

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

VŨ NGỌC KIÊN

**NGHIÊN CỨU THUẬT TOÁN GIẢM BẠC MÔ HÌNH
VÀ ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

-----***-----

VŨ NGỌC KIÊN

**NGHIÊN CỨU THUẬT TOÁN GIẢM BẠC MÔ HÌNH
VÀ ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN**

Chuyên ngành: Kỹ thuật điều khiển và tự động hóa

Mã số: 62 52 02 16

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

- 1. PGS.TS. NGUYỄN HỮU CÔNG**
- 2. PGS. TS. BÙI TRUNG THÀNH**

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan: luận án “*Nghiên cứu thuật toán giảm bậc mô hình và ứng dụng cho bài toán điều khiển*” là công trình nghiên cứu của riêng tôi được hoàn thành dưới sự chỉ bảo tận tình của hai thầy giáo hướng dẫn.

Các kết quả nghiên cứu trong luận án là trung thực, một phần được công bố trên các tạp chí khoa học chuyên ngành với sự đồng ý của các đồng tác giả, phần còn lại chưa được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái nguyên, ngày tháng năm 2015

Tác giả luận án

Vũ Ngọc Kiên

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến **PGS.TS. Nguyễn Hữu Công** - Đại học Thái Nguyên và **PGS.TS. Bùi Trung Thành** – Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật Hưng Yên đã tận tình hướng dẫn, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp tôi thực hiện và hoàn thành luận án này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo, đồng nghiệp trong bộ môn Thiết bị điện - Khoa Điện - Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong thời gian thực hiện luận án, tham gia sinh hoạt khoa học.

Xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô, anh chị, bạn bè và đồng nghiệp Khoa Điện, Khoa Điện tử, Phòng đào tạo, các đơn vị chức năng Trường Đại học Kỹ thuật công nghiệp, các ban chức năng Đại học Thái Nguyên đã chia sẻ, đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên tôi vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành tốt công việc nghiên cứu của mình.

Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới **TS. Hà Bình Minh** – Trường Đại học Bách Khoa Hà nội đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong thời gian thực hiện luận án.

Cuối cùng, tôi biết ơn bố mẹ và những người thân trong gia đình đã luôn quan tâm, động viên và tạo điều kiện thuận lợi nhất để tôi có thể hoàn thành bản luận án. Xin dành những lời yêu thương nhất cho vợ và hai con trai yêu quý đã cùng tôi vượt qua những khó khăn, vất vả trong cuộc sống và trong quá trình nghiên cứu để tôi hoàn thành bản luận án.

Một lần nữa xin chân thành cảm ơn !

Thái nguyên, ngày tháng năm 2015

Tác giả luận án

Vũ Ngọc Kiên

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
MỤC LỤC	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT	vii
DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU	ix
DANH MỤC CÁC HÌNH ẢNH VÀ ĐỒ THỊ	x
MỞ ĐẦU	1
1. Giới thiệu	1
2. Tính khoa học và cấp thiết của luận án	1
3. Mục tiêu của luận án	4
3.1. Mục tiêu chung	4
3.2. Mục tiêu cụ thể	4
4. Đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu	5
5. Ý nghĩa lí luận và thực tiễn	5
5.1. Ý nghĩa lí luận	5
5.2. Ý nghĩa thực tiễn	6
6. Bố cục luận án	6
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ GIẢM BẠC MÔ HÌNH	9
1.1. Bài toán giảm bậc mô hình	9
1.2. Các nghiên cứu giảm bậc trên thế giới	9
1.2.1. Nhóm phương pháp dựa trên phân tích nhiễu loạn suy biến (SPA) ...	10
1.2.2. Nhóm phương pháp dựa trên phân tích phương thức	11

