,\ t_k > 0,\ \lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{t_k} = 0. \tag{2.4}$$

Chen và He [30] năm 2007 đã nghiên cứu phương pháp xấp xỉ gắn kết

$$x_k = \gamma_k f(x_k) + (1-\gamma_k)T(t_k)x_k, \quad k \geq 1, \tag{2.5}$$

hội tụ mạnh về nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19) với $F = I - f$, trong đó $f : C \to C$ là ánh xạ co và $\{T(s) : s \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên tập con C khác rỗng lồi đóng trong không gian Banach có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu. Các dãy tham số $\{\gamma_k\}$ và $\{t_k\}$ thỏa mãn điều kiện (2.4).

Các phương pháp trên hoặc là được xét đến trong không gian Hilbert H hoặc trong không gian Banach E có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy. Ta biết rằng, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trong không gian Hilbert H chính là ánh xạ đồng nhất I thỏa mãn tính chất liên tục yếu theo dãy và trong các không gian Banach quen thuộc, tính chất này thỏa mãn trong không gian $l^p,\ 1 < p < \infty$ nhưng không thỏa mãn trong các không gian $L^p[a, b],\ 1 < p < \infty$ (xem [31]). Vấn đề đặt ra trong chương này là liệu có thể xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn mà loại bỏ được tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach? Xuất phát từ ý tưởng này, trong mục này chúng tôi đề xuất ba phương pháp lặp ẩn dựa trên tư tưởng của phương pháp lai ghép đường dốc để giải bất đẳng thức biến phân (1.19) trong không gian Banach E mà không dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Việc chứng minh sự hội tụ của các phương pháp này cần sử dụng đến những kĩ thuật để vượt qua khó khăn gây ra bởi các tính chất hình học và các tính chất về tính liên tục của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j của không gian Banach như việc sử dụng giới hạn Banach μ hoặc ánh xạ co rút không giãn theo tia Q_C. Như vậy phạm vi ứng dụng của các phương pháp đã đề xuất có thể được mở rộng cho các không gian Banach tổng quát hơn, chẳng hạn $L^p[a, b],\ 1 < p < \infty$.

Phương pháp thứ nhất được thiết lập dựa trên việc thiết lập tổ hợp lồi của hai ánh xạ F_k và T_k, trong đó F_k và T_k lần lượt được xác định bởi

$$F_k x = (I - \lambda_k F)x \tag{2.6}$$

và

$$T_k x = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x ds, x \in E. \tag{2.7}$$

Phương pháp 2.1. *Xuất phát từ điểm x_1 bất kỳ thuộc E, xác định dãy $\{x_k\}$ theo sơ đồ lặp ẩn sau:*

$$x_k = \gamma_k F_k x_k + (1-\gamma_k)T_k x_k, \quad k \geq 1, \tag{2.8}$$

với $\gamma_k \in (0,1), \lambda_k \in (0,1]$ và $t_k > 0$ thỏa mãn $\lambda_k \to 0, t_k \to \infty$ khi $k \to \infty$.

Không dùng tích phân Bochner T_k mà thay bằng ánh xạ $T(t_k)$, ta thu được phương pháp lặp ẩn sau đây.

Phương pháp 2.2. *Xuất phát từ điểm y_1 bất kỳ thuộc E, xác định dãy $\{y_k\}$ theo phương trình lặp ẩn*

$$y_k = \gamma_k F_k y_k + (1-\gamma_k)T(t_k)y_k, \quad k \geq 1, \tag{2.9}$$

với $\lambda_k \in (0,1]$, $\gamma_k \in (0,1)$ và $t_k > 0$ thỏa mãn $\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{t_k} = 0$.

Phương pháp thứ ba được xây dựng bằng cách lấy hợp thành của hai ánh xạ T_k và F_k.

Phương pháp 2.3. *Xuất phát từ điểm w_1 bất kỳ thuộc E, xác định dãy $\{w_k\}$ theo phương trình sau*

$$w_k = T_k F_k w_k, \quad k \geq 1, \tag{2.10}$$

với $\lambda_k \in (0,1]$ và $t_k > 0$ sao cho $\lambda_k \to 0$ và $t_k \to \infty$, khi $k \to \infty$.

2.1.2. Sự hội tụ

Định lý 2.1 *Cho E là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt với*

$\eta, \gamma \in (0,1)$ thỏa mãn $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T(s) : s \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E sao cho $\mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. Khi đó dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (2.8) hội tụ mạnh đến điểm p_* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (1.19) khi $k \to \infty$.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý thành các bước cụ thể như sau.
Bước 1. Ta chứng minh rằng dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (2.8) luôn xác định và là dãy bị chặn. Thật vậy, với $1 \leq k \in \mathbb{N}$ cố định, xét ánh xạ $\mathcal{T} : E \to E$ xác định bởi

$$\mathcal{T}x = \gamma_k F_k x + (1-\gamma_k)T_k x,\ \forall x \in E.$$

Áp dụng Bổ đề 1.4, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| &= \|\gamma_k(I-\lambda_k F)x + (1-\gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)xds \\
&\quad - [\gamma_k(I-\lambda_k F)y + (1-\gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)yds]\| \\
&= \|\gamma_k[(I-\lambda_k F)x - (I-\lambda_k F)y] \\
&\quad + (1-\gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}(T(s)x - T(s)y)ds\| \\
&\leq \gamma_k(1-\lambda_k\tau)\|x-y\| + (1-\gamma_k)\|x-y\| \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x-y\|,
\end{aligned}$$

ở đây $\gamma_k\lambda_k\tau \in (0,1)$ với $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma} \in (0,1)$. Suy ra, $\mathcal{T}$ là ánh xạ co trên E. Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, luôn tồn tại duy nhất $x_k \in E$ thỏa mãn $x_k = \mathcal{T}x_k$ với mọi $k \geq 1$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $\{x_k\}$ là dãy bị chặn. Thật vậy, đặt

$$z_k = T_k x_k = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x_k ds.$$

Khi đó, $x_k = \gamma_k(I-\lambda_k F)x_k + (1-\gamma_k)z_k$ và chú ý rằng, với mọi $p \in \mathcal{F}$, $p = T(t)p$, với mọi $t \geq 0$, nên ta có

$$\|z_k - p\| = \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}[T(s)x_k - T(s)p]ds\right\| \leq \|x_k - p\|.$$

Do vậy, với bất kì điểm cố định $p \in \mathcal{F}$, ta suy ra được

$$\begin{aligned}\|x_k - p\|^2 &= \|\gamma_k(I - \lambda_k F)x_k + (1-\gamma_k)z_k - p\|^2 \\ &= \gamma_k\langle \lambda_k(I-F)x_k + (1-\lambda_k)x_k - p, j(x_k - p)\rangle \\ &\quad + (1-\gamma_k)\langle z_k - p, j(x_k - p)\rangle \\ &\le \gamma_k\lambda_k\langle (I-F)x_k - p, j(x_k - p)\rangle + \gamma_k(1-\lambda_k)\|x_k - p\|^2 \\ &\quad + (1-\gamma_k)\|x_k - p\|^2 \\ &\le \gamma_k\lambda_k\langle (I-F)x_k - p, j(x_k - p)\rangle + (1-\gamma_k\lambda_k)\|x_k - p\|^2 \\ &= \gamma_k\lambda_k\langle (I-F)x_k - (I-F)p - Fp, j(x_k - p)\rangle \\ &\quad + (1-\gamma_k\lambda_k)\|x_k - p\|^2.\end{aligned}$$

Khi đó, theo Bổ đề 1.4 ta có

$$\|x_k - p\|^2 \le (1-\tau)\|x_k - p\|^2 - \langle Fp, j(x_k - p)\rangle$$

hay,

$$\|x_k - p\|^2 \le \tau^{-1}\langle Fp, j(p - x_k)\rangle. \tag{2.11}$$

Từ đây suy ra, $\|x_k - p\| \le \tau^{-1}\|Fp\|$. Điều này chứng tỏ $\{x_k\}$ là dãy bị chặn. Từ tính bị chặn của dãy $\{x_k\}$ và tính không giãn của ánh xạ T_k, vì

$$\begin{aligned}\|T_k x_k - T_k p\| &= \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} \|T(s)x_k - T(s)p\| ds \\ &\le \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} \|x_k - p\| ds = \|x_k - p\|, \quad p \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

ta suy ra $\{z_k\}$ là dãy bị chặn. Mặt khác, do F là ánh xạ L-liên tục Lipschitz với $L = 1 + 1/\gamma$, $\|Fx_k - Fp\| \le L\|x_k - p\|$, nên dãy $\{Fx_k\}$ cũng là bị chặn. Hơn nữa, ta còn có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}\|x_k - z_k\| &= \|\gamma_k(I - \lambda_k F)x_k + (1-\gamma_k)z_k - z_k\| \\ &= \|\gamma_k(x_k - z_k) - \gamma_k\lambda_k Fx_k\| \\ &\le \gamma_k\|x_k - z_k\| + \gamma_k\lambda_k\|Fx_k\|,\end{aligned}$$

từ đó suy ra,

$$\|x_k - z_k\| \le \frac{\gamma_k\lambda_k}{1-\gamma_k}\|Fx_k\|.$$

Do $\lambda_k \to 0, \gamma_k \in (0,1)$ và $\{Fx_k\}$ là dãy bị chặn nên từ bất đẳng thức cuối ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0. \tag{2.12}$$

Bước 2. Chứng minh rằng tồn tại dãy con $\{x_{k_i}\}$ của dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh về một điểm $\tilde{p} \in \mathcal{F}$.

Trước tiên, ta chứng minh

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - T(h)x_k\| = 0 \quad \forall h \geq 0. \tag{2.13}$$

Xét tập

$$M = \{z \in E : \|z - p\| \leq \tau^{-1}\|Fp\|\}.$$

Ta có, M là tập khác rỗng, lồi và đóng của E và rõ ràng $x_k \in M$ theo như chứng minh trong Bước 1. Áp dụng Bổ đề 1.5, ta có

$$\|z_k - T(h)z_k\| = \left\| \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x_k ds - T(h)\left(\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x_k ds\right)\right\| \to 0, \tag{2.14}$$

khi $k \to \infty$. Kết hợp (2.14) và (2.12) ta suy ra

$$\begin{aligned}\|x_k - T(h)x_k\| &= \|x_k - z_k + z_k - T(h)z_k + T(h)z_k - T(h)x_k\| \\ &\leq 2\|x_k - z_k\| + \|z_k - T(h)z_k\| \to 0, \ k \to \infty.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có (2.13) thỏa mãn. Tiếp theo, với giới hạn Banach μ, ta xác định ánh xạ $\varphi : E \to \mathbb{R}$ như sau:

$$\varphi(u) = \mu\|x_k - u\|^2 \quad \forall u \in E. \tag{2.15}$$

Khi đó, ta có $\varphi(u) \to \infty$ khi $\|u\| \to \infty$ và φ là ánh xạ lồi và liên tục. Do E là không gian phản xạ và lồi chặt, nên tồn tại duy nhất $\tilde{p} \in E$ sao cho $\varphi(\tilde{p}) = \min_{u\in E} \varphi(u)$. Từ (2.13), ta suy ra

$$\begin{aligned}\varphi(T(h)\tilde{p}) &= \mu\|x_k - T(h)\tilde{p}\|^2 \\ &= \mu\Big(\|x_k - T(h)x_k\|^2 + \|T(h)x_k - T(h)\tilde{p}\|^2 \\ &\qquad + 2\left\langle x_k - T(h)x_k, T(h)x_k - T(h)\tilde{p}\right\rangle\Big) \\ &\leq \mu\|T(h)x_k - T(h)\tilde{p}\|^2 \\ &\qquad + 2\mu\Big(\|x_k - T(h)x_k\|.\|T(h)x_k - T(h)\tilde{p}\|\Big) \\ &\leq \mu\|x_k - \tilde{p}\|^2 = \varphi(\tilde{p}).\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của điểm $\tilde{p}$ nên từ đánh giá trên ta suy ra được $T(h)\tilde{p} = \tilde{p}$, với mọi $h \geq 0$, tức là $\tilde{p} \in \mathcal{F}$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.3, ta có $\tilde{p}$ là cực tiểu của $\varphi(u)$ trên E, khi và chỉ khi

$$\mu\langle u - \tilde{p}, j(x_k - \tilde{p})\rangle \leq 0 \quad \forall u \in E. \tag{2.16}$$

Đặt $u = (I - F)(\tilde{p})$ trong (2.16), ta được

$$\mu\langle F\tilde{p}, j(\tilde{p} - x_k)\rangle \leq 0. \tag{2.17}$$

Kết hợp (2.11) và (2.17), ta có

$$\mu\|x_k - \tilde{p}\|^2 \leq \tau^{-1}\mu\langle F\tilde{p}, j(\tilde{p} - x_k)\rangle \leq 0,$$

do đó suy ra $\mu\|x_k - \tilde{p}\|^2 = 0$. Từ đây, dùng tính chất của giới hạn Banach (Mệnh đề 1.3), ta suy ra

$$\liminf_{k\to\infty} \|x_k - \tilde{p}\|^2 \leq \mu\|x_k - \tilde{p}\|^2 = 0.$$

Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x_{k_i}\}$ của $\{x_k\}$ hội tụ mạnh về điểm $\tilde{p}$ khi $i \to \infty$.

Bước 3. Chứng minh cả dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh về $\tilde{p}$ khi $k \to \infty$.

Ta sẽ chỉ ra rằng điểm $\tilde{p} = \lim_{i\to\infty} x_{k_i}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19). Một lần nữa, sử dụng (2.11) và tính liên tục mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j trên mọi tập con bị chặn của E, với $x_{k_i} \to \tilde{p}$ ta có

$$\langle Fp, j(\tilde{p} - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{F}. \tag{2.18}$$

Do p và $\tilde{p}$ đều thuộc $\mathcal{F}$, tập con lồi đóng của E, nên ta thay p trong (2.18) bởi $sp + (1-s)\tilde{p}$ với $s \in (0, 1)$, sử dụng tính chất $j(s(\tilde{p} - p)) = sj(\tilde{p} - p)$ với $s > 0$, ta có

$$s\,\langle F(sp + (1-s)\tilde{p}), j(\tilde{p} - p)\rangle \leq 0.$$

Chia hai vế của bất đẳng thức cuối cho s và cho $s \to 0$, ta thu được

$$\langle F\tilde{p}, j(\tilde{p} - p)\rangle \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{F}.$$

Điều này có nghĩa là $\tilde{p}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19). Tính duy nhất của p_* trong (1.19) đảm bảo rằng $\tilde{p} = p_*$. Vậy cả dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh về p_* khi $k \to \infty$. Định lý được chứng minh.

$\square$

Định lý 2.2 *Cho F là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và γ-giả co chặt trên E, không gian Banach phản xạ thực lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều, với $\eta + \gamma > 1$ và cho $\{T(s) : s \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên E sao cho $\mathcal{F} := \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$. Khi đó, dãy $\{y_k\}$ xác định bởi (2.9) hội tụ mạnh về điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (1.19) khi $k \to \infty$.*

Chứng minh.

Với $1 \leq k \in \mathbb{N}$ cố định, xét ánh xạ $\mathcal{T} : E \to E$ xác định bởi

$$\mathcal{T}y = \gamma_k F_k y + (1-\gamma_k)T(t_k)y,$$

với mọi $y \in E$. Khi đó, theo Bổ đề 1.4, ta có

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| \\
&= \|\gamma_k(I-\lambda_k F)x + (1-\gamma_k)T(t_k)x - [\gamma_k(I-\lambda_k F)y + (1-\gamma_k)T(t_k)y]\| \\
&= \|\gamma_k[(I-\lambda_k F)x - (I-\lambda_k F)y] + (1-\gamma_k)[T(t_k)x - T(t_k)y]\| \\
&\leq \gamma_k(1-\lambda_k\tau)\|x-y\| + (1-\gamma_k)\|x-y\| \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Suy ra $\mathcal{T}$ là ánh xạ co trên E với hệ số co $1-\gamma_k\lambda_k\tau$. Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, luôn tồn tại duy nhất $y_k \in E$ sao cho $y_k = \mathcal{T}y_k$ với mọi $k \geq 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh dãy $\{y_k\}$ là bị chặn. Thật vậy, với mỗi điểm $p \in \mathcal{F}$ cố định, ta có

$$\begin{aligned}
&\|y_k - p\|^2 \\
&= \langle \gamma_k(I-\lambda_k F)y_k + (1-\gamma_k)T(t_k)y_k - p, j(y_k-p)\rangle \\
&= \gamma_k\langle \lambda_k(I-F)y_k + (1-\lambda_k)y_k - p, j(y_k-p)\rangle \\
&\qquad + (1-\gamma_k)\langle T(t_k)y_k - p, j(y_k-p)\rangle \\
&= \gamma_k\lambda_k\langle (I-F)y_k - (I-F)p, j(y_k-p)\rangle + \gamma_k(1-\lambda_k)\langle y_k - p, j(y_k-p)\rangle \\
&\qquad + \gamma_k\lambda_k\langle -Fp, j(y_k-p)\rangle + (1-\gamma_k)\langle T(t_k)y_k - T(t_k)p, j(y_k-p)\rangle \\
&\leq \gamma_k\lambda_k(1-\tau)\|y_k-p\|^2 + \gamma_k(1-\lambda_k)\|y_k-p\|^2 + (1-\gamma_k)\|y_k-p\|^2 \\
&\qquad - \gamma_k\lambda_k\langle Fp, j(y_k-p)\rangle \\
&= (1-\gamma_k\lambda_k\tau)\|y_k-p\|^2 - \gamma_k\lambda_k\langle Fp, j(y_k-p)\rangle.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có bất đẳng thức (2.11) với x_k được thay bởi y_k dưới dạng sau:

$$\|y_k - p\|^2 \leq \tau^{-1}\langle Fp, j(p - y_k)\rangle. \tag{2.19}$$

Từ đây suy ra, $\|y_k - p\| \leq \tau^{-1}\|Fp\|$. Điều này chứng tỏ $\{y_k\}$ là dãy bị chặn. Suy ra $\{Fy_k\}$ cũng là dãy bị chặn do F là ánh xạ L-liên tục Lipschitz với $L = 1 + 1/\gamma$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\|y_k - T(t)y_k\| \to 0$ khi $k \to \infty$ với mọi $t \geq 0$ bất kì. Dễ thấy, giới hạn thỏa mãn với $t = 0$. Với $t > 0$, do $t_k \to 0$ nên ta có thể giả sử $t \geq t_k$ với mọi k và do vậy $[\frac{t}{t_k}] \leq \frac{t}{t_k} < [\frac{t}{t_k}] + 1$, với mọi k, ở đây $[z]$ là ký hiệu phần nguyên của số thực dương z.