1.2.3. Nhóm phương pháp dựa trên SVD	12
1.2.4. Nhóm phương pháp phù hợp thời điểm (MM) hay phương pháp không gian con Krylov (Krylov Methods).....	13
1.2.5. Nhóm phương pháp kết hợp phân tích giá trị suy biến (SVD) và phù hợp thời điểm (MM)	14
1.2.6. Nhóm các phương pháp khác.....	15
1.3. Các nghiên cứu trong nước về giảm bậc	15
1.4. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu về giảm bậc mô hình.....	16
1.5. Kết luận chương 1	19
CHƯƠNG 2. XÂY DỰNG THUẬT TOÁN GIẢM BẬC MÔ HÌNH.....	21
2.1. Giới thiệu.....	21
2.2. Các công cụ toán học sử dụng trong các thuật toán giảm bậc mô hình....	22
2.2.1. Phép phân tích ma trận.....	22
2.2.1.1. Phép phân tích giá trị suy biến (SVD).....	22
2.2.1.2. Phép phân tích Schur	22
2.2.1.3. Phép phân tích Cholesky	23
2.2.2. Gramian điều khiển và quan sát của hệ tuyến tính	23
2.3. Thuật toán giảm bậc mô hình mới cho hệ ổn định	25
2.3.1. Tính trội H_∞	25
2.3.2. Quá trình tam giác hóa.....	28
2.3.2.1. Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác	28
2.3.2.2. Phân tích dạng tam giác.....	30
2.3.2.3. Phân tích chuẩn H_∞ và H_2 trong quá trình tam giác hóa.....	33

2.3.3. Giảm bậc mô hình dựa trên cắt ngắn tam giác	35
2.3.3.1. Phân tích chặn trên của sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ và H_2	35
2.3.3.2. Sắp xếp điểm cực theo các chỉ số trội.....	37
2.3.3.3 Rút gọn hệ tương đương.....	39
2.4. Ví dụ giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao	39
2.4.1. Ví dụ minh họa 1	39
2.4.2. Ví dụ minh họa 2	43
2.5. Thuật toán giảm bậc mới cho hệ không ổn định	48
2.5.1. Thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp gián tiếp (Cách tiếp cận thứ nhất)	49
2.5.2. Thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp trực tiếp (Cách tiếp cận thứ hai)	50
2.6. Ví dụ giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định bậc cao	55
2.6.1 Giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định theo thuật toán giảm bậc gián tiếp	55
2.6.2. Giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định theo thuật toán giảm bậc trực tiếp	60
2.7. Kết luận chương 2	63
CHƯƠNG 3. VỀ MỘT ỨNG DỤNG BÀI TOÁN GIẢM BẬC MÔ HÌNH TRONG ĐIỀU KHIỂN.....	65
3.1. Giới thiệu.....	65
3.2 Ứng dụng giảm bậc trong bài toán điều khiển ổn định góc tải máy phát đồng bộ.....	67
3.2.1. Giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc gián tiếp	68

3.2.2. Giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc trực tiếp.....	70
3.3. Ứng dụng giảm bậc mô hình trong bài toán điều khiển cân bằng xe hai bánh .	73
3.3.1. Bài toán điều khiển cân bằng xe hai bánh.....	73
3.3.2. Giảm bậc bộ điều khiển bền vững theo thuật toán giảm bậc gián tiếp	75
3.3.3. Giảm bậc bộ điều khiển bền vững theo thuật toán giảm bậc trực tiếp	78
3.3.4. Áp dụng bộ điều khiển giảm bậc điều khiển cân bằng xe hai bánh ...	79
3.3.4.1. Theo thuật toán giảm bậc gián tiếp.....	79
3.3.4.2. Theo thuật toán giảm bậc trực tiếp	86
3.4. Kết luận chương 3	95
CHƯƠNG 4. THỰC NGHIỆM.....	98
4.1. Hệ thống thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng	98
4.2. Kết quả thực nghiệm	107
4.3. Kết luận chương 4	113
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	114
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ.....	116
TÀI LIỆU THAM KHẢO	118
PHỤ LỤC	128

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

Các ký hiệu:

$\mathbf{A}^T$	Chuyển vị của ma trận $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^*$	Chuyển vị liên hợp của ma trận $\mathbf{A}$ (lấy chuyển vị của ma trận $\mathbf{A}$ rồi lấy liên hợp của các phần tử)
$\mathbb{C}$	Tập số phức
$\mathbb{C}_\beta$	Tập hợp các hệ tuyến tính liên tục ổn định - β
$\mathbb{R}$	Tập số thực
α	Điểm cực có phần thực dương lớn nhất của hệ tuyến tính không ổn định
β	Giá trị chuyển đổi giữa hệ tuyến tính liên tục ổn định - β và hệ tuyến tính ổn định

Các chữ viết tắt:

ADI	Alternating Direction Implicit: Xen kẽ hướng ngầm
BT	Balanced Truncation : Chặt cân bằng
CARE	Control Algebraic Riccati Equation: Phương trình Riccati điều khiển
COM	Computer Output on Micro : Cổng giao tiếp nối tiếp trên máy tính
EEPROM	Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory: Bộ nhớ ROM lập trình/ghi/ nạp lại/xóa được
FARE	Filter Algebraic Riccati Equation: Phương trình Riccati lọc
GA	Genetic Algorithm (Giải thuật di truyền)
I/O	Input/Output: Cổng nhập/xuất
KMs	Krylov Methods: Phương pháp không gian con Krylov
LCD	Liquid Crystal Display : Màn hình tinh thể lỏng

LQG	Linear Quadratic Gaussian: Tuyến tính bậc hai Gaussian
MA	Modal Analysis: Phân tích phương thức
MEMS	Microelectromechanical Systems : Hệ thống vi cơ điện tử
MM	Moment Matching: Phù hợp thời điểm
OLED	Organic Light-emitting Diode : diode hữu cơ phát quang
PC	Personal Computer): Máy tính cá nhân.
POD	Proper Orthogonal Decomposition: Phân tích trực giao thích hợp
PSO	Particle Swarm Optimization: Thuật toán tối ưu hóa bầy đàn
PWM	Pulse Width Modulation – Điều chế độ rộng xung
SISO	Single Input Single Output: Một vào một ra
SPA	Singular Perturbations Analysis : Phân tích nhiễu loạn suy biến
SPI	Serial Peripheral Interface: Giao diện ngoại vi nối tiếp
SRAM	Static Random Access Memory: Bộ nhớ tĩnh truy cập ngẫu nhiên
SVD	Singular Value Decomposition: Phân tích giá trị suy biến
TWI (I2C)	Two-Wire Serial Intereafce (Inter-Integrated Circuit): giao tiếp đồng bộ hai dây nối tiếp
RAM	Random Access Memory: Bộ nhớ truy cập ngẫu nhiên
ROM	Read Only Memory: Bộ nhớ chỉ đọc, không thể ghi – xóa
RS-232	Recommended Standard 232: Chuẩn giao tiếp 232
UART	Universal Asynchronous Receiver Transmitter: Bộ truyền nhận nối tiếp không đồng bộ
USB	Universal Serial Bus: Chuẩn truyền dữ liệu cho BUS (Thiết bị) ngoại vi

DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU

Bảng 2.1. Kết quả giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao	42
Bảng 2.2. Kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞	43
Bảng 2.3. Kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_2	45
Bảng 2.4. Kết quả giảm bậc phân hệ ổn định $S_{od}(s)$	57
Bảng 2.5. Kết quả giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định $S(s)$	57
Bảng 2.6: Kết quả giảm bậc hệ ổn định $S_\beta(s)$	61
Bảng 2.7: Kết quả giảm bậc hệ không ổn định $S(s)$	61
Bảng 3.1. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán giảm bậc gián tiếp	69
Bảng 3.2 Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán giảm bậc trực tiếp	70
Bảng 3.3. Kết quả giảm bậc phân hệ ổn định của bộ điều khiển bậc cao	77
Bảng 3.4. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao	77
Bảng 3.5. Các hệ giảm bậc $\hat{R}_{1\beta}(s)$ ổn định	79
Bảng 3.6. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán chặt cân bằng mở rộng	79
Bảng 3.7. Bộ điều khiển bậc 4 theo các thuật toán giảm bậc cơ bản	82
Bảng 3.8. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou	88
Bảng 3.9. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán cân bằng LQG	88

DANH MỤC CÁC HÌNH ẢNH VÀ ĐỒ THỊ

Hình 2.1. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc	42
Hình 2.2. Đồ thị Bode của hệ gốc và hệ bậc 60	47
Hình 2.3. Đồ thị Bode của hệ gốc và hệ bậc 40	47
Hình 2.4. Đáp ứng bước nhảy của hệ gốc và các hệ giảm bậc	58
Hình 2.5. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc	59
Hình 2.6. Đáp ứng bước nhảy của hệ gốc và các hệ giảm bậc	62
Hình 2.7. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc	62
Hình 3.1. Đáp ứng bước nhảy của bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4	69
Hình 3.2. Đồ thị bode của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4	70
Hình 3.3. Đáp ứng bước nhảy của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4	71
Hình 3.4. Đồ thị bode của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4	71
Hình 3.5. Mô hình hoàn thiện của xe hai bánh tự cân bằng	74
Hình 3.6. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh	80
Hình 3.7. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 5, bậc 4	80
Hình 3.8. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh	82
Hình 3.9. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4	83
Hình 3.10. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 1	83
Hình 3.11. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 2	84
Hình 3.12. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 3	84