Nhắc lại rằng $T(0)y_k = y_k$. Khi đó, dễ thấy

$$\begin{aligned}\|y_k - T(t)y_k\| = \|&T(0t_k)y_k - T(1t_k)y_k + T(1t_k)y_k - T(2t_k)y_k \\ &+ \ldots + T(([t/t_k] - 1)t_k)y_k - T([t/t_k]t_k)y_k \\ &+ T([t/t_k]t_k)y_k - T(t)y_k\|,\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}\|y_k - T(t)y_k\| \leq \sum_{l=0}^{[t/t_k]-1} &\|T(lt_k)y_k - T((l+1)t_k)y_k\| \\ &+ \|T(t)y_k - T([t/t_k]t_k)y_k\|.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Do $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn nên ta có các đánh giá sau với mọi k:

$$T((l+1)t_k) = T(lt_k) \circ T(t_k) \quad \forall\ 0 \leq l \leq [t/t_k] - 1,$$
$$T(t) = T([t/t_k]t_k) \circ T(t - [t/t_k]t_k).$$

Hơn nữa, các ánh xạ $T(lt_k)$ và $T([t/t_k]t_k)$ cũng là các ánh xạ không giãn, nên với mọi $0 \leq l \leq [t/t_k] - 1$ ta có các bất đẳng thức sau đây:

$$\|T(lt_k)y_k - T((l+1)t_k)y_k\| \leq \|y_k - T(t_k)y_k\|,$$
$$\|T(t)y_k - T([t/t_k]t_k)y_k\| \leq \|T(t - [t/t_k]t_k)y_k - y_k\|.$$

Sử dụng hai đánh giá trên trong (2.20) ta thu được

$$
\begin{aligned}
&\|y_k - T(t)y_k\| \\
&\le [t/t_k]\|y_k - T(t_k)y_k\| + \|T(t - [t/t_k]t_k)y_k - y_k\| \\
&\le \frac{\gamma_k}{t_k} \times \frac{t}{\gamma_k}\|(I - \lambda_k F)y_k - T(t_k)y_k\| + \max_{0\le s\le t_k} \|T(s)y_k - y_k\| \\
&\le \frac{\gamma_k}{t_k} \times \frac{t}{\gamma_k}[\|y_k\| + \lambda_k\|F(x_k)\| + \|T(t_k)x_k\|) + \max_{0\le s\le t_k} \|T(s)y_k - y_k\|].
\end{aligned}
$$

Do tính bị chặn của $\{y_k\}$, $\{Fy_k\}$, $\{T(t_k)x_k\}$ và $0 < \gamma_k < 1, \gamma_k/t_k \to 0$, nên ta suy ra

$$
\lim_{k\to\infty} \|y_k - T(t)y_k\| = 0 \quad \forall t \ge 0. \tag{2.21}
$$

Vẫn dùng giới hạn Banach μ và xác định ánh xạ φ bởi (2.15) với x_k được thay bởi y_k. Khi đó, tồn tại điểm $\overline{p}$ sao cho $\varphi(\overline{p}) = \min_{u\in E} \varphi(u)$. Hơn nữa, điểm $\overline{p}$ như vậy là duy nhất. Mặt khác, sử dụng (2.21), ta suy ra:

$$
\begin{aligned}
\varphi(T(h)\overline{p}) = \mu\|y_k - \overline{p}\|^2 & \\
&= \mu\Big(\|y_k - T(h)y_k\|^2 + \|T(h)y_k - T(h)\overline{p}\|^2 \\
&\qquad + 2\left\langle y_k - T(h)y_k, T(h)y_k - T(h)\overline{p}\right\rangle \Big) \\
&\le \mu\|T(h)y_k - T(h)\overline{p}\|^2 \\
&\qquad + 2\mu\Big(\|y_k - T(h)y_k\|\|T(h)y_k - T(h)\overline{p}\| \Big) \\
&\le \mu\|y_k - \overline{p}\|^2 = \varphi(\overline{p}).
\end{aligned}
$$

Do tính duy nhất của điểm $\overline{p}$ nên suy ra $T(h)\overline{p} = \overline{p}$, với mọi $h \ge 0$. Điều này chứng tỏ $\overline{p} \in \mathcal{F}$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.3, ta có $\overline{p}$ là cực tiểu của $\varphi(u)$ trên E, khi và chỉ khi

$$
\mu_k\langle u - \overline{p}, j(y_k - \overline{p})\rangle \le 0 \quad \forall u \in E. \tag{2.22}
$$

Đặt $u = (I - F)(\overline{p})$ trong (2.22), ta được

$$
\mu\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - y_k)\rangle \le 0. \tag{2.23}
$$

Kết hợp (2.19) và (2.23), ta có

$$
\mu\|y_k - \overline{p}\|^2 \le \tau^{-1}\mu\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - y_k)\rangle \le 0,
$$

tức là $\mu\|y_k - \overline{p}\|^2 = 0$. Từ đây, dùng tính chất của giới hạn Banach (Mệnh đề 1.3), ta suy ra

$$\liminf_{k\to\infty} \|y_k - \overline{p}\|^2 \le \mu\|y_k - \overline{p}\|^2 = 0.$$

Khi đó, tồn tại một dãy con $\{y_{k_i}\}$ của $\{y_k\}$ hội tụ mạnh về điểm $\overline{p}$ khi $i \to \infty$. Ta sẽ chỉ ra rằng điểm $\overline{p}$ thỏa mãn bất đẳng thức biến phân (1.19).

Thật vậy, sử dụng (2.19) và tính liên tục đều mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j, ta có

$$\langle Fp, j(\overline{p} - p)\rangle \le 0 \quad \forall p \in \mathcal{F}.$$

Chứng minh tương tự Bước 3 của Định lý 2.1, ta có

$$\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - p)\rangle \le 0 \quad \forall p \in \mathcal{F},$$

tức là $\overline{p}$ thỏa mãn bất đẳng thức biến phân (1.19). Do tính duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19) nên ta suy ra $\overline{p} = p_*$. Vậy cả dãy $\{y_k\}$ hội tụ mạnh về điểm p_*. Định lý được chứng minh.

$\square$

Định lý 2.3 *Cho E, F, $\{T(s) : s \ge 0\}$ và $\mathcal{F}$ thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1. Khi đó, dãy $\{w_k\}$ xác định bởi* (2.10) *hội tụ mạnh đến nghiệm p_* của bất đẳng thức biến phân* (1.19) *khi $k \to \infty$.*

Chứng minh. Với $1 \le k \in \mathbb{N}$ cố định, xét ánh xạ $\mathcal{T} : E \to E$ xác định bởi

$$\mathcal{T}x = T_kF_kx = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)(I - \lambda_kF)xds \quad \forall x \in E.$$

Do $T(s),\ s \ge 0$ là ánh xạ không giãn và theo Bổ đề 1.4, $I - \lambda_kF$ là ánh xạ co, nên ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| &= \|T_kF_kx - T_kF_ky\| \\
&= \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)(I - \lambda_kF)xds - \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)(I - \lambda_kF)yds\right\| \\
&= \frac{1}{t_k}\left\|\int_0^{t_k} [T(s)(I - \lambda_kF)x - T(s)(I - \lambda_kF)y]ds\right\| \\
&\le \|(I - \lambda_kF)x - (I - \lambda_kF)y\| \\
&\le (1 - \lambda_k\tau)\|x - y\| \quad \forall x, y \in E.
\end{aligned}$$

Do vậy, $\mathcal{T}$ là ánh xạ co trên E. Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, luôn tồn tại duy nhất $w_k \in E$, thỏa mãn $w_k = \mathcal{T} w_k$. Điều này có nghĩa là (2.10) hoàn toàn xác định.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng dãy $\{w_k\}$ là bị chặn. Thật vậy, với mỗi $p \in \mathcal{F}$, theo Bổ đề 1.4, ta có

$$\|w_k - p\| = \left\| \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} T(s)(I - \lambda_k F) w_k ds - \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} T(s) p ds \right\|.$$

Do tính không giãn của ánh xạ $T(s),\ s \geq 0$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \|w_k - p\| &\leq \|(I - \lambda_k F) w_k - p\| \\ &= \|(I - \lambda_k F) w_k - (I - \lambda_k F) p - \lambda_k F p\| \\ &\leq (1 - \lambda_k \tau) \|w_k - p\| + \lambda_k \|F p\|. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Suy ra, $\|w_k - p\| \leq \|Fp\|/\tau$, điều này chứng tỏ $\{w_k\}$ là dãy bị chặn. Và do tính L-liên tục Lipschitz của F với $L = 1 + 1/\gamma$ ta cũng suy ra được $\{Fw_k\}$ cũng là dãy bị chặn.

Do tính lồi của $\|\cdot\|^2$, từ (2.24) và áp dụng các Bổ đề 1.2 và Bổ đề 1.4, với $p \in \mathcal{F}$, ta còn có thể đánh giá $\|w_k - p\|^2$ như sau:

$$\begin{aligned} \|w_k - p\|^2 &\leq \|(I - \lambda_k F) w_k - (I - \lambda_k F) p - \lambda_k F p\|^2 \\ &\leq \|(I - \lambda_k F) w_k - (I - \lambda_k F) p\|^2 \\ &\qquad + 2 \left\langle -\lambda_k F p, j((I - \lambda_k F) w_k - (I - \lambda_k F) p - \lambda_k F p) \right\rangle \\ &\leq (1 - \lambda_k \tau) \|w_k - p\|^2 - 2\lambda_k \langle Fp, j(w_k - p - \lambda_k F w_k \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\|w_k - p\|^2 \leq \frac{2}{\tau} \langle Fp, j(p - w_k) \rangle + \frac{2}{\tau} \langle Fp, j(p - w_k + \lambda_k F w_k) - j(p - w_k) \rangle. \tag{2.25}$$

Tiếp theo, xét tập $D = \{z \in E : \|z - p\| \leq \|Fp\|/\tau\}$ tương tự như trong Định lý 2.1, suy ra $w_k \in D$. Đặt $z_k = T_k w_k = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} T(s) w_k ds$ và áp dụng Bổ đề 1.5, ta thu được (2.14), tức là $\lim_{k \to \infty} \|z_k - T(h) z_k\| = 0$ với mọi $h \geq 0$ bất kỳ và $w_k \in D$.

Mặt khác, ta có đánh giá cho $\|w_k - z_k\|$ như sau:

$$\begin{aligned}\|w_k - z_k\| &= \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)(I-\lambda_k F)w_k ds - \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)w_k ds\right\|\\ &= \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} [T(s)(I-\lambda_k F)w_k - T(s)w_k]ds\right\|\\ &\le \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} \|(I-\lambda_k F)w_k - w_k\|ds\\ &= \lambda_k\|Fw_k\| \to 0,\ k\to\infty,\end{aligned}$$

do $\lambda_k \to 0$. Khi đó, với $h \ge 0$ bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned}\|w_k - T(h)w_k\| &= \|w_k - z_k + z_k - T(h)z_k + T(h)z_k - T(h)w_k\|\\ &\le \|w_k - z_k\| + \|z_k - T(h)z_k\| + \|T(h)z_k - T(h)w_k\|\\ &\le 2\|w_k - z_k\| + \|z_k - T(h)z_k\|.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - T(h)w_k\| = 0 \quad \forall h \ge 0. \tag{2.26}$$

Với giới hạn Banach μ, xác định hàm $\varphi : E \to \mathbb{R}$ như sau:

$$\varphi(u) = \mu\|w_k - u\|^2 \quad \forall u \in E.$$

Ta có φ là hàm lồi liên tục và $\varphi(u) \to \infty$ khi $\|u\| \to \infty$. Do E là không gian phản xạ và lồi chặt nên tồn tại duy nhất một điểm $\tilde{p} \in E$ thỏa mãn $\varphi(\tilde{p}) = \min_{u\in E}\varphi(u)$. Do (2.26) ta có:

$$\begin{aligned}\varphi(T(h)\tilde{p}) &= \mu\|w_k - T(h)\tilde{p}\|^2\\ &= \mu\Big(\|w_k - T(h)w_k\|^2 + \|T(h)w_k - T(h)\tilde{p}\|^2\\ &\qquad + 2\langle w_k - T(h)w_k, T(h)w_k - T(h)\tilde{p}\rangle\Big)\\ &\le \mu\|T(h)w_k - T(h)\tilde{p}\|^2\\ &\qquad + 2\mu\Big(\|w_k - T(h)w_k\|\|T(h)w_k - T(h)\tilde{p}\|\Big)\\ &\le \mu\|w_k - \tilde{p}\|^2 = \varphi(\tilde{p}).\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của điểm $\tilde{p}$ nên ta suy ra $T(h)\tilde{p} = \tilde{p}$, điều này có nghĩa là $\tilde{p} \in \mathcal{F}$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.3, ta có $\tilde{p}$ là cực tiểu của $\varphi(u)$ trên E, khi và chỉ khi

$$\mu\langle u - \tilde{p}, j(w_k - \tilde{p})\rangle \leq 0 \quad \forall u \in E. \tag{2.27}$$

Đặt $u = (I - F)(\tilde{p})$ trong (2.27), ta được

$$\mu\langle F\tilde{p}, j(\tilde{p} - w_k)\rangle \leq 0. \tag{2.28}$$

Trong (2.25), chú ý rằng $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$ và $\{Fw_k\}$ là dãy bị chặn nên ta có $\langle Fp, j(p - w_k + \lambda_k Fw_k) - j(p - w_k)\rangle \to 0$ khi $k \to \infty$. Do vậy, kết hợp (2.25), với p được thay bởi $\tilde{p}$, và (2.28), ta có

$$\mu\|w_k - \tilde{p}\|^2 \leq \frac{2}{\tau}\mu\langle F\tilde{p}, j(\tilde{p} - w_k)\rangle \leq 0.$$

Điều này có nghĩa là $\mu\|w_k - \tilde{p}\|^2 = 0$. Từ đây, dùng tính chất của giới hạn Banach (Mệnh đề 1.3), ta suy ra

$$\liminf_{k\to\infty} \|w_k - \tilde{p}\|^2 \leq \mu\|w_k - \tilde{p}\|^2 = 0.$$

Do đó, tồn tại một dãy con $\{w_{k_i}\}$ của $\{w_k\}$ hội tụ mạnh về điểm $\tilde{p}$ khi $i \to \infty$.

Lặp lại Bước 3 của chứng minh trong Định lý 2.1, sử dụng một lần nữa tính chất liên tục đều mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j của E trong (2.25), ta thu được $\tilde{p}$ cũng là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19). Từ đó, suy ra $\tilde{p} = p_*$, do tính duy nhất của nghiệm của (1.19). Vậy cả dãy $\{w_k\}$ hội tụ mạnh về điểm p_* thỏa mãn (1.19). Định lý được chứng minh.

□

Nhận xét 2.1 Khi $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn, năm 2013, Buong và Phuong [25] đã đề xuất một phương pháp lặp ẩn hội tụ mạnh cho bài toán (1.19) trong không gian Banach E lồi phản xạ, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều với cấu trúc tương tự (2.8) trong đó ánh xạ T_k được thay bởi ánh xạ V_k xác định như sau:

$$V_k = V_k^1, \quad V_k^i = T^iT^{i+1}\dots T^k, \quad T^i = (1 - \alpha_i)I + \alpha_i T_i, \tag{2.29}$$

với mọi $i \leq k$ với $i, k \in \mathbb{N}$, tập các số nguyên dương, α_i thỏa mãn

$$\alpha_i \in (0,1) \quad \text{với} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty, \tag{2.30}$$

và $\lambda_k, \gamma_k \in (0,1)$ sao cho $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Ánh xạ V_k xác định bởi (2.29) và (2.30) còn được gọi là V-ánh xạ.

Trong [25], các tác giả vẫn dùng V-ánh xạ để giải bài toán (1.19) khi $\mathcal{F} := \cap_{i=1}^{\infty}\text{Fix}(T_i)$ với dãy lặp ẩn được xác định bởi

$$x_k = V_k(I - \lambda_k F)x_k, \quad k \geq 1, \tag{2.31}$$

có cấu trúc thuật toán tương tự phương trình lặp ẩn (2.10). Các tác giả cũng thu được sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.31) với các điều kiện (2.29)-(2.30) về nghiệm p_* của (1.19) trong không gian Banach lồi đều và trơn.

Như vậy, có thể coi các phương pháp lặp ẩn (2.8), (2.9) và (2.10) được xét đến trong các Định lý 2.1, 2.2 và Định lý 2.3 là mở rộng của các phương pháp trong [25] theo nghĩa từ tập ràng buộc là tập điểm bất động của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn sang trường hợp khi tập ràng buộc là tập điểm bất động của một họ vô hạn không đếm được các ánh xạ không giãn.

Chú ý 2.1 Kĩ thuật chứng minh dùng giới hạn Banach cũng đã được Ceng (2008) sử dụng trong [27].

2.2. Phương pháp lặp hiện lai ghép đường dốc

2.3.1. Mô tả phương pháp

Khi xây dựng các kĩ thuật lặp ẩn cho bài toán $\text{VI}^*(F, \mathcal{F})$, chúng tôi nhận thấy một khó khăn có thể gặp phải của các phương pháp đó trong thực hành tính toán là tại mỗi bước lặp thứ k, ta đều phải thực hiện các bước giải một phương trình dạng ẩn để tìm được nghiệm xấp xỉ x_k và sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được nghiệm xấp xỉ x_k gần với nghiệm chính xác của bài toán. Khó khăn này có thể được khắc phục bằng các phương pháp lặp hiện tương ứng. Trong mục này, chúng tôi thiết lập phương pháp lặp hiện tương ứng dựa trên hai phương pháp lặp ẩn (2.8) và (2.10).

Phương pháp 2.4. *Xuất phát từ một điểm $x_1 \in E$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau:*

$$x_{n+1} = \gamma_n F_n x_n + (1-\gamma_n) T_n x_n, \quad n \geq 1. \tag{2.32}$$

Phương pháp 2.5. *Xuất phát từ một điểm $x_1 \in E$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau:*

$$x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T_n F_n x_n. \tag{2.33}$$

Các ánh xạ T_n và F_n trong (2.32) và (2.33) lần lượt được xác định bởi

$$T_n x = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds, \tag{2.34}$$

$$F_n x = (I - \lambda_n F)x \quad \forall x \in E, \tag{2.35}$$

và $\{\gamma_n\}$, $\{\lambda_n\}$, $\{t_n\}$ là các dãy tham số thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\lambda_n \in (0,1),\ \lambda_n \to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty, \tag{2.36}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}} = 0, \tag{2.37}$$

và

$$\gamma_n \in (0,1) \text{ sao cho } 0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1. \tag{2.38}$$

2.3.2. Sự hội tụ

Để phục vụ cho việc chứng minh các định lý hội tụ cho các dãy lặp (2.32) và (2.33), ta cần một số kết quả sau:

Bổ đề 2.1 [70] *Cho $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy bị chặn trong không gian Banach E thỏa mãn $x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n z_n$ với $n \geq 1$, ở đây $\{\gamma_n\} \subset (0,1)$ thỏa mãn $0 < \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1$. Giả sử rằng*

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\right] \leq 0.$$

Khi đó $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.

Bổ đề 2.2 [81] *Cho dãy* $\{s_n\}$ *các số thực không âm thỏa mãn*

$$s_{n+1} \le (1-\zeta_n)s_n + \zeta_n\eta_n + \theta_n, \quad n \ge 0,$$

trong đó các dãy $\{\zeta_n\}$, $\{\eta_n\}$, *và* $\{\theta_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\{\zeta_n\} \subset [0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \eta_n \le 0$;

(iii) $\theta_n \ge 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n < \infty$.

Khi đó $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

Mệnh đề 2.1 *Giả sử* $F : E \to E$ *là là ánh xạ* η*-*j*-đơn điệu mạnh và* γ*-giả co chặt với* $\eta + \gamma > 1$ *và cho* $\{T(t) : t \ge 0\}$ *là nửa nhóm không giãn trên* E, *với* E *là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều, sao cho* $\mathcal{F} := \cap_{t\ge 0}\mathrm{Fix}(T(t)) \ne \emptyset$. *Nếu tồn tại một dãy bị chặn* $\{x_n\}$ *thỏa mãn* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0$, *với mọi* $t \ge 0$, *và tồn tại một dãy* $\{y_k\}$ *sao cho* $p_* = \lim_{k\to\infty} y_k$, *trong đó* $\{y_k\}$ *xác định bởi* (2.8), *tức là*

$$y_k = \gamma_k(I-\lambda_k F)y_k + (1-\gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)y_k ds,$$

thì

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle \le 0. \tag{2.39}$$

Chứng minh. Với $n, k \in \mathbb{N}$ cố định và mọi $x, y \in E$ ta có

$$y_k - x_n = \gamma_k[(I-\lambda_k F)y_k - x_n] + (1-\gamma_k)[T_k y_k - x_n]$$

và

$$\begin{aligned}\langle T_k x - T_k y, j(x-y)\rangle &\le \|T_k x - T_k y\|\|x-y\| \\ &= \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}[T(s)x - T(s)y]ds\right\|\|x-y\| \\ &= \left\|\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}(x-y)ds\right\|\|x-y\| \le \|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}&\|y_k - x_n\|^2 \\ &= (1-\gamma_k)\langle T_k y_k - x_n, j(y_k - x_n)\rangle + \gamma_k\langle (I-\lambda_k F)y_k - x_n, j(y_k - x_n)\rangle\end{aligned}$$

$$= (1-\gamma_k)[\langle T_k y_n - T_k x_n, j(y_k - x_n)\rangle + \langle T_k x_n - x_n, (y_k - x_n)\rangle]$$
$$+ \gamma_k \langle (I-\lambda_k F)y_k - y_k, j(y_k - x_n)\rangle + \gamma_k \|y_k - x_n\|^2$$
$$\le (1-\gamma_k)(\|y_k - x_n\|^2 + \|T_k x_n - x_n\|\|y_k - x_n\|)$$
$$+ \gamma_k \langle (I-\lambda_k F)y_k - y_k, j(y_k - x_n)\rangle + \gamma_k \|y_k - x_n\|^2$$
$$\le \|y_k - x_n\|^2 + \|T_k x_n - x_n\|\|y_k - x_n\|$$
$$+ \gamma_k \langle (I-\lambda_k F)y_k - y_k, j(y_k - x_n)\rangle$$
$$= \|y_k - x_n\|^2 + \|T_k x_n - x_n\|\|y_k - x_n\| - \gamma_k\lambda_k \langle F y_k, j(y_k - x_n)\rangle .$$

Và do vậy, ta có

$$\langle F y_k, j(y_k - x_n)\rangle \le \frac{\|x_n - T_k x_n\|}{\gamma_k \lambda_k}\|y_k - x_n\|. \tag{2.40}$$

Mặt khác, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_k x_n\| = 0.$$

Thật vậy, sử dụng định lý giá trị trung bình trên đoạn $[0, t_k]$, ta suy ra tồn tại $0 < u_k < t_k$ sao cho

$$T_k x_n = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x_n ds = \frac{1}{t_k} T(u_k)(t_k - 0)x_n = T(u_k)x_n.$$

Khi đó, theo giả thiết $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0$ với mọi $t \ge 0$ ta suy ra được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_k x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - T(u_k)x_n\| = 0.$$

Do các dãy $\{y_k\}$ và $\{x_n\}$ đều là bị chặn nên $\{y_k - x_n\}$ cũng bị chặn và $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - T_k x_n\| = 0$ với mọi $t_k > 0$, lấy $\limsup$ cả hai vế của (2.40), ta được

$$\limsup_{n\to\infty} \langle F y_k, j(y_k - x_n)\rangle \le 0. \tag{2.41}$$

Mặt khác, sử dụng tính liên tục Lipschitz của ánh xạ F và kết quả $y_k \to p_*$ khi $k \to \infty$ của Địnhh lý 2.1 ta có

$$\|F y_k - F p_*\| \le (1 + \frac{1}{\gamma})\|y_k - p_*\| \to 0,\ k \to \infty, \tag{2.42}$$

trong đó γ là hằng số giả co chặt của ánh xạ F.

Mặt khác, ta lại có:

$$
\begin{aligned}
&|\langle Fy_k, j(y_k - x_n)\rangle - \langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle|\\
&= |\langle Fy_k - Fp_*, j(y_k - x_n)\rangle + \langle Fp_*, j(y_k - x_n) - j(p_* - x_n)\rangle|\\
&\leq \|Fy_k - Fp_*\|\|y_k - x_n\|\\
&\qquad + |\langle Fp_*, j(y_k - x_n) - j(p_* - x_n)\rangle|.
\end{aligned}
$$

Sử dụng tính liên tục đều mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j và (2.42), ta có

$$\lim_{k\to\infty}[j(y_k - x_n) - j(p_* - x_n)] = 0.$$

Do vậy, với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $0 < K \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq K$, $\forall n \in N$ ta có

$$|\langle Fy_k, j(y_k - x_n)\rangle - \langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle| < \varepsilon.$$

Từ đây suy ra, bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $0 < K \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq K$, $\forall n \in N$ ta có

$$\langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle < \langle Fy_n, j(y_n - x_n)\rangle + \varepsilon.$$

Sử dụng (2.41), ta có

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle \leq \limsup_{n\to\infty}\langle Fy_n, j(y_n - x_n)\rangle + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Do tính bất kì của ε, nên ta thu được (2.39). Điều phải chứng minh.

□

Định lý 2.4 *Giả sử E, F, $\{T(s) : s \geq 0\}$ và $\mathcal{F}$ thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ bởi* (2.32) *và các điều kiện* (2.36)-(2.38) *thỏa mãn. Khi đó dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm bất đẳng thức biến phân* (1.19).

Chứng minh. Nội dung chứng minh Định lý 2.4 được chia thành 3 bước như sau.

Bước 1. Ta chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ là bị chặn.

Thật vậy, với $p \in \mathcal{F}$ cố định, ta có $T_n p = p$ và do đó, theo Bổ đề 1.4,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\gamma_n(I - \lambda_n F)x_n + (1-\gamma_n)T_n x_n - p\| \\
&\le \gamma_n \|(I - \lambda_n F)x_n - p\| + (1-\gamma_n)\|T_n x_n - T_n p\| \\
&\le \gamma_n[(1-\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \lambda_n\|Fp\|] + (1-\gamma_n)\|x_n - p\| \\
&= (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \gamma_n\lambda_n\tau\frac{\|Fp\|}{\tau} \\
&\le \ldots \le \max\{\|x_1 - p\|, \|Fp\|/\tau\}.
\end{aligned}$$

Suy ra, $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Từ đây suy ra các dãy $\{T_n x_n\}$, $\{F_n x_n\}$, $\{F x_n\}$, và $\{x_n - p\}$ cũng bị chặn. Giả sử các dãy này bị chặn bởi hằng số dương M_1.

Bước 2. Ta chỉ ra rằng với mọi $t \ge 0$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t)x_n - x_n\| = 0. \tag{2.43}$$

Đặt $z_n = T_n x_n - \frac{\gamma_n\lambda_n}{1-\gamma_n}F x_n$. Từ (2.32) ta suy ra $x_{n+1} = \gamma_n x_n + (1-\gamma_n)z_n$ và

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1} - z_n\| &\le \|T_{n+1}x_{n+1} - T_n x_n\| + \left\|\frac{\gamma_n\lambda_n}{1-\gamma_n}Fx_n - \frac{\gamma_{n+1}\lambda_{n+1}}{1-\gamma_{n+1}}Fx_{n+1}\right\| \\
&\le \|T_{n+1}x_{n+1} - T_{n+1}x_n\| + \|T_{n+1}x_n - T_n x_n\| \\
&\quad + \left\|\frac{\gamma_n\lambda_n}{1-\gamma_n}Fx_n - \frac{\gamma_{n+1}\lambda_{n+1}}{1-\gamma_{n+1}}Fx_{n+1}\right\| \\
&\le \|x_{n+1} - x_n\| + 2\frac{|t_{n+1} - t_n|}{t_{n+1}}M_1 + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\frac{\beta M_1}{1-\beta},
\end{aligned}$$

với β là một số dương thuộc khoảng $(0, 1)$ sao cho $\gamma_n \le \beta$. Kết hợp điều này với $\lambda_n \to 0$ và $|t_{n+1} - t_n|/t_{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$ ta thu được

$$\limsup_{n\to\infty} \big[\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\big] \le 0.$$

Do vậy, từ (2.38) và Bổ đề 2.1 suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0.$$

Mặt khác, do

$$\|z_n - T_n x_n\| = \lambda_n \frac{\gamma_n}{1-\gamma_n}\|Fx_n\| \le \lambda_n\frac{\beta M_1}{1-\beta}$$

và $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên ta có $\|z_n - T_n x_n\| \to 0$. Tiếp theo, ta có

$$0 \le \|x_n - T_n x_n\| \le \|x_n - z_n\| + \|z_n - T_n x_n\| \to 0,\ k \to \infty. \qquad (2.44)$$

Và do đó ta có:

$$\begin{aligned}
&\|x_n - T(t)x_n\| \\
&\le \|x_n - T_n x_n\| + \|T_n x_n - T(t)T_n x_n\| + \|T(t)T_n x_n - T(t)x_n\| \\
&\le 2\|x_n - T_n x_n\| + \|T_n x_n - T(t)T_n x_n\|.
\end{aligned}$$

Sử dụng (2.44) và Bổ đề 1.5 trong bất đẳng thức cuối ta suy ra giới hạn (2.43) thỏa mãn với mọi $t \ge 0$, khi $n \to \infty$.

Bước 3. Ta khẳng định rằng $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p_*\| = 0$, với p_* nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19).

Đặt $y_k = \gamma_k(I - \lambda_k F)y_k + (1-\gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)y_k ds,\ k \ge 1$. Sử dụng kết quả của Định lý 2.5, ta thu được $y_k \to p_*$, khi $k \to \infty$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (1.19). Đồng thời, sử dụng (2.43) và Mệnh đề 2.1 ta có giới hạn (2.39). Tiếp theo ta đánh giá $\|x_{n+1} - p_*\|^2$ như sau:

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - p_*\|^2 \\
&= (1-\gamma_n)\langle T_n x_n - p_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle + \gamma_n\langle (I - \lambda_n F)x_n - p_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle \\
&= (1-\gamma_n)\langle T_n x_n - T_n p_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle \\
&\quad + \gamma_n\lambda_n\langle (I-F)x_n - p_* j(x_{n+1} - p_*)\rangle \\
&\quad + \gamma_n(1-\lambda_n)\left\langle x_n - p_*, j(x_{n+1} - p_*)\right\rangle \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - p_*\|\|x_{n+1} - p_*\| + \gamma_n(1-\lambda_n)\|x_n - p_*\|\|x_{n+1} - p_*\| \\
&\quad + \gamma_n\lambda_n\langle (I-F)x_n - p_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle \\
&\le (1-\gamma_n\lambda_n)\|x_n - p_*\|\|x_{n+1} - p_*\| + \gamma_n\lambda_n(1-\tau)\|x_n - p_*\|\|x_{n+1} - p_*\| \\
&\quad + \gamma_n\lambda_n\langle -Fp_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle \\
&\le (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\frac{\|x_n - p_*\|^2 + \|x_{n+1} - p_*\|^2}{2} + \gamma_n\lambda_n\tau\frac{\langle -Fp_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle}{\tau}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|x_{n+1} - p_*\|^2 \le \frac{1-\gamma_n\lambda_n\tau}{1+\gamma_n\lambda_n\tau}\|x_n - p_*\|^2 + \frac{2\gamma_n\lambda_n\tau}{1+\gamma_n\lambda_n\tau}\frac{\langle -Fp_*, j(x_{n+1} - p_*)\rangle}{\tau},$$

hay

$$\|x_{n+1}-p_*\|^2 \leq \left(1-\frac{2\gamma_n\lambda_n\tau}{1+\gamma_n\lambda_n\tau}\right)\|x_n-p_*\|^2+\frac{2\gamma_n\lambda_n\tau}{1+\gamma_n\lambda_n\tau}\frac{\langle Fp_*, j(p_*-x_{n+1})\rangle}{\tau}.$$

Ta viết lại bất đẳng thức cuối như sau:

$$\|x_{n+1}-p_*\|^2 \leq (1-\zeta_n)\|x_n-p_*\|^2+\zeta_n\eta_n, \tag{2.45}$$

trong đó $\zeta_n = 2\gamma_n\lambda_n\tau/(1+\gamma_n\lambda_n\tau)$ và $\eta_n = \langle Fp_*, j(p_*-x_{n+1})\rangle/\tau$.

Sử dụng giả thiết $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \infty$, ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n = \infty$ và từ (2.39), suy ra $\limsup_{n\to\infty}\eta_n \leq 0$. Khi đó, áp dụng Bổ đề 2.2 (với $\theta_n = 0$) vào (2.45) ta suy ra được $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p_*\|^2 = 0$. Vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về điểm p_* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19). Định lý được chứng minh.

□

Chú ý 2.2 Chúng tôi đã cải tiến kết quả (2.32) theo hướng không sử dụng tích phân Bochner $T_nx = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)xds$ mà thay bằng ánh xạ $T(t_n)$ xác định từ nửa nhóm $\{T(s) : s \geq 0\}$. Khi đó phương pháp (2.32) trở thành

$$x_{n+1} = \gamma_n(I-\lambda_nF)x_n + (1-\gamma_n)T(t_n)x_n, \quad n \geq 1,\ x_1 \in E. \tag{2.46}$$

với $\lambda_n \in (0,1], \gamma_n \in (0,1)$ và $t_n > 0$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty}t_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{t_n} = 0$. Sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.46) được chứng minh với các điều kiện đặt lên không gian Banach E, ánh xạ F và nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ tương tự như trong Định lý 2.4.

Hệ quả 2.1 *Giả sử E, F, $\{T(s) : s \geq 0\}$ và $\mathcal{F}$ thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ theo công thức* (2.46) *và các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $\lambda_n \in (0,1], \gamma_n \in (0,1)$ *và* $t_n > 0$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty}t_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{t_n} = 0$.

Khi đó dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm bất đẳng thức biến phân (1.19) *khi $n \to \infty$.*

Phương pháp lặp (2.46) là dạng hiện tương ứng của phương pháp (2.9) đã xét trong Định lý 2.2. Tiếp theo chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý về sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (2.33).

Định lý 2.5 *Cho E, F, và $\mathcal{F}$ như trong Định lý 2.1. Từ một điểm $x_1 \in E$ bất kỳ, thiết lập $\{x_n\}$ bởi* (2.33) *và các điều kiện* (2.36)-(2.38) *thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến p_* là nghiệm của* (1.19) *khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Việc chứng minh Định lý 2.5 được chia thành các bước như sau:

Bước 1. Chứng minh rằng tồn tại một số dương M_2 sao cho $\|x_n\|, \|T_n x_n\|, \|F_n x_n\|, \|F_{n+1}x_n - p\|, \|Fx_n\| \leq M_2$, với bất kì $p \in \mathcal{F}$.

Với một điểm cố định $p \in \mathcal{F}$, ta có $T_n p = p$, và do đó, theo Bổ đề 1.4,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T_n F_n x_n - p\| \\
&\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \|T_n F_n x_n - T_n p\| \\
&\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \|F_n x_n - p\| \\
&= (1-\gamma_n)\|x_n - p\| \\
&\qquad + \gamma_n \|(I - \lambda_n F)x_n - (I - \lambda_n F)p - \lambda_n F p\| \\
&\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \big[(1-\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \lambda_n \|Fp\|\big] \\
&= (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \gamma_n\lambda_n\tau \frac{\|Fp\|}{\tau} \\
&\leq \max\Big\{\|x_n - p\|, \frac{1}{\tau}\|Fp\|\Big\} \leq \cdots \leq \max\Big\{\|x_1 - p\|, \frac{1}{\tau}\|Fp\|\Big\}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra, $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Do T_n là ánh xạ không giãn và $I - \lambda_n F$ là ánh xạ co, nên

$$\|T_n x_n - T_n p\| \leq \|x_n - p\| \leq \max\Big\{\|x_1 - p\|, \frac{1}{\tau}\|Fp\|\Big\}$$

và

$$\begin{aligned}
\|F_n x_n - F_n p\| &= \|(I - \lambda_n F)x_n - (I - \lambda_n F)p\| \leq (1-\lambda_n\tau)\|x_n - p\| \\
&\leq (1-\lambda_n\tau)\max\Big\{\|x_1 - p\|, \frac{1}{\tau}\|Fp\|\Big\}.
\end{aligned}$$

Như vậy, suy ra các dãy $\{T_n x_n\}$, $\{F_n x_n\}$ và $\{F_{n+1}x_n - p\}$ cũng bị chặn và sự tồn tại của M_2 được chứng minh.