Hình 3.13. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 4	85
Hình 3.14. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh	86
Hình 3.15. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và bộ điều khiển bậc 5, bậc 4	87
Hình 3.16. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh	89
Hình 3.17. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4	89
Hình 3.18. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 1	90
Hình 3.19. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 2	91
Hình 3.20. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 3	92
Hình 3.21. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 4	94
Hình 4.1. Mô hình xe hai bánh tự cân bằng	98
Hình 4.2. Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển xe hai bánh tự cân bằng	98
Hình 4.3. Khối xử lý tín hiệu đầu vào (Input) trong Matlab – Simulink	101
Hình 4.4. Khối nhận tín hiệu của các cảm biến được đưa lên từ bo mạch Arduino	102
Hình 4.5. Khối chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến Gyroscopic	103
Hình 4.6. Khối chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến Accelerometer	103
Hình 4.7. Sơ đồ nguyên lý xác định góc nghiêng bền vững	103
Hình 4.8. Khối chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến vận tốc động cơ quay bánh đà	104
Hình 4.9. Khối xử lý tín hiệu đầu ra (output) trong Matlab – Simulink	104

Hình 4.10. Khối xử lý tín chiều quay động cơ quay bánh đà	105
Hình 4.11. Khối xử lý độ lớn điện áp đặt vào động cơ quay bánh đà	105
Hình 4.12. Khối gửi tín hiệu chiều quay động cơ quay bánh đà đến Adruno	105
Hình 4.13. Khối gửi tín hiệu độ lớn điện áp đặt vào động cơ quay bánh đà đến Adruno	105
Hình 4.14. Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển trong Matlap – Simulink	106
Hình 4.15. Bộ điều khiển xe hai bánh tự cân bằng	106
Hình 4.16. Sơ đồ bàn thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng	107
Hình 4.17. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi không mang tải	108
Hình 4.18. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi tác động lực vào xe hai bánh	109
Hình 4.19. Khi xe hai bánh mang tải	110
Hình 4.20. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi xe mang tải	110
Hình 4.21. Khi xe mang tải lệch tâm	111
Hình 4.22. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi thay đổi tải lệch tâm	111
Hình 4.23. Hình ảnh xe hai bánh tự cân bằng khi không mang tải	112

MỞ ĐẦU

1. Giới thiệu

Tăng tốc độ xử lý và tính toán hiện nay là một hướng ưu tiên nghiên cứu trong lĩnh vực kỹ thuật. Để tăng tốc độ tính toán, có một số hướng tiếp cận sau:

1. Sử dụng tối ưu thông lượng bộ nhớ cho các vi xử lý song song.
2. Phân rã các bài toán và lập trình song song theo nghĩa tính toán hiệu năng cao.
3. Quay về dùng các chip tương tự như mạng nơ ron tế bào (CNN)
4. Tìm cách giảm độ phức tạp của thuật toán mà vẫn đảm bảo sai số theo yêu cầu.

Một trong những hướng quan trọng trong việc giảm độ phức tạp của thuật toán chính là giảm bậc mô hình mà luận án sẽ tập trung nghiên cứu.

2. Tính khoa học và cấp thiết của luận án

Trong kỹ thuật nói chung và kỹ thuật điều khiển nói riêng, mô tả toán học hệ động học thường được sử dụng với 2 mục đích cơ bản là mô phỏng và điều khiển. Trong cả hai mục đích này, thì ta thường xuyên bắt gặp các mô hình toán học phức tạp, có thể bậc rất cao, như mô hình hệ thống dự báo thời tiết [19], phân tích và thiết kế hệ thống vi cơ điện tử (MEMS) [58], mô phỏng mạch điện [18], bộ điều khiển tối ưu bền vững bậc cao [3], [78], bộ lọc số [87], ...