Bước 2. Ta chỉ ra rằng với mọi $t \geq 0$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t)x_n - x_n\| = 0. \tag{2.47}$$

Đặt $z_n = T_nF_nx_n$. Từ (2.33), suy ra

$$x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n z_n, \tag{2.48}$$

và

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| &= \|T_{n+1}F_{n+1}x_{n+1} - T_nF_nx_n\| \\ &\le \|T_{n+1}F_{n+1}x_{n+1} - T_{n+1}F_{n+1}x_n\| \\ &\quad + \|T_{n+1}F_{n+1}x_n - T_nF_{n+1}x_n\| + \|T_nF_{n+1}x_n - T_nF_nx_n\|.\end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned}\|T_{n+1}F_{n+1}x_n - T_nF_{n+1}x_n\| &= \Big\|\frac{1}{t_{n+1}}\int_0^{t_{n+1}}\big[T(s)F_{n+1}x_n - T(s)p\big]ds \\ &\quad - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\big[T(s)F_{n+1}x_n - T(s)p\big]ds\Big\| \\ &= \Big\|\Big(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big)\int_0^{t_n}\big[T(s)F_{n+1}x_n - T(s)p\big]ds \\ &\quad + \frac{1}{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\big[T(s)F_{n+1}x_n - T(s)p\big]ds\Big\| \\ &\le \Big|\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\Big|t_nM_2 + \frac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}M_2 \\ &= 2\frac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}M_2,\end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned}&\|z_{n+1} - z_n\| \\ &\le \|F_{n+1}x_{n+1} - F_{n+1}x_n\| + 2\frac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}M_2 + \|F_{n+1}x_n - F_nx_n\| \\ &\le \|x_{n+1} - x_n\| + 2\lambda_{n+1}M_2 + 2\frac{|t_{n+1}-t_n|}{t_{n+1}}M_2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|M_2.\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.36) và (2.37) ta suy ra

$$\limsup_{n\to\infty}\big[\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\big] \le 0.$$

Do vậy, ta suy ra từ (2.38) và Bổ đề 2.1

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_n\| = 0. \tag{2.49}$$

Do $\|F_nx_n - x_n\| \le \lambda_n M_2$ và $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|F_nx_n - x_n\| = 0. \tag{2.50}$$

Mặt khác, từ (2.49), (2.50), và

$$\begin{aligned}
&\|T_nx_n - x_n\| \\
&\le \|T_nx_n - z_n\| + \|z_n - x_n\| \\
&= \|T_nx_n - T_nF_nx_n\| + \|z_n - x_n\| \le \|x_n - F_nx_n\| + \|z_n - x_n\|,
\end{aligned}$$

ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \|T_nx_n - x_n\| = 0. \tag{2.51}$$

Tiếp theo, với bất kì $t \ge 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\|T(t)x_n - x_n\| &\le \|T(t)x_n - T(t)T_nx_n\| \\
&\quad + \|T(t)T_nx_n - T_nx_n\| + \|T_nx_n - x_n\| \\
&\le 2\|T_nx_n - x_n\| + \|T(t)T_nx_n - T_nx_n\|.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.51), (2.34) và Bổ đề 1.5, ta suy ra được (2.47).

Bước 3. Chứng minh $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p_*\| = 0$, trong đó $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm bất đẳng thức biến phân (1.19).

Xét dãy $\{y_k\}$ xác định bởi (2.8), tức là

$$y_k = \gamma_k(I - \lambda_kF)y_k + (1 - \gamma_k)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)y_k ds,\ \ k \ge 1.$$

Theo Định lý 2.1, ta có dãy $\{y_k\}$ hội tụ mạnh về điểm p_* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19) khi $k \to \infty$.

Sử dụng tính lồi của chuẩn $\|.\|^2$, Bổ đề 1.2 và Bổ đề 1.4, ta đánh giá $\|x_{n+1} - p_*\|^2$ như sau:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p_*\|^2 &\le (1 - \gamma_n)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\|T_nF_nx_n - p_*\|^2 \\
&= (1 - \gamma_n)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\|T_nF_nx_n - T_np_*\|^2 \\
&\le (1 - \gamma_n)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\|F_nx_n - p_*\|^2 \\
&= (1 - \gamma_n)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\|F_nx_n - F_np_* - \lambda_nFp_*\|^2
\end{aligned}$$

$$\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\big[(1-\lambda_n\tau)\|x_n - p_*\|^2 - 2\lambda_n\langle Fp_*, j(x_n - p_* - \lambda_n Fx_n)\rangle\big]$$
$$= (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p_*\|^2 + 2\gamma_n\lambda_n\big[\langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle + \langle Fp_*, j(p_* - x_n + \lambda_n Fx_n) - j(p_* - x_n)\rangle\big]$$
$$\leq (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p_*\|^2 + \gamma_n\lambda_n\tau 2\big[\langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle + \langle Fp_*, j(p_* - x_n + \lambda_n Fx_n) - j(p_* - x_n)\rangle\big]/\tau.$$

Ta viết lại bất đẳng thức cuối như sau:

$$\|x_{n+1} - p_*\|^2 \leq (1-\zeta_n)\|x_n - p_*\|^2 + \zeta_n\eta_n, \tag{2.52}$$

trong đó

$$\zeta_n = \gamma_n\lambda_n\tau,$$
$$\eta_n = 2\big[\langle Fp_*, j(p_* - x_n)\rangle + \langle Fp_*, j(p_* - x_n + \lambda_n Fx_n) - j(p_* - x_n)\rangle\big]/\tau.$$

Theo giả thiết, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \infty$ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n = \infty$. Sử dụng Mệnh đề 2.1 và (2.47), ta có (2.39); kết hợp thêm điều kiện $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, ta suy ra $\limsup_{n\to\infty}\eta_n \leq 0$. Khi đó, áp dụng Bổ đề 2.2 (với $\theta_n = 0$), và (2.52) ta thu được $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p_*\|^2 = 0$. Vậy dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.33) hội tụ mạnh về điểm p_* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (1.19). Định lý được chứng minh.

$\square$

Nhận xét 2.2

(a) Ta có thể viết lại (2.32) dưới dạng

$$\begin{cases} y_n = (I - \lambda_n F)x_n \\ x_{n+1} = \gamma_n y_n + (1-\gamma_n)T_n x_n. \end{cases} \tag{2.53}$$

Khi đó, $y_n = (I - \lambda_n F)x_n$ được xây dựng theo phương pháp đường dốc và $x_{n+1} = \gamma_n y_n + (1-\gamma_n)T_n x_n$ được thiết lập dựa trên dãy lặp dạng Mann (Mann, 1953 [52]).

Phương pháp (2.32) là dạng hiện tương ứng cho phương pháp (2.8) xét trong Định lý 2.1 và phương pháp (2.46) là dạng hiện tương ứng của dãy lặp ẩn (2.9) xét trong Định lý 2.2.

(b) Một số kết quả nghiên cứu theo hướng tiếp cận xây dựng phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một họ các ánh xạ không giãn của các tác giả khác có thể kể đến như các kết quả của Ceng và các cộng sự (2008) [27], Chen và He (2007) [30], Yang và các đồng nghiệp (2012) [85] và Yao và đồng tác giả (2010) [86].

Xét trong trường hợp $\mathcal{F} = \mathrm{Fix}(T)$ là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn thì dãy lặp (2.32) trở thành phương pháp

$$x_{n+1} = \gamma_n(I - \lambda_n F)x_n + (1 - \gamma_n)Tx_n \tag{2.54}$$

được Ceng và đồng nghiệp (2008) [27] nghiên cứu để giải bài toán bất đẳng thức biến phân (1.19) trong không gian Banach có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy.

Chen và He (2007) [30] đã đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết

$$x_{n+1} = \gamma_n f(x_n) + (1 - \gamma_n)T(t_n)x_n, \quad n \geq 1,\ x_1 \in E. \tag{2.55}$$

và chứng minh sự hội tụ mạnh của (2.55) điểm p_* thỏa mãn $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ với $F = I - f$ đã được hai tác giả chứng minh với điều kiện không gian Banach E có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy và các tham số $\{\gamma_n\}, \{t_n\}$ thỏa mãn điều kiện $\gamma_n \in (0,1), \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, t_n > 0, \lim_{n\to\infty} t_n = \lim \frac{\gamma_n}{t_n} = 0$.

Yang và các cộng sự (2012) [85] đã nghiên cứu sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.32) trong không gian Hilbert H với các điều kiện đặt lên các dãy tham số $\{\lambda_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ tương tự như trong Định lý 2.4.

Trong không gian Hilbert H, khi $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn, Yao (2010) [86] đã dùng W-ánh xạ để xây dựng dãy lặp hiện hội tụ mạnh về nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19) dưới dạng

$$x_{n+1} = (1 - \gamma_n)(I - \lambda_n F)x_n + \gamma_n W_n y_n, \quad n \geq 0,$$

với $\lambda_n \in (0, \infty)$, $\gamma_n \in (0,1)$ và ánh xạ W_n là W-ánh xạ do Takahashi (1997) [72] đề xuất, được thiết lập từ các ánh xạ $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ và các số thực

$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$, như sau:

$$\begin{aligned}
&U_{n,n+1} = I,\\
&U_{n,n} = \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1-\alpha_n)I,\\
&U_{n,n-1} = \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1-\alpha_{n-1})I,\\
&\vdots\\
&U_{n,2} = \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1-\alpha_2)I,\\
&W_n = U_{n,1} = \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1-\alpha_1)I,
\end{aligned}$$

ở đây $0 \leq \alpha_i \leq b < 1$ với $i \geq 1$.

Các phương pháp được kể đến trong [27], [30], [85] và [86] ở trên cũng được các tác giả xét đến trong không gian Hilbert hoặc không gian Banach có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy. Sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp hiện (2.32), (2.33) và (2.46) trong các Định lý 2.4, Định lý 2.5 và Hệ quả 2.1 được chứng minh cũng không cần dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E. Như vậy có thể khẳng định các kết quả về phương pháp lặp hiện (2.32), (2.33) và (2.46) của luận án có tính cải tiến và mở rộng hơn các kết quả đã đề cập đến ở trên.

(c) Tích phân Bochner của toán tử $T(s), s \geq 0$ tại bước lặp thứ n trong các phương pháp lặp ẩn (2.8), (2.9), (2.10) và phương pháp lặp hiện (2.32), (2.33), (2.46) xác định bởi $T_n x_n = \int_0^{t_n} T(s)x_n ds$ có thể tính gần đúng bởi tổng Riemann (Neerven, 2002 [55]).

2.3. Ví dụ số minh họa

Trong mục này chúng tôi trình bày một ví dụ số nhằm minh họa cho các thuật toán lặp ẩn (2.8), (2.9), và (2.10), các phương pháp lặp hiện (2.32) và (2.33) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân bằng ngôn ngữ MATLAB 7.0 và đã chạy thử nghiệm trên máy tính DELL INSPIRON, CORE i5, RAM 1,7GHz.

Xét bài toán cực trị có ràng buộc

$$\varphi(p_*) = \min_{x \in C} \varphi(x), \tag{2.56}$$

với C là tập con khác rỗng lồi đóng trong không gian Euclid $\mathbb{R}^N$, với $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là hàm lồi chính thường liên tục trên $\mathbb{R}^N$ có dạng

$$\varphi(x) = \|x - a\|^2,\ x \in \mathbb{R}^N, a = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N.$$

Khi đó, ta có gradient $\bigtriangledown\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ của hàm φ là

$$\bigtriangledown\varphi(x) = 2(x - a),$$

và điều kiện tối ưu cho bài toán (2.56) là bất đẳng thức biến phân sau:

$$\langle \bigtriangledown\varphi(p_*), x - p_* \rangle \geq 0,\ \forall x \in C. \tag{2.57}$$

Xét trường hợp $N = 100$ và $C = \mathcal{F}$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm các ánh xạ không giãn $\{T(t) : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100},\ t \geq 0\}$ sau:

$$T(t)x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{98} \\ x_{99} \\ x_{100} \end{pmatrix},$$

với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{100})^T \in \mathbb{R}^{100}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ cố định. Khi đó dễ dàng kiểm tra được $\{T(t) : t \geq 0\}$ thỏa mãn các tính chất của nửa nhóm không giãn và $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^{100} :\ x = (0, \ldots, 0, x_5, \ldots, x_{98}, 0, 0)^T\}$ là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$. Nghiệm đúng của bài toán (2.56) là điểm $p_* = (0, 0, 0, 0, 1, \ldots, 1, 0, 0)^T \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{100}$.

Chúng tôi sử dụng các phương pháp lặp ẩn (2.8), (2.9) và (2.10); các phương pháp lặp hiện (2.33) và (2.32) để tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.57) cũng chính là nghiệm của bài toán (2.56) với hàm $F(x) = \bigtriangledown\varphi(x)$ có tính chất 2-đơn điệu mạnh và 1-liên tục Lipschitz.

2.4.1. Minh họa số cho phương pháp (2.8)

Phương pháp (2.8) được viết lại dưới dạng sau:

$$[(\gamma_k - 2\gamma_k\lambda_k - 1)I + (1 - \gamma_k)T_k]x^k = -2\gamma_k\lambda_k,$$

ở đây I là ma trận đơn vị cấp 100 và $T_k x^k = \frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} T(s)x^k ds$ là tích phân Bochner xác định bởi phép nhân các ma trận T_k và x^k, trong đó

$$T_k = \frac{1}{t_k}\begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha t_k)}{\alpha} & \frac{\cos(\alpha t_k)-1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\cos(\alpha t_k)}{\alpha} & \frac{\sin(\alpha t_k)}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin(\alpha t_k)}{\alpha} & \frac{\cos(\alpha t_k)-1}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\cos(\alpha t_k)}{\alpha} & \frac{\sin(\alpha t_k)}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_k & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\sin(\beta t_k)}{\beta} & \frac{\cos(\beta t_k)-1}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-\cos(\beta t_k)}{\beta} & \frac{\sin(\beta t_k)}{\beta} \end{pmatrix}$$

và $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{100}^k)^T$.

Khi đó, phương pháp lặp ẩn (2.8) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận $A^k x^k = b^k$ với A^k, x^k, và b^k là các ma trận xác định bởi

$$A^k = \begin{pmatrix} \vartheta_k & \sigma_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_k & \vartheta_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_k & \sigma_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_k & \vartheta_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\gamma_k\lambda_k & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\gamma_k\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta'_k & \sigma'_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma'_k & \vartheta'_k \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$x^k = \left(x_1^k, \quad x_2^k, \quad \dots, \quad x_{100}^k\right)^T, \; b^k = \left(-2\gamma_k\lambda_k, -2\gamma_k\lambda_k, \dots, -2\gamma_k\lambda_k\right)^T,$$

trong đó các phần tử $\vartheta_k, \vartheta'_k$ và σ_k, σ'_k ở trong ma trận A^k được xác định bởi $\vartheta_k = \gamma_k - 2\gamma_k\lambda_k - 1 + \frac{(1-\gamma_k)\sin(\alpha t_k)}{\alpha t_k}, \vartheta'_k = \gamma_k - 2\gamma_k\lambda_k - 1 + \frac{(1-\gamma_k)\sin(\beta t_k)}{\beta t_k}$ và $\sigma_k = \frac{(1-\gamma_k)[\cos(\alpha t_k)-1]}{\alpha t_k}, \sigma'_k = \frac{(1-\gamma_k)[\cos(\beta t_k)-1]}{\beta t_k}$. Trong tính toán thử nghiệm, chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$ và các dãy số $t_k = (1+k)^2,\ \gamma_k = (1+k)^{-1/2}$ và $\lambda_k = (1+k)^{-3}$. Kết quả tính toán trên MATLAB được thể hiện trong bảng dưới đây:

k	err $= \|x^k - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	1.0331	0.486
2	0.19829	0.514
3	0.074098	0.496
10	0.0015884	0.496
20	0.00014785	0.516
50	6.0132×10^{-6}	0.534
100	5.2543×10^{-7}	0.582

Bảng 2.1: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.8)

Chú ý 2.3 err $= \|x^k - p_*\|$ đo độ lệch giữa nghiệm xấp xỉ x_k tại bước lặp thứ k với nghiệm chính xác $p_* = (0, 0, 0, 0, 1, \ldots, 1, 0, 0) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{100}$ của bài toán (2.56).

2.4.2. Minh họa số cho phương pháp (2.9)

Phương pháp lặp ẩn (2.9) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận $A^k x^k = b^k$, trong đó A^k, x^k, và b^k lần lượt là các ma trận xác định tương tự như (2.58) với các phần tử $\vartheta_k, \vartheta'_k$ và σ^k, σ'_k được cho bởi như sau: $\vartheta_k = \gamma_k - 2\gamma_k\lambda_k - 1 + (1-\gamma_k)\cos(\alpha t_k), \vartheta'_k = \gamma_k - 2\gamma_k\lambda_k - 1 + (1-\gamma_k)\cos(\beta t_k)$ và $\sigma_k = -(1-\gamma_k)\sin(\alpha t_k), \sigma'_k = -(1-\gamma_k)\sin(\beta t_k)$. Trong tính toán thử nghiệm, chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$ và các dãy tham số $t_k = (1+k)^{-2},\ \gamma_k = (1+k)^{-1/2}$ và $\lambda_k = (1+k)^{-3}$. Kết quả tính toán trên MATLAB được thể hiện trong bảng dưới đây:

k	err $= \|x^k - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	2.346	0.487
2	2.0501	0.517
3	1.6169	0.518
10	0.34745	0.518
20	0.11891	0.518
50	0.028598	0.546
100	0.0098004	0.595

Bảng 2.2: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.9)

2.4.3. Minh họa số cho phương pháp (2.10)

Phương pháp lặp ẩn (2.10) được biểu diễn dưới dạng phương trình ma trận $A^k x^k = b^k$, trong đó A^k, x^k, và b^k lần lượt là các ma trận sau:

$$A^k = \begin{pmatrix} \vartheta_k & \sigma_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_k & \vartheta_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_k & \sigma_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_k & \vartheta_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\lambda_k & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta'_k & \sigma'_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma'_k & \vartheta'_k \end{pmatrix}$$

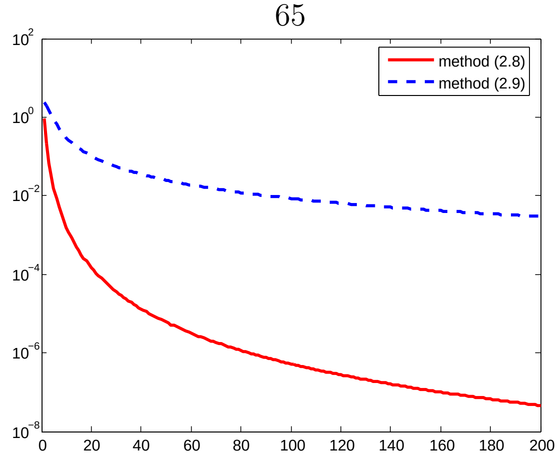
$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k, & x_2^k, & \dots, & x_{10}^k \end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned} b^k = \Bigg(& \frac{-2\lambda_k[\sin(\alpha t_k) + \cos(\alpha t_k) - 1]}{\alpha t_k}, \frac{-2\lambda_k[1 - \cos(\alpha t_k) + \sin(\alpha t_k)]}{\alpha t_k}, \\ & \frac{-2\lambda_k[\sin(\alpha t_k) + \cos(\alpha t_k) - 1]}{\alpha t_k}, \frac{-2\lambda_k[1 - \cos(\alpha t_k) + \sin(\alpha t_k)]}{\alpha t_k}, \\ & -2\lambda_k, \dots, -2\lambda_k, \frac{-2\lambda_k[\sin(\alpha t_k) + \cos(\alpha t_k) - 1]}{\alpha t_k}, \frac{-2\lambda_k[1 - \cos(\alpha t_k) + \sin(\alpha t_k)]}{\alpha t_k} \Bigg)^T, \end{aligned}$$

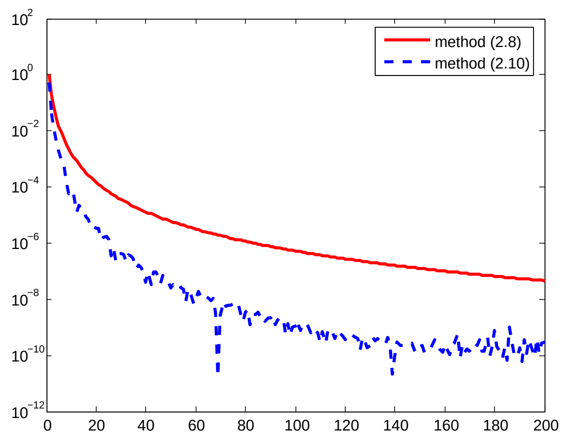
ở đây các phần tử $\vartheta_k, \vartheta'_k$ và σ_k, σ'_k được xác định bởi $\vartheta_k = -1 + \frac{(1-2\lambda_k))\sin(\alpha t_k)}{\alpha t_k}$, $\vartheta'_k = -1 + \frac{(1-2\lambda_k))\sin(\beta t_k)}{\beta t_k}$ và $\sigma_k = \frac{(1-2\lambda_k)[\cos(\alpha t_k)-1]}{\alpha t_k}, \sigma'_k = \frac{(1-2\lambda_k)[\cos(\beta t_k)-1]}{\beta t_k}$. Trong tính toán thử nghiệm, chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$ và các dãy số $t_k = (1+k)^2$ và $\lambda_k = (1+k)^{-3}$. Bảng dưới đây thể hiện kết quả tính toán cho phương pháp lặp (2.10).

k	err $= \|x^k - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	0.54985	0.494
2	0.040575	0.526
3	0.012548	0.526
10	7.3717×10^{-5}	0.533
20	3.2335×10^{-6}	0.578
50	2.5457×10^{-8}	0.595
100	1.2376×10^{-9}	0.601

Bảng 2.3: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.10)



Hình 2.1: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (2.8) và (2.9)



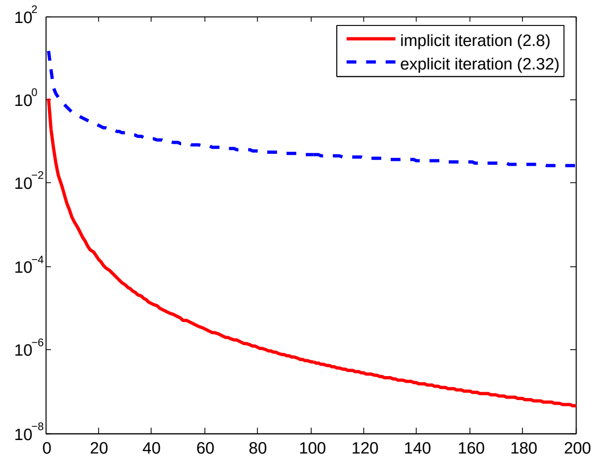
Hình 2.2: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (2.8) và (2.10)

2.4.4. Minh họa số cho phương pháp (2.32) và (2.33)

Với xấp xỉ ban đầu $x_0 = (5, 5, \ldots, 5)^T \in \mathbb{R}^{100}$, chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$ và các dãy số $t_n = (n+1)^2$, $\gamma_n = (n+1)^{-1/2}$ và $\lambda_n = (n+1)^{-1/3}$. Kết quả tính toán trên MATLAB cho hai phương pháp được cho trong các bảng dưới đây.

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	40.669	0.49
2	6.2061	0.529
3	3.6527	0.542
10	1.3108	0.563
20	0.30432	0.563
50	0.093269	0.65
100	0.044659	0.81

Bảng 2.4: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.32)



Hình 2.3: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (2.8) và (2.32)

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	14.629	0.47
2	3.6895	0.487
3	0.95011	0.497
10	0.10925	0.497
20	0.023722	0.543
50	0.0029437	0.545
100	0.00046374	0.555

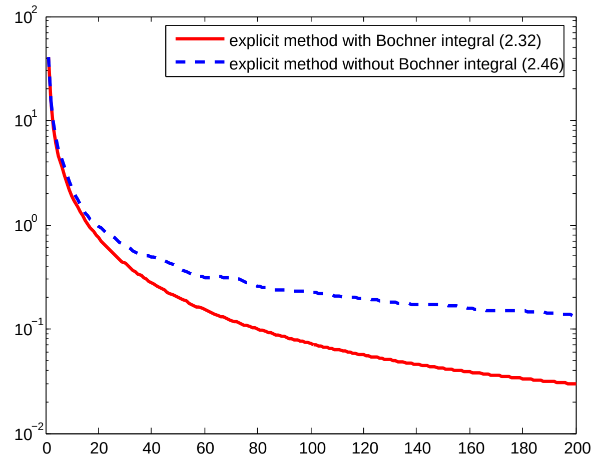
Bảng 2.5: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.33)

2.4.5. Minh họa số cho phương pháp (2.46)

Chọn xấp xỉ ban đầu $x_1 = (5, 5, \ldots, 5)^T \in \mathbb{R}^{100}$, $\alpha = \pi/5$ và các dãy số $t_n = (n+1)^{-1/1000}$, $\gamma_n = (n+1)^{-1/2}$ và $\lambda_n = (n+1)^{-1/5}$. Các kết quả tính toán số trên MATLAB được thể hiện trong bảng dưới đây.

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	40.669	0.523
2	6.2373	0.541
3	3.5513	0.544
10	1.2942	0.555
20	0.29666	0.558
50	0.11037	0.568
100	0.051335	0.57

Bảng 2.6: Bảng tính toán thử nghiệm cho dãy lặp (2.46)



Hình 2.4: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (2.32) và (2.46)

Nhận xét 2.3

(a) Các kết quả tính toán số thu được trong các bảng trên cho thấy các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện đã xét hội tụ khá tốt về nghiệm của bài toán (2.56).

(b) Khi so sánh các kết quả tính toán số nhận được từ hai phương pháp lặp hiện (2.32) và (2.46) có cùng cấu trúc, thì ta thấy khi không dùng tích phân Bochner, phương pháp (2.46) hội tụ chậm hơn so với phương pháp (2.32). Tuy nhiên cũng cần nói thêm rằng những so sánh này chỉ dựa trên các kết quả thực nghiệm.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong Chương 2, chúng tôi đã đưa ra ba phương pháp lặp ẩn và hai phương pháp lặp hiện dựa trên phương pháp lai ghép đường dốc nhất để tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach lồi đều và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Sự hội tụ mạnh của phương pháp đã được chứng minh dựa trên nguyên lý ánh xạ co Banach và các tính chất liên tục đều mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j cùng một số điều kiện đặt lên các dãy tham số của phương pháp. Chúng tôi cũng có một số nhận xét và so sánh các kết quả của chúng tôi với một số kết quả có liên quan của các tác giả khác. Các phương pháp lặp ẩn có ưu điểm là các điều kiện đặt lên dãy lặp khá nhẹ và hội tụ khá nhanh. Một khó khăn của phương pháp lặp ẩn là tại mỗi bước lặp ta đều phải giải phương trình để tìm nghiệm. Việc đưa ra các phương pháp lặp hiện dựa trên tư tưởng của phương pháp lặp ẩn nhằm khắc phục nhược điểm này của phương pháp lặp ẩn. Cần nói thêm rằng việc chứng minh sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp hiện đã đề xuất lại cần đến vai trò của các phương pháp lặp ẩn đã xét. Ở cuối chương, chúng tôi đưa ra ví dụ số mang tính chất minh họa cho các phương pháp đã xây dựng.

Chương 3
Phương pháp hiệu chỉnh giải bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu xây dựng các phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán (1.19) khi tập chấp nhận được là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn. Nội dung của chương được trình bày trong 4 mục. Trong Mục 3.1 và Mục 3.2, dành cho việc đề xuất phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bài toán (1.19). Trong Mục 3.3, ta kết hợp phương pháp hiệu chỉnh trong Mục 3.1 với kĩ thuật lặp hiện để xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach q-trơn đều. Ví dụ số mang tính chất minh họa cho các phương pháp đã thiết lập được đưa ra trong Mục 3.4. Các kết quả của chương này được viết trên cơ sở các bài báo (1), (4) và (5) trong Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

3.1. Phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov

Những nghiên cứu về phương pháp hiệu chỉnh trong không gian Banach xuất phát từ nhiều quan điểm Toán học khác nhau: một mặt, tồn tại nhiều ứng dụng trong thực hành mà việc sử dụng mô hình toán học thiết lập trong không gian Hilbert, chẳng hạn như phương trình toán tử trong không gian $L^2[a, b]$, không còn thực tế và thích hợp. Những ứng dụng này đòi hỏi một mô hình toán học tổng quát hơn xét trong các không gian Banach

$L^p[a,b]$, không gian Sobolev, hoặc không gian các hàm liên tục; mặt khác, những công cụ toán học và các kĩ thuật điển hình của không gian Banach có thể giúp chúng ta vượt qua những hạn chế của những bài toán thiết lập trong không gian Hilbert. Thực tế cho thấy rằng các không gian Banach cho phép chúng ta thiết lập các mô hình cho các ứng dụng cụ thể trong một môi trường tổng quát hơn so với khi chỉ xét mô hình đó trong không gian Hilbert. Chẳng hạn, khi người ta xét đến những bài toán ứng dụng như nhiễu xạ tia X, bài toán xác định tham số của phương trình đạo hàm riêng, hay các bài toán ngược trong tài chính (xem [66]).

Ta biết rằng bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach nói chung là một bài toán đặt không chỉnh. Do vậy các phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach cũng là một chủ đề nghiên cứu cần được quan tâm.

Xét bất đẳng thức biến phân (1.15) khi $F : E \to E$ là j-đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz và tập ràng buộc $C := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$, năm 2012, sử dụng V-ánh xạ, Buong và Phuong [24] đã đưa ra phương trình hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov cho bài toán (1.15) như sau:

$$(I - V_n)x_n + \varepsilon_n F x_n = 0, \tag{3.1}$$

trong đó ánh xạ V_n được xác định bởi (2.29)–(2.30). Sau đó, tác giả Thuy (2015) [75] đã cải tiến kết quả trong [25] cho bài toán tương tự bằng cách sử dụng S-ánh xạ thay cho V-ánh xạ như sau:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/s_n)T_i, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \tag{3.2}$$

với α_i thỏa mãn (2.30). Có thể thấy S-ánh xạ trong [75] có cấu trúc đơn giản hơn V-ánh xạ.

Mở rộng kết quả của Buong và Phuong (2012) và Thuy (2015) từ $C := \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$ lên $C := \mathcal{F} = \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s))$, ta xây dựng phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F,\mathcal{F})$ trong không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều như sau.

Phương pháp 3.1. *Phương trình hiệu chỉnh cho bất đẳng thức biến phân*

(1.19) *được cho bởi*

$$A_n x_n + \varepsilon_n F x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{3.3}$$

trong đó $A_n = I - T_n$*, và* T_n *được xác định bởi*

$$T_n x = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x ds \quad \forall x \in E, \tag{3.4}$$

và $\{t_n\}$*,* $\{\varepsilon_n\}$ *là các dãy tham số dương thỏa mãn* $t_n \to \infty$ *và* $\varepsilon_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$*.*

Sau đây là định lý về sự tồn tại duy nhất và hội tụ mạnh của nghiệm hiệu chỉnh trong phương trình (3.3).

Định lý 3.1 *Cho* E *là không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* η*-*j*-đơn điệu mạnh và* L*-liên tục Lipschitz với* η *and* L *là các tham số dương. Cho* $\{T(s) : \ s \geq 0\} : E \to E$ *là nửa nhóm không giãn trên* E *sao cho* $\mathcal{F} = \cap_{s\geq 0} \mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$*. Khi đó,*

(*i*) *Với mỗi* $t_n > 0$ *và* $\varepsilon_n > 0$*, phương trình hiệu chỉnh* (3.3) *có duy nhất nghiệm* x_n*.*

(*ii*) *Nếu các dãy tham số* t_n *và* ε_n *được chọn sao cho*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

thì dãy $\{x_n\}$ *hội tụ mạnh đến* $p_* \in \mathcal{F}$ *thỏa mãn bất đẳng thức biến phân* (1.19).

(*iii*) *Hơn nữa, ta có đánh giá sau:*

$$\|x_n - x_m\| \leq \left(\frac{|\varepsilon_m - \varepsilon_n|}{\varepsilon_n} + 2\frac{|t_m - t_n|}{\varepsilon_n t_m}\right)\frac{M_1}{\eta} \tag{3.5}$$

ở đây M_1 *là một tham số dương,* x_n*,* x_m *là các nghiệm hiệu chỉnh của* (3.3) *với các dãy tham số tương ứng* t_n*,* ε_n *và* t_m*,* ε_m*.*

Chứng minh.

(*i*) Ta có

$$\|T_n x - T_n y\| = \Big\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)y ds\Big\|$$

$$= \frac{1}{t_n}\Big\| \int_0^{t_n} (T(s)x - T(s)y)ds \Big\|$$
$$\leq \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \|x - y\| ds = \|x - y\|,$$

với mọi $x, y \in E$, suy ra T_n là ánh xạ không giãn trên E. Khi đó ta có $A_n = I - T_n$ là ánh xạ j-đơn điệu. Do vậy,

$$\begin{aligned}
\|(A_n + \varepsilon_n F)x - (A_n + \varepsilon_n F)y\| &\leq \|A_n x - A_n y\| + \varepsilon_n \|Fx - Fy\| \\
&\leq \|(I - T_n)x - (I - T_n)y\| + \varepsilon_n L\|x - y\| \\
&\leq \|(x - y) - (T_n x - T_n y)\| + \varepsilon_n L\|x - y\| \\
&\leq (2 + \varepsilon_n L)\|x - y\|,
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\langle (A_n + \varepsilon_n F)x - (A_n + \varepsilon_n F)y, j(x - y)\rangle \\
&\qquad = \langle A_n x - A_n y, j(x - y)\rangle + \varepsilon_n \langle Fx - Fy, j(x - y)\rangle \\
&\qquad \geq \varepsilon_n \eta \|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Suy ra $A_n + \varepsilon_n F$, với mỗi $\varepsilon_n > 0$, là $(2 + \varepsilon_n L)$-liên tục Lipschitz và $\varepsilon_n\eta$-j-đơn điệu mạnh trên E. Do đó, phương trình hiệu chỉnh (3.3) có nghiệm duy nhất x_n, với mỗi $\varepsilon_n > 0$ (xem [17]).

(ii) Tiếp theo ta chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Thật vậy, với bất kì $p \in \mathcal{F}$, ta có $A_n p = (I - T_n)p = p - T_n p = 0$, và do đó, từ (3.3) dẫn đến

$$\langle A_n x_n - A_n p, j(x_n - p)\rangle + \varepsilon_n \langle F x_n, j(x_n - p)\rangle = 0.$$

Kết hợp điều này với tính j-đơn điệu của A_n và $\varepsilon_n > 0$, ta thu được

$$\langle F x_n, j(x_n - p)\rangle \leq 0.$$

Suy ra

$$\|x_n - p\|^2 \leq \langle Fp, j(p - x_n)\rangle / \eta, \tag{3.6}$$

vì F là η-j-đơn điệu mạnh. Do đó, $\|x_n - p\| \leq \|Fp\|/\eta$. Điều này chứng tỏ $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Do T_n cũng là ánh xạ không giãn nên $\{T_n x_n\}$ cũng là dãy bị chặn và từ tính giả co chặt của F ta suy ra được tính bị chặn của dãy $\{Fx_n\}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử các dãy này bị chặn bởi hằng số dương M_1 với mọi $n \geq 1$.