Về mặt lý thuyết, các mô hình toán học phức tạp, bậc cao sẽ mô tả một cách chính xác các tính chất của hệ động học – đây là mục tiêu chính của mô tả toán học. Tuy nhiên, sử dụng các mô hình bậc cao này trong thực tế sẽ gặp một số bất lợi như sau:

+ Nếu mô hình phức tạp, bậc cao là mô hình của đối tượng như trong [18], [19], [58] thì sẽ làm gia tăng khối lượng tính toán cần được xử lý làm tăng thời gian mô phỏng và có thể không đáp ứng được yêu cầu về mặt thời gian

trong mô phỏng, tìm hiểu tính chất mô hình hoặc nếu muốn đáp ứng yêu cầu về mặt thời gian thì đòi hỏi hệ thống xử lý phải có tốc độ tính toán cao tương ứng là chi phí phần cứng tăng lên. Đồng thời do mô hình phức tạp bậc cao nên có thể đòi hỏi dung lượng bộ nhớ để lưu trữ dữ liệu về mô hình lớn hơn.

Cụ thể như mô hình dự báo bão ở Hà Lan trong tài liệu [19] có số phương trình xấp xỉ tới 60.000 phương trình và các tham số của phương trình thay đổi liên tục, do đó để lưu trữ dữ liệu này đòi hỏi cần phải có dung lượng bộ nhớ lớn và thời gian xử lý dữ liệu tối thiểu là khoảng 6h [19], điều này dẫn tới hệ thống không thể đáp ứng yêu cầu cần phải có thông tin dự báo càng sớm càng tốt – là một trong những yêu cầu quan trọng nhất của hệ thống dự báo.

Một mô hình khác cũng gặp vấn đề tương tự như mô hình dự báo bão ở trên là mô hình mạch vi xử lý trong tài liệu [18], do tốc độ của vi xử lý ngày càng tăng nên độ phức tạp của mạch vi xử lý cũng tăng lên rất nhanh, kết quả là mô hình mạch vi xử lý có thể có xấp xỉ 10^6 phương trình dẫn đến thời gian để mô phỏng, phân tích mạch tăng lên và làm chậm quá trình thiết kế, sản xuất mạch vi xử lý và tương ứng làm tăng chi phí của quá trình sản xuất.

+ Nếu mô hình phức tạp, bậc cao là mô hình bộ điều khiển thu được từ quá trình thiết kế điều khiển bền vững như trong tài liệu [3], [78], thì mô hình phức tạp, bậc cao sẽ làm gia tăng khối lượng tính toán cần được xử lý dẫn tới các hệ thống điều khiển có thể không đáp ứng được yêu cầu điều khiển thời gian thực hoặc nếu muốn đáp ứng được thì yêu cầu phần cứng phải có tốc độ xử lý cao làm tăng chi phí của hệ thống điều khiển hoặc do tính phức tạp của bộ điều khiển sẽ có thể làm tăng khả năng gặp sự cố của hệ thống điều khiển hay giảm độ tin cậy của hệ thống điều khiển. Trong nhiều trường hợp, một hệ thống điều khiển có mô hình quá phức tạp, bậc cao có thể không lắp đặt được trên các thiết bị như thiết bị tự động tự hành, các robot không gian,... do sự hạn chế về không gian, khối lượng của các thiết bị.

Vậy nếu có một mô hình toán học có bậc nhỏ hơn mà có thể mô tả một cách tương đối chính xác hệ động học thì hiệu quả đem lại là:

- + Mô hình bậc thấp sẽ giảm khối lượng tính toán cần được xử lý nên giúp quá trình tính toán nhanh hơn do đó dễ dàng thỏa mãn yêu cầu về thời gian đáp ứng trong mô phỏng cũng như trong điều khiển.

- + Mô hình bậc thấp sẽ giảm khối lượng tính toán cần được xử lý, giảm dung lượng lưu trữ dữ liệu nên yêu cầu về tốc độ, dung lượng bộ nhớ của phần cứng trong mô phỏng và điều khiển giảm đi tương ứng là chi phí kinh tế giảm đi hoặc khai thác hiệu quả các hệ thống cũ, các hệ thống có kết cấu nhỏ gọn (do bị hạn chế về không gian và khối lượng) có cấu hình phần cứng thấp. Đồng thời, khi yêu cầu phần cứng trong mô phỏng và điều khiển giảm hay chính là kết cấu phần cứng đơn giản hơn (ít phần tử hơn) thì độ tin cậy của hệ thống sẽ được nâng lên.