Vì $\|A_n x_n\| = \varepsilon_n \|F x_n\| \leq \varepsilon_n M_1$ và $\varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nên ta có $\|A_n x_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Giới hạn này được viết lại dưới dạng như sau:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x_n ds \right\| = 0. \tag{3.7}$$

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng $\|x_n - T(t)x_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$, với $t \geq 0$ bất kỳ. Thật vậy, dễ thấy

$$\begin{aligned}
\|T(t)x_n - x_n\| \leq & \left\| T(t)x_n - T(t)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds\right) \right\| \\
& + \left\| T(t)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds \right\| \\
& + \left\| \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds - x_n \right\| \\
\leq & \, 2\left\| x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds \right\| \\
& + \left\| T(t)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds \right\|.
\end{aligned}$$

Khi đó, sử dụng Bổ đề 1.4 và (3.7), ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t)x_n\| = 0. \tag{3.8}$$

Bây giờ, với giới hạn Banach μ, ta xét ánh xạ $\varphi : E \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\varphi(x) = \mu\|x_n - x\|^2 \quad \forall x \in E.$$

Rõ ràng, $\varphi(x)$ là hàm lồi và liên tục. Đặt

$$C^* = \{u \in E : \varphi(u) = \inf_{x\in E} \varphi(x)\},$$

Vì E là không gian Banach phản xạ nên C^* là tập khác rỗng. Hơn nữa, do tính lồi và liên tục của φ nên tập C^* là tập con lồi đóng của E. Do $T(t)$ là ánh xạ không giãn và (3.8), với mọi $u \in C^*$, ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(T(t)u) = \mu\|x_n - T(t)u\|^2 &\leq \mu\big(\|x_n - T(t)x_n\| + \|T(t)x_n - T(t)u\|\big)^2 \\
&\leq \mu\|x_n - u\|^2 = \varphi(u).
\end{aligned}$$

Suy ra, $T(t)u \in C^*$, và do đó $T(t)C^* \subset C^*$, tức là C^* là tập bất biến dưới tác động của ánh xạ $T(t)$. Giả sử lấy một điểm bất kỳ $p \in \mathcal{F}$. Vì mọi tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach lồi chặt và phản xạ E là tập Chebyshev nên tồn tại duy nhất một điểm $\overline{p} \in C^*$ sao cho

$$\|p - \overline{p}\| = \inf_{x \in C^*} \|p - x\|.$$

Mặt khác, $p = T(t)p$ do $p \in \mathcal{F}$, $T(t)\overline{p} \in C^*$ và $T(t)$ là ánh xạ không giãn, nên ta có

$$\|p - T(t)\overline{p}\| = \|T(t)p - T(t)\overline{p}\| \leq \|p - \overline{p}\|,$$

và do đó $T(t)\overline{p} = \overline{p}$ với mọi $t \geq 0$, do tính duy nhất của $\overline{p} \in C^*$. Do vậy, $\overline{p} \in \mathcal{F} \cap C^*$. Theo Bổ đề 1.3, $\overline{p}$ là cực tiểu của hàm $\varphi(u)$ trên E, khi và chỉ khi

$$\mu\langle u - \overline{p}, j(x_n - \overline{p})\rangle \leq 0 \quad \forall u \in E. \tag{3.9}$$

Đặt $u = (I - F)(\overline{p})$ trong (3.9), ta thu được

$$\mu\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - x_n)\rangle \leq 0. \tag{3.10}$$

Từ (3.6) và (3.10) ta suy ra

$$0 \leq \mu\|x_n - \overline{p}\|^2 \leq \mu\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - x_n)\rangle \leq 0.$$

Do đó, $\mu\|x_n - \overline{p}\|^2 = 0$. Theo tính chất của giới hạn Banach ta có

$$0 \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n - \overline{p}\|^2 \leq \mu\|x_n - \overline{p}\|^2 = 0.$$

Suy ra, tồn tại một dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $\overline{p}$ khi $i \to \infty$. Một lần nữa, sử dụng (3.6) và tính liên tục đều mạnh-yếu* của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j trên mọi tập con bị chặn của E, ta thu được

$$\langle Fp, j(\overline{p} - p) \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{F}. \tag{3.11}$$

Do p và $\overline{p}$ đều thuộc tập con lồi đóng $\mathcal{F}$ của E, nên thay p trong (3.11) bởi $sp + (1 - s)\overline{p}$ với $s \in (0, 1)$, và sử dụng tính chất

$$j(s(\overline{p} - p)) = sj(\overline{p} - p), \quad s > 0,$$

ta có

$$\langle F(sp + (1-s)\overline{p}), j(\overline{p} - sp - (1-s)\overline{p})\rangle \leq 0.$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức cuối cho s và cho $s \to 0$, ta được

$$\langle F\overline{p}, j(\overline{p} - p) \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{F}.$$

Điều này chứng tỏ $\overline{p}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19). Tính duy nhất của p_* trong (1.19) bảo đảm rằng $\overline{p} = p_*$. Vậy cả dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến p_* khi $n \to \infty$.

(iii) Từ (3.3), ta có

$$\begin{aligned} A_n x_n + \varepsilon_n F x_n &= 0, \\ A_m x_m + \varepsilon_m F x_m &= 0. \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} &\langle A_n x_n - A_n x_m, j(x_n - x_m)\rangle + \langle A_n x_m - A_m x_m, j(x_n - x_m)\rangle \\ &+\varepsilon_n \langle F x_n - F x_m, j(x_n - x_m)\rangle + (\varepsilon_n - \varepsilon_m)\langle F x_m, j(x_n - x_m)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Do tính j-đơn điệu của A_n, và tính η-j-đơn điệu mạnh của F, ta có

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{|\varepsilon_m - \varepsilon_n|}{\eta\varepsilon_n}\|F x_m\| + \frac{1}{\eta\varepsilon_n}\|A_m x_m - A_n x_m\|. \tag{3.12}$$

Ta đánh giá $\|A_m x_m - A_n x_m\|$ như sau:

$$\begin{aligned} \|A_m x_m - A_n x_m\| &= \|T_n x_m - T_m x_m\| \\ &= \left\| \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) x_m ds - \frac{1}{t_m}\int_0^{t_m} T(s) x_m ds \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_m}\right)\int_0^{t_n} T(s) x_m ds - \frac{1}{t_m}\int_{t_n}^{t_m} T(s) x_m ds \right\| \\ &\leq \left|\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_m}\right| t_n M_1 + \frac{|t_m - t_n|}{t_m} M_1 = 2\frac{|t_m - t_n|}{t_m} M_1. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức cuối vào (3.12), ta thu được đánh giá (3.5). Định lý được chứng minh.

□

Chú ý 3.1 Đánh giá (3.5) trong Định lý 3.1 được dùng để chứng minh các kết quả của Định lý 3.2 và Định lý 3.5. Ngoài ra, khi các tham số t_n, t_m và $\varepsilon_n, \varepsilon_m$ được chọn thích hợp thì vế phải của (3.5) sẽ hội tụ về 0 khi $n, m \to \infty$, chẳng hạn khi $m = n + 1$ và t_n, ε_n thỏa mãn các điều kiện (i) và (iv) của Định lý 3.2 được phát biểu ngay sau đây.

3.2. Phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính

Khi dùng phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov, một bài toán thường được xét cùng với việc xây dựng thuật toán là bài toán chọn tham số hiệu chỉnh, vì khi tham số hiệu chỉnh $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$ thì tính đặt chỉnh của bài toán càng giảm và bài toán hiệu chỉnh có thể trở nên khó giải hơn. Phương pháp điểm gần kề quán tính cho ta một kĩ thuật hiệu chỉnh khác giúp tránh được khó khăn này của phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov. Phương pháp điểm gần kề quán tính được Alvarez (2000) [5] đề xuất cho bài toán tối ưu lồi trong không gian Hilbert H. Sau đó, Attouch và Alvarez (2001) [6] dùng phương pháp này để xét bài toán tìm không điểm cho một toán tử đơn điệu cực đại A trong H dưới dạng:

$$0 \in c_n A z_{n+1} + z_{n+1} - z_n - \gamma_n (z_n - z_{n-1}), \quad z_0, z_1 \in H.$$

Khi $\gamma_n = 0$, phương pháp điểm gần kề quán tính trở thành phương pháp điểm gần kề do Rockafellar [59] nghiên cứu năm 1976 cho bài toán xác định không điểm của toán tử đơn điệu cực đại A.

Tuy nhiên, phương pháp điểm gần kề và phương pháp điểm gần kề quán tính chỉ cho hội tụ yếu. Năm 2008, dựa trên các kết quả đã có của mình, Buong (2008) [19] đã nghiên cứu kết hợp phương pháp hiệu chỉnh với phương pháp điểm gần kề quán tính cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử đơn điệu cực đại $A_i = \partial f_i$ với ∂f_i là dưới vi phân của các phiếm hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$ trong không gian Hilbert H. Phương pháp của Buong (2008) [19] được thiết lập dưới dạng

$$c_n \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_n^i A_i^n z_{n+1} + \alpha_n^{N+1} z_{n+1} \right) + z_{n+1} - z_n \ni \gamma_n (z_n - z_{n-1}), \tag{3.13}$$

trong đó $z_0, z_1 \in H$, $\{c_n\}, \{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}$ là các dãy số thực không âm và A_i^n là các toán tử đơn điệu cực đại xấp xỉ toán tử dưới vi phân ∂f_i theo nghĩa $\mathcal{H}(A_i^n x, \partial f_i(x)) \leq h_n g(\|x\|)$, với g là một hàm giới nội không âm. Sự kết hợp này đã cho một kết quả rất thú vị là sự hội tụ mạnh của phương pháp (3.13).

Dựa vào phương pháp hiệu chỉnh (3.3), chúng tôi kết hợp hiệu chỉnh với phương pháp điểm gần kề quán tính để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính như sau.

Phương pháp 3.2. *Xuất phát từ hai điểm $z_0, z_1 \in E$ bất kỳ, ta xây dựng dãy $\{z_n\}$ xác định bởi phương trình dưới đây:*

$$c_n(A_n + \varepsilon_n F)(z_{n+1}) + z_{n+1} - z_n = \gamma_n(z_n - z_{n-1}), \tag{3.14}$$

ở đây $\{c_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy tham số dương.

Sự hội tụ mạnh của phương pháp (3.14) được phát biểu và chứng minh trong Định lý sau đây.

Định lý 3.2 *Giả sử E, $\mathcal{F}$, và F thỏa mãn lần lượt các điều kiện tương tự như trong Định lý 3.1. Giả sử các dãy tham số c_n, ε_n, t_n và γ_n được chọn sao cho*

(i) $0 < m < c_n < M,\ 0 \leq \gamma_n < \gamma_0;\ 1 \geq \varepsilon_n \searrow 0,\ t_n \to \infty;$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty,\ b_n = \eta c_n \varepsilon_n/(1 + \eta c_n \varepsilon_n);$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \gamma_n b_n^{-1}\|z_n - z_{n-1}\| = 0;$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n^2 t_{n+1}} = 0.$

Khi đó, dãy lặp $\{z_n\}$ được xác định bởi (3.14) hội tụ mạnh về điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (1.19) khi $n \to +\infty$.

Chứng minh. Ta viết lại (3.3) và (3.14) dưới dạng sau:

$$\nu_n A_n x_n + (1 - \xi_n) F x_n = 0$$
$$\nu_n A_n z_{n+1} + (1 - \xi_n) F z_{n+1} + \xi_n(z_{n+1} - z_n) = \xi_n \gamma_n(z_n - z_{n-1}),$$

trong đó

$$\nu_n = c_n\xi_n,\ \xi_n = 1/(1 + c_n\varepsilon_n).$$

Khi đó ta thu được đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
&\nu_n\langle A_n z_{n+1} - A_n x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \\
&+(1-\xi_n)\langle F z_{n+1} - F x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \\
&+\xi_n\langle z_{n+1} - z_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle = \xi_n\gamma_n\langle (z_n - z_{n-1}), j(z_{n+1} - x_n)\rangle,
\end{aligned}$$

hay,

$$\begin{aligned}
&\nu_n\langle A_n z_{n+1} - A_n x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \\
&+ (1-\xi_n)\langle F z_{n+1} - F x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \\
&+ \xi_n\langle z_{n+1} - x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \\
=&\xi_n\langle z_n - x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle + \xi_n\gamma_n\langle (z_n - z_{n-1}), j(z_{n+1} - x_n)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sử dụng tính chất j-đơn điệu mạnh của A_n, tính chất η-j-đơn điệu mạnh của ánh xạ F, và tính chất của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j, ta có:

$$\begin{aligned}
&\langle A_n z_{n+1} - A_n x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \geq 0, \\
&\langle F z_{n+1} - F x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle \geq \eta\|z_{n+1} - x_n\|^2, \\
&\langle z_{n+1} - x_n, j(z_{n+1} - x_n)\rangle = \|z_{n+1} - x_n\|^2.
\end{aligned}$$

Sử dụng ba đánh giá trên cho (3.15), ta thu được:

$$\begin{aligned}
&[\eta(1-\xi_n) + \xi_n]\|z_{n+1} - x_n\|^2 \\
\leq\ &\xi_n\|z_n - x_n\|\|z_{n+1} - x_n\| + \xi_n\gamma_n\|z_n - z_{n-1}\|\|z_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}$$

hay

$$\|z_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\xi_n}{\eta(1-\xi_n) + \xi_n}\|z_n - x_n\| + \frac{\xi_n\gamma_n}{\eta(1-\xi_n) + \xi_n}\|z_n - z_{n-1}\|.$$

Hơn nữa, do $\frac{\xi_n}{\eta(1-\xi_n)+\xi_n} = \frac{1}{1+\eta c_n\varepsilon_n} < 1$ và từ (3.5) dẫn đến

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|z_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq \frac{1}{1 + \eta c_n\varepsilon_n}\|z_n - x_n\| + \gamma_n\|z_n - z_{n-1}\| \\
&\quad + \left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + \frac{2|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n t_{n+1}}\right)\frac{M_1}{\eta} \\
&\leq (1-\zeta_n)\|z_n - x_n\| + \zeta_n\eta_n,
\end{aligned}$$

trong đó

$$\zeta_n = b_n;\ \zeta_n\eta_n = \gamma_n\|z_n - z_{n-1}\| + \left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + \frac{2|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n t_{n+1}}\right)\frac{M_1}{\eta}.$$

Do (iii), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n\|z_n - z_{n-1}\|/b_n = 0$.
Mặt khác, từ (i) và (iv) ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + \frac{2|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n t_{n+1}}\right)/b_n \\
=&\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + \frac{2|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n t_{n+1}}\right)\frac{1+\eta c_n\varepsilon_n}{\eta c_n \varepsilon_n} \\
\le&\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} + \frac{2|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n^2 t_{n+1}}\right)\frac{1+\eta M}{\eta m} \to 0.
\end{aligned}$$

Suy ra, $\limsup_{n\to\infty} \eta_n \le 0$. Ngoài ra, do (ii) ta có,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Vậy, theo Bổ đề 2.2 (với $\theta_n = 0$), ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \|z_n - x_n\| = 0. \tag{3.16}$$

Theo (ii) trong Định lý 3.1, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về điểm p_*, do vậy ta kết luận được dãy $\{z_n\}$ cũng hội tụ mạnh về p_* khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh.

□

Nhận xét 3.1

(a) Trong trường hợp $\{T(s) : s \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên một tập con lồi đóng khác rỗng C của E, chúng tôi xét phương trình hiệu chỉnh sau:

$$(I - T_n Q_C)x_n + \varepsilon_n F x_n = 0. \tag{3.17}$$

Với các điều kiện tương tự như trong Định lý 3.1, chúng tôi cũng thu được các kết quả tương tự như (i), (ii) và (iii) của Định lý 3.1.

Hệ quả 3.1 *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Banach lồi đều và trơn đều E và cho $\{T(t) : t \ge 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên*

C sao cho $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}\mathrm{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ η-j-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz với η và L là các số thực dương cố định. Khi đó ta có:

(i) *Với mỗi $t_n > 0$ và $\varepsilon_n > 0$, phương trình hiệu chỉnh* (3.17) *có nghiệm duy nhất x_n.*

(ii) *Nếu các tham số t_n và ε_n được chọn sao cho $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ thì dãy nghiệm hiệu chỉnh $\{t_n\}$ hội tụ mạnh về điểm $p_* \in \mathcal{F}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân* (1.19).

(iii) *Hơn nữa, với x_n và x_m lần lượt là các nghiệm hiệu chỉnh ứng với các tham số t_n, ε_n và t_m, ε_m, ta có đánh giá sau:*

$$\|x_n - x_m\| \leq \left(\frac{|\varepsilon_m - \varepsilon_n|}{\varepsilon_n} + 2\frac{|t_m - t_n|}{\varepsilon_n t_m}\right)\frac{M_1}{\eta}.$$

(b) Khi $E \equiv H$, chúng tôi nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov và phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(s) : s \geq 0\}$ trên một tập con C lồi đóng của không gian Hilbert H có $\mathcal{F} = \cap_{s\geq 0}\mathrm{Fix}(T(s)) \neq \emptyset$ mà không dùng đến tích phân Bochner. Bài toán được phát biểu dưới dạng như sau:

$$\textit{Tìm điểm } p \in \mathcal{F} \textit{ thỏa mãn: } \|x_* - p\| = \min_{y\in\mathcal{F}} \|x_* - y\|, \tag{3.18}$$

trong đó x_* là một điểm thuộc H nhưng không thuộc $\mathcal{F}$.

Điểm $p \in \mathcal{F}$ thỏa mãn (3.18) còn được gọi là điểm có x_*-chuẩn nhỏ nhất. Xuất phát từ ý tưởng hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của nửa nhóm không giãn dưới dạng (3.3), chúng tôi xây dựng phương pháp hiệu chỉnh để tìm nghiệm của bài toán (3.18) mà không dùng đến tích phân Bochner $T_n x = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds$ dưới dạng như sau: tìm phần tử $x_n \in H$ sao cho

$$A^C(t_n)x_n + \varepsilon_n(x_n - x_*) = 0, \quad A^C(t_n) = I - T(t_n)P_C, \tag{3.19}$$

ở đây I là ánh xạ đồng nhất trong H, P_C là ánh xạ chiếu mêtric từ H lên tập con C và $\{t_n\}, \{\varepsilon_n\}$ là hai dãy thực dương thỏa mãn một số điều kiện xác định.

Định lý 3.3 *Cho H là không gian Hilbert, C là tập con khác rỗng lồi đóng của H, và $\{T(t):\ t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} \operatorname{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Khi đó ta có:*

(i) Với mỗi ε_n, $t_n > 0$, phương trình (3.19) có nghiệm duy nhất x_n.

(ii) Nếu ε_n và t_n được chọn sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = 0,\ \limsup_{n\to\infty} t_n > 0,\ \lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, là nghiệm duy nhất của bài toán (3.18).

Ngoài ra, ta có đánh giá cho $\|x_n - x_m\|$ với x_n, x_m là các nghiệm hiệu chỉnh với các tham số hiệu chỉnh tương ứng ε_n và ε_m trong bổ đề sau đây. Bổ đề 3.1 được dùng để chứng minh sự hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề và phương pháp hiệu chỉnh lặp cho nửa nhóm không giãn mà ta sẽ xét trong Định lý 3.4 và Định lý 3.6 (xem (4) trong Danh mục các công trình công bố để biết thêm chi tiết).

Bổ đề 3.1 *Cho H, C, $\{T(t):\ t \geq 0\}$ và $\mathcal{F}$ được giả thiết như trong Định lý 3.3. Cho x_n và x_m là nghiệm hiệu chỉnh của phương trình (3.19) với các tham số hiệu chỉnh tương ứng ε_n và ε_m. Nếu $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ với mỗi $x \in C$, ở đây $\gamma(x)$ là một hàm bị chặn thì*

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_m|}{\varepsilon_n}\|y - x_*\| + \frac{|t_n - t_m|}{\varepsilon_n}\gamma_1$$

với mỗi ε_n, ε_m, t_n, $t_m > 0$, $y \in \mathcal{F}$, và hằng số dương γ_1.