Như vậy, mô hình bậc thấp đã giải quyết hài hòa yêu cầu về độ chính xác của mô hình với khả năng tính toán nhanh, độ tin cậy của hệ thống, chi phí kinh tế nhỏ. Từ thực tế này, tìm cách xác định mô hình bậc thấp từ mô hình gốc bậc cao thỏa mãn một số điều kiện nhất định là một yêu cầu cấp thiết và đây chính là hướng nghiên cứu của luận án.

Trong những năm qua, đã có rất nhiều các công trình nghiên cứu để giải quyết bài toán giảm bậc mô hình bậc cao với rất nhiều đề xuất khác nhau đã hình thành nên lĩnh vực “giảm bậc mô hình” (**MOR: Model Order Reduction**).

Việc nghiên cứu giảm bậc cho hệ tuyến tính bậc cao đã có nhiều kết quả, tuy nhiên các thuật toán đã được đề xuất vẫn còn có những nhược điểm và cần tiếp tục nghiên cứu để hoàn thiện hơn nữa, đặc biệt với hệ tuyến tính không ổn định bậc cao thì các nghiên cứu trước đây còn rất ít và tồn tại nhiều hạn chế. Trong khi đó các mô hình tuyến tính bậc cao (đối tượng bậc cao hoặc bộ điều khiển bậc cao như trong các nghiên cứu [3], [53], [84]) có thể không ổn định,

nên yêu cầu cấp thiết là thuật toán giảm bậc cần phải có khả năng giảm bậc được cả hệ ổn định và không ổn định. Do đó trong nội dung luận án này, tác giả tập trung nghiên cứu một cách hệ thống bài toán giảm bậc mô hình tuyến tính và từ đó đề xuất thuật toán giảm bậc mô hình tuyến tính mới hoặc hoàn thiện thuật toán giảm bậc mô hình tuyến tính đã được đề xuất để thuật toán có thể giảm bậc được cả hệ ổn định và hệ không ổn định.

3. Mục tiêu của luận án

3.1. Mục tiêu chung

- Đề xuất thuật toán giảm bậc mô hình tuyến tính mới hoặc hoàn thiện thuật toán giảm bậc mô hình tuyến tính đã được đề xuất để thuật toán có thể giảm bậc được cả hệ ổn định bậc cao và hệ không ổn định bậc cao.

- Thực thi ý tưởng đề xuất cho một số bài toán trong lĩnh vực điều khiển-Tự động hóa như: giảm bậc bộ lọc số, giảm bậc mô hình CD player, giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao.

3.2. Mục tiêu cụ thể

- Đề xuất chuẩn độ đo mới để đánh giá tính quan trọng của điểm cực trong thuật toán giảm bậc mô hình có hiệu quả hơn. Từ đó xây dựng thuật toán giảm bậc mới cho hệ tuyến tính bậc cao và thuật toán giảm bậc mới cho hệ không ổn định và kiểm chứng hiệu quả và tính đúng đắn của thuật toán qua một số ví dụ.

- Hoàn thiện thuật toán giảm bậc mô hình đã được đề xuất để thuật toán đáp ứng tốt hơn yêu cầu của bài toán giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định bậc cao và kiểm chứng hiệu quả và tính đúng đắn của thuật toán qua một số ví dụ.

- Áp dụng thuật toán giảm bậc mới vào một bài toán trong lĩnh vực điều khiển, cụ thể là bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao với hai trường hợp là giảm bậc bộ điều khiển bậc cao của hệ thống ổn định góc tải máy phát đồng bộ

(thuật toán, mô phỏng) và giảm bậc bộ điều khiển bậc cao của hệ thống điều khiển bền vững xe hai bánh tự cân bằng (có cả thuật toán, mô phỏng và thực nghiệm).

4. Đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: Các thuật toán giảm bậc mô hình cho hệ tuyến tính ổn định và không ổn định.

- Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu, cải tiến thuật toán giảm bậc mô hình cho hệ tuyến tính ổn định và không ổn định bậc cao; ứng dụng thuật toán giảm bậc trong bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao.

- Phương pháp nghiên cứu:

- + Nghiên cứu lý thuyết: Phân tích, đánh giá các nghiên cứu về giảm bậc mô hình cho hệ tuyến tính ổn định và không ổn định đã được công bố trên sách, báo, tạp chí.

- + Mô phỏng trên Matlab – Simulink để kiểm chứng lại lý thuyết.