Phương pháp thứ hai được thiết lập dựa trên việc kết hợp phương pháp điểm gần kề do Rockafellar (1976) [59] đề xuất với phương pháp hiệu chỉnh (3.19) và được gọi là phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề. Phương pháp này đã được Ryazansteva (2002) [60] nghiên cứu để giải phương trình toán tử với toán tử đơn điệu cực đại và m-j-đơn điệu. Ý tưởng để xây dựng thuật toán thứ hai ở đây là thiết lập dãy lặp $\{z_n\}$ cho bài toán (3.18) như sau. Từ một điểm bất kì $z_0 \in H$, dãy $\{z_n\}$ được xác định từ phương trình sau đây:

$$c_n[A^C(t_n)z_{n+1} + \varepsilon_n(z_{n+1} - x_*)] + z_{n+1} = z_n, \quad n \geq 0, \tag{3.20}$$

với $\{c_n\}$ là thực dương dãy bị chặn.

Định lý 3.4 *Cho H là không gian Hilbert, C là tập con khác rỗng lồi đóng của H, và $\{T(t):\ t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} \operatorname{Fix}(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử các tham số c_n, t_n và ε_n được chọn sao cho*

(i) $0 < m < c_n < M$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0,\ \limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0;$

(iii) $\varepsilon_n \leq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty,$ *với* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{\varepsilon_n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n^2} = 0;$

và $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ với mỗi $x \in C$, ở đây $\gamma(x)$ là hàm bị chặn. Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (3.20) hội tụ mạnh đến điểm $p \in \mathcal{F}$ thỏa mãn bài toán (3.18), khi $n \to +\infty$.

Chúng tôi đã thu được sự hội tụ mạnh của các phương pháp (3.19) và (3.20) về điểm p là nghiệm có x_* chuẩn nhỏ nhất trong $\mathcal{F}$.

Trong trường hợp $C \equiv H$ thì các phương pháp (3.19) và (3.20) sẽ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} &(I - T(t_n))x_n + \varepsilon_n(x_n - x_*) = 0,\\ &c_n[(I - T(t_n))z_{n+1} + \varepsilon_n(z_{n+1} - x_*)] + z_{n+1} = z_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

3.3. Phương pháp hiệu chỉnh lặp

Bằng cách kết hợp phương pháp hiệu chỉnh với phương pháp lặp hiện, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp để xấp xỉ nghiệm cho bất đẳng thức biến phân (1.19) bắt đầu từ một điểm bất kì $w_1 \in E$ dưới dạng như sau:

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n[A_n w_n + \varepsilon_n F w_n], \quad n \geq 1, \tag{3.21}$$

với $A_n = I - T_n$ và dãy $\{\beta_n\}$ thỏa mãn một vài điều kiện xác định.

Định lý 3.5 *Cho E là không gian Banach lồi đều và q-trơn đều với hằng số cố định $q : 1 < q \leq 2$. Cho $\mathcal{F}$ và F thỏa mãn các điều kiện như Định lý*

3.1. Giả sử

$$(i)\ 0<\beta_n<\beta_0,\ \varepsilon_n\searrow 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}|}{\varepsilon_n^2\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|t_n-t_{n+1}|}{\beta_n\varepsilon_n^2t_n}=0,$$

$$(ii)\ \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\beta_n=\infty,\quad \limsup_{n\to\infty}C_q\beta_n^{q-1}\frac{(2+\varepsilon_nL)^p}{\varepsilon_n\eta}<1,$$

với C_q là hằng số q-trơn đều của E. Khi đó, dãy lặp $\{w_n\}$ được xác định bởi (3.21), *hội tụ mạnh về điểm p_*, thỏa mãn bất đẳng thức biến phân* (1.19).

Chứng minh. Giả sử x_n là nghiệm của (3.3) với mỗi $\varepsilon_n>0$. Khi đó, ta có

$$\|w_{n+1}-x_{n+1}\|\le\|w_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x_{n+1}\|. \tag{3.22}$$

Theo Bổ đề 1.1 và (3.3), ta có

$$\|w_{n+1}-x_n\|^p=\|w_n-\beta_n[A_nw_n+\varepsilon_nFw_n]-x_n\|^q$$

$$\begin{aligned}&=\|w_n-x_n-\beta_n[(I-T_n)w_n-(I-T_n)x_n\\&\quad+\varepsilon_n(Fw_n-Fx_n)]\|^q\\&\le\|w_n-x_n\|^q-q\beta_n\langle(I-T_n)w_n-(I-T_n)x_n\\&\quad+\varepsilon_n[Fw_n-Fx_n],j_q(w_n-x_n)\rangle\\&\quad+C_q\beta_n^q\|(I-T_n)w_n-(I-T_n)x_n+\varepsilon_n[Fw_n-Fx_n]\|^q.\end{aligned}$$

Do tính j-đơn điệu của $I-T_n$ và tính η-j-đơn điệu mạnh của F, ta thu được

$$\begin{aligned}&\langle(I-T_n)w_n-(I-T_n)x_n,j_q(w_n-x_n)\rangle\\&=\|w_n-x_n\|^{q-2}\langle(I-T_n)w_n-(I-T_n)x_n,j(w_n-x_n)\rangle\ge 0\end{aligned}$$

và

$$\langle Fw_n-Fx_n,j_q(w_n-x_n)\rangle\ge\eta\|w_n-x_n\|^q.$$

Suy ra

$$\|w_{n+1}-x_n\|^q\le\|w_n-x_n\|^q[1-q\beta_n\varepsilon_n\eta+C_q\beta_n^q(2+\varepsilon_nL)^q].$$

Do đó, ta có

$$\|w_{n+1} - x_n\| \leq \|w_n - x_n\|[1 - q\beta_n\varepsilon_n\eta + C_q\beta_n^q(2 + \varepsilon_n L)^q]^{1/q}.$$

Do $C_q\beta_n^q(2 + \varepsilon_n L)^q \leq \beta_n\varepsilon_n\eta$ và $(1+t)^s \leq 1 - st$ với $0 < s < 1$, khi đó

$$\|w_{n+1} - x_n\| \leq \|w_n - x_n\|\left(1 - \frac{q-1}{q}\varepsilon_n\beta_n\eta\right). \tag{3.23}$$

Từ (3.22), (3.23) và (3.5), ta thu được

$$\begin{aligned}\|w_{n+1} - x_{n+1}\| \leq &\left(1 - \frac{q-1}{q}\varepsilon_n\beta_n\eta\right)\|w_n - x_n\| \\ &+ \frac{M_1}{\varepsilon_n\eta}\left[|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| + 2\frac{|t_{n+1} - t_n|}{t_n}\right]\end{aligned}$$

hay

$$\|w_{n+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - \zeta_n)\|w_n - x_n\| + \zeta_n\eta_n$$

với

$$\zeta_n = \frac{q-1}{q}\beta_n\varepsilon_n\eta,\ \zeta_n\eta_n = \frac{M_1}{\eta}\left[\frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{\varepsilon_n} + 2\frac{|t_n - t_{n+1}|}{\varepsilon_n t_n}\right]$$

thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 2.2 (với $\theta_n = 0$) do các điều kiện (i) và (ii). Áp dụng Bổ đề 2.2, ta thu được $\lim_{n\to\infty}\|w_n - x_n\| = 0$. Sử dụng kết quả của Định lý 3.1, ta có $\|x_n - p_*\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Điều này dẫn đến

$$0 \leq \|w_n - p_*\| \leq \|w_n - x_n\| + \|x_n - p_*\| \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Từ đó suy ra $w_n \to p_* \in \mathcal{F}$ thỏa mãn (1.19) khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh.

□

Nhận xét 3.2

(a) Các tác giả Buong và Phuong trong [24] năm 2012 và Thuy trong [75] năm 2015 cũng sử dụng phương pháp hiệu chỉnh lặp với cấu trúc tương tự như (3.21) để tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán (1.19), trong đó, Buong và Phuong [24] sử dụng V-ánh xạ V_n, và Thuy [75] sử dụng S-ánh xạ S_n thay cho ánh xạ T_k trong (3.21) khi tập $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Banach lồi đều và trơn. Phương pháp hiệu chỉnh lặp hiện chúng tôi xét trong Định lý 3.5 là một mở rộng cho các kết quả trên. Tuy nhiên kết quả của chúng tôi cần thêm tính trơn đều của không gian Banach E.

(b) Dựa trên ý tưởng kết hợp phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov với lược đồ lặp hiện để thiết lập phương pháp hiệu chỉnh lặp cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn phát biểu dưới dạng (3.18) trong không gian Hilbert, chúng tôi đã xây dựng và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ xác định bởi lược đồ lặp sau đây:

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n[A^C(t_n)w_n + \alpha_n(w_n - x_*)],\ n \geq 0,\ w_0 \in H, \tag{3.24}$$

ở đây $\{\beta_n\}$ là dãy thực dương thỏa mãn một số điều kiện xác định. Thuật toán (3.24) được Bakushinsky [12] nghiên cứu đầu tiên và gọi là phương pháp lặp hiệu chỉnh bậc không.

Định lý 3.6 *Cho H, C, $\{T(t), t \geq 0\}$, và $\mathcal{F}$ được giả sử như trong Định lý 3.3. Giả thiết các điều kiện sau thỏa mãn:*

(*i*) $\beta_n \leq \frac{\alpha_n}{4+4\alpha_n+4\alpha_n^2}$ *với mọi* n, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n-\alpha_{n+1}|}{\alpha_n^2\beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|t_n-t_{n+1}|}{\alpha_n^2\beta_n} = 0$, *và* $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n = +\infty$, $\quad \alpha_n \to 0$;

(*ii*) $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$;

(*iii*) $\|T(t)x - T(h)x\| \leq |t-h|\gamma(x)$ *với mỗi* $x \in C$, *trong đó* $\gamma(x)$ *là hàm bị chặn.*

Khi đó, dãy $\{w_n\}$ *xác định bởi* (3.24) *hội tụ mạnh về điểm* $p \in \mathcal{F}$ *thỏa mãn* (3.18), *khi* $n \to +\infty$.

Nếu $C \equiv H$, thì phương pháp (3.24) trở thành

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n[(I - T(t_n))w_n + \alpha_n(w_n - x_*)],\ n \geq 0,\ w_0 \in H.$$

Nhận xét 3.3

(a) Các dãy $\varepsilon_n = (1+n)^{-p}$, $0 < p < 1/2$, và $\beta_n = \gamma_0\varepsilon_n$ với

$$0 < \gamma_0 < \frac{1}{(C_p)^{1/(q-1)}(2+\varepsilon_0)^{q/(q-1)}}$$

khi $q = 2$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1, Định lý 3.3, Định lý 3.5 và Định lý 3.6. Khi $1 < q < 2$ thì $\varepsilon_n = (1+n)^{-p}$ với $p < (q-1)/2q$ và $\beta_n = \gamma_0\varepsilon_n^{1/(q-1)}$ cũng thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1 và 3.5.

(b) Các dãy $\{\varepsilon_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ được chọn bởi $\varepsilon_n = (1+n)^{-p},\ 0 < p < 1/2$ và

$$\gamma_n = (1+n)^{-\tau} \frac{\|z_n - z_{n-1}\|}{1 + \|z_n - z_{n-1}\|}$$

với $\tau > 1 + p$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.2 và Định lý 3.4.

3.4. Ví dụ số minh họa

Trong mục này, chúng tôi sử dụng các phương pháp hiệu chỉnh (3.3), (3.14) và (3.21) để giải bất đẳng thức biến phân (2.57) và các phương pháp hiệu chỉnh (3.19), (3.20) và (3.24) để tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn đã xét trong bài toán (2.56) ở Chương 2.

3.4.1. Minh họa số cho phương pháp (3.3)

Viết lại (3.3) dưới dạng phương trình ma trận $A^n x^n = b^n$ với

$$A^n = \begin{pmatrix} \vartheta_n & \sigma_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_n & \vartheta_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_n & \sigma_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n & \vartheta_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\varepsilon_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta'_n & \sigma'_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma'_n & \vartheta'_n \end{pmatrix}$$

$$x^n = \left(x_1^n,\ \ x_2^n,\ \ \dots,\ \ x_{10}^n\right)^T,\ b^n = \left(2\varepsilon_n, 2\varepsilon_n, \dots, 2\varepsilon_n\right)^T,$$

trong đó các phần tử $\vartheta_n, \vartheta'_n$ và σ_n, σ'_n ở trong ma trận A^n được xác định như sau: $\vartheta_n = 1 + 2\varepsilon_n - \frac{\sin(\alpha t_n)}{\alpha t_n}, \vartheta'_n = 1 + 2\varepsilon_n - \frac{\sin(\beta t_n)}{\beta t_n}$ và $\sigma_n = \frac{\cos(\alpha t_n) - 1}{\alpha t_n}, \sigma'_n = \frac{\cos(\beta t_n) - 1}{\beta t_n}$. Chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$ và các dãy tham số $t_n = (n+1)^4$ và $\varepsilon_n = (1+n)^{-3}$. Kết quả tính toán cho phương pháp được thể hiện trong bảng sau đây:

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	0.48898	0.436
2	0.1688	0.453
3	0.074254	0.468
10	0.0036751	0.483

n	$\text{err} = \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
20	0.00052888	0.484
50	3.6931×10^{-5}	0.486
100	4.7549×10^{-6}	0.501

Bảng 3.1 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.3)

3.4.2. Minh họa số cho phương pháp (3.14)

Phương pháp (3.14) được viết lại dưới dạng phương trình ma trận $A^n x^n = b^n$, với $n \geq 2$ và các ma trận A^n, x^n, và b^n được xác định bởi

$$A^n = \begin{pmatrix} \vartheta_n & \sigma_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_n & \vartheta_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_n & \sigma_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n & \vartheta_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_n\varepsilon_n + 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2c_n\varepsilon_n + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vartheta'_n & \sigma'_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma'_n & \vartheta'_n \end{pmatrix},$$

$$x^n = \left(x_1^n, \quad x_2^n, \quad \dots, \quad x_{10}^n\right)^T,$$

$$b^n = \Big(2c_n\varepsilon_n + x_1^{n-1} + \gamma_n(x_1^{n-1} - x_1^{n-2}), 2c_n\varepsilon_n + x_2^{n-1} + \gamma_n(x_2^{n-1} - x_2^{n-2}),$$
$$\dots, 2c_n\varepsilon_n + x_{10}^{n-1} + \gamma_n(x_{10}^{n-1} - x_{10}^{n-2})\Big)^T,$$

trong đó các phần tử $\vartheta_n, \vartheta'_n$ và σ_n, σ'_n ở trong ma trận A^n được xác định như sau: $\vartheta_n = c_n + 2c_n\varepsilon_n + 1 - \frac{c_n \sin(\alpha t_n)}{\alpha t_n}, \vartheta'_n = c_n + 2c_n\varepsilon_n + 1 - \frac{c_n \sin(\beta t_n)}{\beta t_n}$ và $\sigma_n = -\frac{c_n[\cos(\alpha t_n) - 1]}{\alpha t_n}, \sigma'_n = -\frac{c_n[\cos(\beta t_n) - 1]}{\beta t_n}$.

Chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$, các xấp xỉ ban đầu $x_0 = (1.2, 1.2, \dots, 1.2) \in \mathbb{R}^{100}, x_1 = (2.5, 2.5, \dots, 2.5) \in \mathbb{R}^{100}$ và các dãy tham số $t_n = (n+1)^4, \ \varepsilon_n = (1 + 20n)^{-1/2}, \gamma_n = (1 + 2n)^{-2}$ và $c_n = \cos((1+n)^{-2})$. Kết quả tính toán thực nghiệm được trình bày trong bảng dưới đây:

n	$\text{err} = \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	3.5214	0.499
2	15.78	0.484

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
3	2.2426	0.483
10	7.6171	0.5
20	4.4511	0.503
50	1.4844	0.505
100	0.4291	0.53
200	0.1015	0.546
500	0.048154	0.93

Bảng 3.2 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.14)

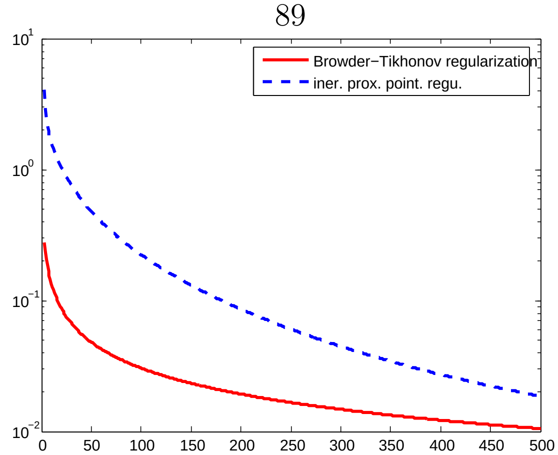
3.4.3. Minh họa số cho phương pháp (3.21)

Chọn $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$, xấp xỉ ban đầu $z_0 = (5, 5, \ldots, 5) \in \mathbb{R}^{100}$ và các dãy tham số được chọn như sau $t_n = (n+1)^4$, $\varepsilon_n = (1 + 70n)^{-1/2}$ và $\beta_n = \cos((1 + n)^{-2})$. Kết quả tính toán cho phương pháp được thể hiện trong bảng sau đây:

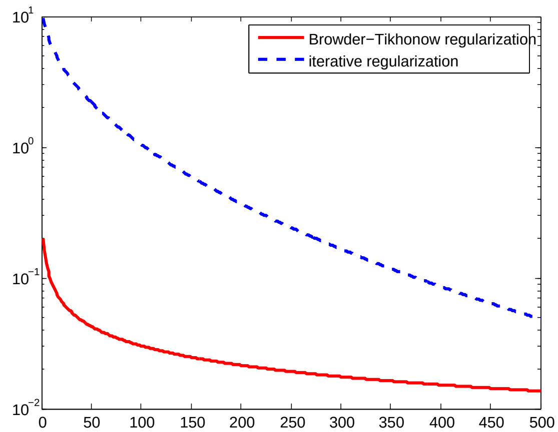
n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	40.669	0.406
2	29.991	0.407
3	24.875	0.422
10	11.677	0.426
20	6.0443	0.430
50	1.6829	0.48
100	0.40816	0.50
200	0.06807	0.54
500	0.025955	0.55

Bảng 3.3 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.21)

Nhận xét 3.4 Các kết quả số nhận được trong các Bảng 3.1, Bảng 3.2 và Bảng 3.3 cho thấy các phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov (3.3) (Bảng 3.1), phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh (3.14) (Bảng 3.2) và phương pháp hiệu chỉnh lặp (3.21) (Bảng 3.3) hội tụ khá tốt về nghiệm của bài toán (2.56), trong đó, phương pháp hiệu chỉnh Browder–



Hình 3.1: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (3.3) và (3.14)



Hình 3.2: So sánh sai số tuyệt đối của phương pháp (3.3) và (3.21)

Tikhonov có tốc độ hội tụ nhanh hơn hai phương pháp hiệu chỉnh còn lại.

Tiếp theo chúng tôi trình bày ví dụ số minh họa cho phương pháp hiệu chỉnh tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn không dùng đến tích phân Bochner dưới dạng (3.19), (3.20) và (3.24). Chọn điểm $x_* = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$, khi đó điểm bất động cần tìm của nửa nhóm không giãn trong bài toán (2.56) cũng chính là điểm $p_* = (0, 0, 0, 0, 1, \dots, 1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^{100}$.

3.4.4. Minh họa số cho phương pháp hiệu chỉnh (3.19)

Tương tự, ta cũng biểu diễn phương pháp hiệu chỉnh (3.19) dưới dạng phương trình ma trận tuyến tính và giải phương trình đó với các tham số được chọn như sau: $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7, t_n = (n+1)^{-1/2000}$ và $\varepsilon_n = (1+n)^{-3}$, ta được bảng dưới đây:

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	0.52113	0.425
2	0.16463	0.426
3	0.070334	0.441
10	0.0034102	0.427
20	0.00049043	0.428
50	3.4256×10^{-5}	0.438
100	4.4119×10^{-6}	0.441

Bảng 3.4 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.19)

3.4.5. Minh họa số cho phương pháp (3.20)

Chọn các tham số như sau: $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$, $t_n = 3.175(1+n)^{-1/35000}$, $\varepsilon_n = (1+5n)^{-1/3}$ và $c_n = \cos((1+n)^{-1/5})$ và xấp xỉ ban đầu $x_0 = (5, 5, \ldots, 5) \in \mathbb{R}^{100}$. Khi đó, kết quả tính toán được thể hiện trong bảng dưới đây:

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	40.669	0.436
2	30.115	0.436
3	30.644	0.452
10	12.408	0.452
20	5.0795	0.453
50	0.61028	0.453
100	0.19304	0.468
200	0.15327	0.484
500	0.11432	0.53
1000	0.091396	0.609
5000	0.054088	1.311
10000	0.04308	2.231

Bảng 3.5 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.20)

3.4.6. Minh họa số cho phương pháp hiệu chỉnh lặp (3.24)

Chọn các tham số $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/7$, $t_n = 3.175(1+n)^{-1/35000}$, $\varepsilon_n = (1+5n)^{-1/3}$ và $\beta_n = (1+2n)^{-1/14}$, ta thu được kết quả tính toán như trong bảng sau:

n	err $= \|x^n - p_*\|$	Thời gian (*giây*)
1	40.669	0.39
2	22.98	0.39
3	17.002	0.421
10	5.6463	0.426
20	0.64552	0.429
50	0.23867	0.433
100	0.19252	0.441
200	0.15488	0.447
500	0.11577	0.468
1000	0.092704	0.749
5000	0.055051	11.076
10000	0.043911	42.042

Bảng 3.6 Kết quả tính toán cho phương pháp (3.24)

Nhận xét 3.5 Qua các kết quả tính toán số trong các Bảng 3.4, 3.5 và Bảng 3.6, ta thấy phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder–Tikhonov (3.19) cho bài toán tìm điểm bất động (3.18) có tốc độ hội tụ tốt hơn phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề (3.20) và phương pháp hiệu chỉnh lặp (3.24).

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số phương pháp hiệu chỉnh dựa trên tư tưởng của phương pháp hiệu chỉnh Browder−Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bài toán $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$. Đồng thời, kết hợp phương pháp hiệu chỉnh Browder−Tikhonov đã xét với phương pháp lặp hiện, chúng tôi đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(F, \mathcal{F})$ trong không gian Banach q-trơn đều. Kết quả thu được của chúng tôi là sự hội tụ mạnh của các phương pháp với một số điều kiện đặt lên các tham số của dãy lặp. Khi $E \equiv H$, không gian Hilbert, không dùng tích phân Bochner, chúng tôi cũng thu được ba phương pháp hiệu chỉnh cho bài toán điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn. Kết quả số ở cuối chương được đưa ra nhằm minh họa cho các phương pháp đã thiết lập.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ ĐỀ NGHỊ

Luận án đã đạt được các kết quả sau:

(1) Nghiên cứu xây dựng các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện tương ứng dựa trên phương pháp lai ghép dạng đường dốc cho bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Banach E mà không cần dùng đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j của E. Kết quả này làm mở rộng lớp các không gian Banach áp dụng cho thuật toán.

(2) Đưa ra phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder−Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh điểm gần kề quán tính cho bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach lồi đều và trơn đồng thời xây dựng phương pháp hiệu chỉnh lặp dạng hiện cho bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach q-trơn đều.

(3) Thiết lập phương pháp hiệu chỉnh để tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert không cần dùng đến tích phân Bochner.

(4) Đưa ra các ví dụ số minh họa cho các phương pháp đã đề xuất.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

(1) Nghiên cứu nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên hàm F, chẳng hạn, các điều kiện đơn điệu hoặc giả đơn điệu.

(2) Nghiên cứu các tiêu chuẩn dừng của các phương pháp lặp đã đề xuất từ đó có cơ sở để so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp đã đề xuất so với các kết quả của một số tác giả khác.

(3) Nghiên cứu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách (bất đẳng thức biến phân nhiều bậc).

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

(1) Phạm Thanh Hiếu (2014), "Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, Tập 126, số 12, tr. 87–92.

(2) Nguyen Buong, Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013), "An explicit iteration method for a class of variational inequalites in Banach spaces", *Kỷ yếu Hội thảo khoa học quốc gia lần thứ XV về một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và Truyền thông*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

(3) Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013), "Implicit iteration methods for variational inequalites in Banach spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, (2) 36(4), pp. 917–926 (SCIE).

(4) Pham Thanh Hieu, Nguyen Thi Thu Thuy (2015), "Regularization methods for nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", *Vietnam J. Math.*, DOI 10.1007/s10013-015-0178-3 (SCOPUS).

(5) Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu, Jean Jacques Strodiot (2016), "Regularization methods for accretive variational inequalities over the set of common fixed points of nonexpansive semigroups", *Optimization*, DOI 10.1080/02331934.2016.1166501 (SCIE).

Tài liệu tham khảo

[1] Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R. (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer.

[2] Alber Y. (1983), "On the solution of variational inequalities with monotone operators by the regularization method", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 23(3), pp. 479-483.

[3] Alber Y. (1996), "Metric and generalized projection operators in Banach spaces: Properties and applications" in: Kartsatos A. G. (Ed), Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 178, pp. 15–50.

[4] Alber Y., Ryazantseva I. P. (2006), *Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type,* Springer-Verlag, Berlin.

[5] Alvarez F. (2000), "On the minimizing property of a second order dissipative system in Hilbert space", *SIAM J. Control Optim.*, 38(4), pp. 1102–1119.

[6] Alvarez F., Attouch H. (2001), "An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping", *Set-Valued Var. Anal.*, 9(1-2), pp. 3–11.

[7] Anh P. N., Muu L. D., Nguyen V. H., Strodiot J. J. (2005), "Using the Banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 124(2), pp. 285–306.

[8] Anh P. N., Muu L. D., Kim J. K. (2012), "An extragradient algorithm for solving bilevel pseudomonotone variational inequalities", *J. Global Optim.*, 52(3), pp. 627–639.

[9] Anh P. N., Thuy L. Q., Thanh D. D. (2015), "A fixed point scheme for nonexpansive mappings, variational inequalities and equilibrium problems", *Vietnam J. Math.*, 43(1), pp. 71-91.

[10] Aoyama K., Iiduka H., Takahashi W. (2006), "Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2006, Art. no. 35390.

[11] Baiocchi C., Capelo A. (1984), *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems*, J. Wiley, New York.

[12] Bakushinsky A., Goncharsky A. (1994), *Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 258p.

[13] Bao T. Q., Khanh P. Q. (2005), "A projection-type algorithm for pseudomonotone nonlipschitzian multivalued variational inequalities", *Nonconvex Optimization and Applications, Springer, New York*, 77, pp. 113-129.

[14] Bao T. Q., Khanh P. Q. (2006), "Some algorithms for solving mixed variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, 31(1), pp. 77–98.

[15] Brezis H., Browder F. E. (1998), "Partial differential equations in the 20th century", *Advances in Mathematics*, 135, pp. 76–144.

[16] Browder F. (1966), "Existence and approximation of solution of nonlinear variational inequalities", *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 56(4), pp. 1080–1086.

[17] Browder F. (1967), "Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(6), pp. 875–882.

[18] Buong N. (1991), "The regularization of variational inequalities and a general approximation scheme for regularized solutions in Banach spaces", *Ukrainian Mathematical Journal*, 43(9), pp. 1186-1189.

[19] Buong N. (2008), "Regularization proximal point algorithm for unconstrained vector convex optimization problems", *Ukrainian Mathematical Journal*, 60 (9), pp. 1483–1491.

[20] Buong N., Anh N. T. Q. (2011), "An implicit iteration method for variational inequalities over the set of common fixed points for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, Volume 2011, Article ID 276859, 10 pages, doi:10.1155/2011/276859.

[21] Buong N., Duong L. T. T. (2011), "An explicit iterative algorithm for a class of variational inequalities in Hilbert spaces", *J. Optim. Theory Appl.*, 151, pp. 513–524.

[22] Buong N., Lang N. D. (2011), "Shrinking hybrid descent-like methods for nonexpansive mappings and semigroups", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, Vol. 16, No. 3, pp. 331-339.

[23] Buong N., Duong N. D. (2011), "A method for a solution of equilibrium problem and fixed point problem of a nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, Volume 2011, Article ID 208434, 16 pages doi:10.1155/2011/208434.

[24] Buong N., Phuong N. T. H. (2012), "Regularization methods for a class of variational inequalities in Banach spaces", *Comput. Math. Math. Phys.*, 52(11), pp. 1487–1496.

[25] Buong N., Phuong N. T. H. (2013), "Strong convergence to solution for a class of variational inequalities in Banach spaces by implicit iteration methods", *J. Optim. Theory Appl.*, 159, pp. 399–411.

[26] Buong N., Ha N. S., Thuy N. T. T. (2015), "A new explicit iteration

method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, Published online: 21 September 2015, pp. 1–15.

[27] Ceng L.-C., Ansari Q. H., Yao J.-C. (2008), "Mann-type steepest-descent and modified hybrid steepest descent methods for variational inequalities in Banach spaces", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 29(9-10), pp. 987–1033.

[28] Chen G. Y. (1992), "Existence of solutions for a vector variational inequality: An extension of the Hartmann-Stampacchia theorem", *J. Optim. Theory Appl.*, 74(3), pp. 445–456.

[29] Chen R., Song Y. (2000), "Convergence to common fixed point of nonexpansive semigroup", *J. Comput. Appl. Math.*, 200, pp. 566–575.

[30] Chen R., He H. (2007), "Viscosity approximation of common fixed points of nonexpansive semigroup in Banach spaces", *Appl. Math. Lett.*, 20, pp. 751–757.

[31] Cioranescu I. (1990), *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[32] Cohen G. (1980), "Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, 32, pp. 227–305.

[33] Combettes P. L. (2003), "A block-iterative surrogate constraint splitting method for quadratic signal recovery", *IEEE Trans. Signal Process*, 51, pp. 1771-1782.

[34] Dafermos S. (1980), "Traffic equilibrium and variational inequalities", *Transportation Science*, 14, pp. 42–54.

[35] Deutsch F., Yamada I. (1998), "Minimizing certain convex functions over the intersection of the fixed point sets of nonexpansive mappings", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 19, pp. 33–56.

[36] Giannessi F. (Ed.) (2000), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria: Mathematical Theories*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[37] Gossez J. P., Dozo E. L. (1972), "Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings", *Pacific J. Math.*, 40, pp.565–573.

[38] Halpern B. (1967), "Fixed points of nonexpanding maps", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, pp. 957–961.

[39] Herman G. T. (2009), *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*, Springer, New York, 2.

[40] Iiduka H., Takahashi W. (2008), "Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space", *J. Math. Anal. Appl.*, 339, pp. 668-679.

[41] Iiduka H. (2010), "New iterative algorithm for the variational inequality problem over the fixed point set of a firmly nonexpansive mapping", *Optimization*, 59, pp. 873–885.

[42] Iiduka H. (2012), "Fixed point optimization algorithm and its application to power control in CDMA data networks", *Math. Program.*, 133, pp. 227-242.

[43] Iiduka H. (2012), "Fixed point optimization algorithm and its application to network bandwidth allocation", *J. Comput. Appl. Math.*, 236, pp. 1733-1742.

[44] Iiduka H. (2013), "Fixed point optimization algorithms for distributed optimization in network systems", *SIAM J. Optim.*, 23, pp. 1-26.

[45] Kato T. (1967), "Nonlinear semigroups and evolution equations", *J. Math. Soc. Japan*, 19(4), pp. 508–520.

[46] Khanh P. D. (2015), "A modified extragradient method for infinite-dimensional variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, Published online: July 2015, DOI: 10.1007/s40306-015-0150-z.

[47] Kinderlehrer D., Stampacchia G. (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York.

[48] Konnov I. V. (2007), *Equilibrium Models and Variational Inequalities*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 210, Elsevier.

[49] Lee G. M.,Tam N. N., Yen N. D. (2005), *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities: A Qualitative Study, Nonconvex Optimization and Its Applications*, Springer, Volume 78.

[50] Lions J. L. (1977), "Approximation de points fixes de contractions", *C.R. Acad. Sci. Sèr. A-B Paris*, 284, pp. 1357–1359.

[51] Lions J. L., Stampacchia G. (1967), "Variational inequalities", *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, pp. 493–519.

[52] Mann W. R. (1953), "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, pp. 506–510.

[53] Martinet B. (1970), "Régularisation d'inéquations variationnelles par approximation successives", *Rev. Française Informat. Recherche opérationnelle*, 4, pp. 154–158.

[54] Nagurney A. (1993), *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[55] Neerven J. M. A. M. van (2002), "Approximating Bochner integrals by Riemann sums", *Indagationes Mathematicae*, 13(2), pp. 197–208.

[56] Pappalardo M., Passacantando M. (2002), "Stability for equilibrium problems from variational inequalities to dynamical systems", *J. Optim. Theory Appl.*, 113, pp. 567–582.

[57] Petryshyn W. V. (1970), "A characterization on strict convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings", *J. Funct. Anal.*, 6, pp. 282–291.

[58] Reich S. (1973), "Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 44(1), pp. 57–70.

[59] Rockafellar R. T. (1976), "Monotone operators and proximal point algorithm", *SIAM J. Control Optim.*, 14, pp. 887–897.

[60] Ryazantseva I. P. (2002), "Regularization proximal algorithm for nonlinear equations of monotone type", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki*, 42(9), pp. 1295–1303.

[61] Sach P. H., Kim D. S., Tuan L. A., Lee G. M. (2008), "Duality results for generalized vector variational inequalities with set-valued maps", *J. Optim. Theory Appl.*, 136, pp. 105–123.

[62] Slavakis K., Yamada I. (2007), "Robust wideband beamforming by the hybrid steepest descent method", *IEEE Trans. Signal Process*, 55, pp. 4511-4522.

[63] Stark H., Yang Y. (1998), *Vector Space Projections: A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*, Wiley-Interscience, New York.

[64] Tuan L. A., Sach P. H. (2004), "Existence of solutions of generalized quasivariational inequalities with set-valued maps", *Acta Math. Vietnam.*, 29, pp. 309–316.

[65] Schoepfer F. (2007), "Iterative regularization methods for the solution of the split feasibility problem in Banach spaces", *PhD Dissertation*, Saarbrucken.

[66] Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K. S. (2012), *Regularization Methods in Banach Spaces*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics 10, De Gruyter, Berlin, Germany.

[67] Shioji N., Takahashi W. (1998), "Strong convergence theorems for assymptotically nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Nonlinear Anal.*, 34, pp. 87–99.

[68] Stampacchia G. (1964), "Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, pp. 4413–4416.

[69] Suzuki T. (2003), "On strong convergence to common fixed points of nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, pp. 2133–2136.

[70] Suzuki T. (2005), "Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2005(1), pp. 103–123.

[71] Takahashi W., Ueda Y. (1984), "On Reich's strong convergence theorem for resolvents of accretive operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 104, pp. 546–553.

[72] Takahashi W. (1997), "Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications", *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, 51(2). pp. 277–292.

[73] Tam N. N., Yao J.-C. , Yen N. D. (2008), "Solution methods for pseudomonotone variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 138, pp. 253–273.

[74] Thong D. V. (2011), "An implicit iteration process for nonexpansive semigroups", *Nonlinear Anal.*, 74, pp. 6116–6120.

[75] Thuy N. T. T. (2015), "Regularization methods and iterative methods for variational inequality with accretive operator", *Acta Math. Vietnam.*, Published online: 14 March 2015, DOI 10.1007/s40306-015-0123-2.

[76] Tikhonov A. N. (1963), "On the solution of ill-posed problems and the method of regularization", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 151, pp. 501–504 (Russian).

[77] Tuyen T. M. (2012), "Regularization for the problem of finding a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings in Banach spaces", *J. Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 17 (2), pp. 89-98.

[78] Tuyen T. M. (2012), "Regularization proximal point algorithm for common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces", *J. Optim. Theory Appl.*, 152, pp. 351-365.

[79] Wang S. (2011), "Convergence and weaker control conditions for hybrid iterative algorithms", *Fixed Point Theory Appl.*, 2011, article 3.

[80] Xu H.-K. (1991), "Inequalities in Banach spaces with applications", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 16(12), pp. 1127–1138.

[81] Xu H.-K. (2002), "Iterative algorithms for nonlinear operators", *J. London Math. Soc. (2)*, 66(1), pp. 240–256.

[82] Xu H.-K., Kim T. H. (2003), "Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalites", *J. Optim. Theory Appl.*, 119, pp. 185–201.

[83] Xu H.-K. (2005), "A strong convergence theorem for contraction semi-groups in Banach spaces", *Bull. Aust. Math. Soc.*, 72, pp. 371–379.

[84] Yamada I. (2001), "The hybrid steepest-descent method for variational inequalities problems over the intersection of the fixed point sets of nonexpansive mappings", *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, Chapter 8, pp. 473–504.

[85] Yang P., Yao Y., Liou Y.-C., Chen R. (2012), "Hybrid algorithm of nonexpansive semigroups for variational inequalities", *J. Appl. Math.*, 2012, article ID 634297.

[86] Yao Y., Noor M. A., Liou Y.-C.(2010), "A new hybbrid iterative algorithm for variational inequalities", *Appl. Math. Comput.*, 216, pp. 822–829.

[87] Zeidler E. (1985), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, III - Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag.

[88] Zeidler E. (1990), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B - Nonlinear Monotone Operator*, Springer–Verlag.