- + Thực nghiệm trên một hệ thống điều khiển có bộ điều khiển bậc cao là một mô hình tuyến tính không ổn định để kiểm chứng kết quả nghiên cứu lý thuyết và kết quả mô phỏng.

5. Ý nghĩa lý luận và thực tiễn

5.1. Ý nghĩa lý luận

- Hai thuật toán giảm bậc mô hình được xây dựng và hoàn thiện trong luận án có thể được sử dụng để đơn giản hóa một mô hình toán học được mô tả bằng hệ phương trình vi phân cấp n về hệ phương trình vi phân cấp $r < n$ mà vẫn giữ lại những đặc tính cần thiết của mô hình gốc như bảo toàn các điểm cực trội, các giá trị Hankel suy biến quan trọng đồng thời quan hệ vào ra của hệ vẫn được đảm bảo sao cho sai số giữa hệ gốc với hệ giảm bậc không lớn hơn một giá trị cho phép. Hai thuật toán này giúp bổ sung lý thuyết về nhận dạng hệ động lực

học và thiết kế hệ thống điều khiển trong lĩnh vực điều khiển và điện – điện tử nói chung.

- Ứng dụng hai thuật toán giảm bậc mô hình vào bài toán giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao giúp thu được bộ điều khiển bậc thấp mà vẫn đáp ứng được các yêu cầu của bài toán điều khiển bền vững, kết quả này giúp bổ sung lý thuyết thiết kế bộ điều khiển bền vững bậc thấp trong bài toán điều khiển bền vững.

5.2. Ý nghĩa thực tiễn

- Kết quả nghiên cứu giúp đơn giản hóa các mô hình bộ điều khiển bậc cao hoặc mô hình đối tượng bậc cao từ đó sẽ giảm khối lượng tính toán cần được xử lý (lập trình, cài đặt đơn giản hơn), giảm dung lượng lưu trữ dữ liệu nên yêu cầu về tốc độ xử lý, dung lượng bộ nhớ của phần cứng trong mô phỏng và điều khiển giảm đi tương ứng là chi phí kinh tế giảm đi hoặc khai thác hiệu quả các hệ thống cũ, các hệ thống có kết cấu nhỏ gọn (do bị hạn chế về không gian và khối lượng) có cấu hình phần cứng thấp mà vẫn đáp ứng được yêu cầu chất lượng mong muốn. Đồng thời, khi yêu cầu phần cứng trong mô phỏng và điều khiển giảm hay chính là kết cấu phần cứng đơn giản hơn (ít phần tử hơn) thì độ tin cậy của hệ thống sẽ được nâng lên.

- Kết quả nghiên cứu sẽ là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh quan tâm nghiên cứu về giảm bậc mô hình và thiết kế bộ điều khiển bền vững bậc thấp.

- Có khả năng bổ sung phần tự động giảm bậc mô hình hệ tuyến tính ổn định và không ổn định trong toolbox của Matlab – Simulink.

6. Bố cục luận án

Luận án được bố cục thành 4 chương

Chương 1. Tổng quan về giảm bậc mô hình

Trong chương này, tác giả giới thiệu bài toán giảm bậc mô hình tuyến tính cùng các yêu cầu cơ bản của bài toán, sau đó nghiên cứu, đánh giá một cách có hệ thống các phương pháp giảm bậc tuyến tính đã được đề xuất và đưa ra các vấn đề còn tồn tại của các thuật toán từ đó đặt ra các vấn đề chính mà luận án cần tập trung nghiên cứu và giải quyết.

Chương 2. Xây dựng thuật toán giảm bậc mô hình

Trong chương này, tác giả sẽ xây dựng và hoàn thiện các thuật toán giảm bậc mô hình nhằm giải quyết các vấn đề còn tồn tại của bài toán giảm bậc mô hình đã được đặt ra trong chương 1. Phần đầu của chương này, tác giả giới thiệu các công cụ toán học sử dụng trong giảm bậc. Sau đó, dựa trên hai tiêu chuẩn đánh giá sai số giảm bậc (H_2 và H_∞) tác giả đưa ra được 3 tiêu chuẩn đánh giá (đo) tính quan trọng (tính trội) của các điểm cực (Chỉ số trội H_∞ và H_2 và hỗn hợp H_2/H_∞). Tiếp theo đó, tác giả xây dựng thuật toán giảm bậc mới cho hệ ổn định bằng cách chuyển ma trận A của hệ gốc về dạng tam giác trên đồng thời đánh giá và sắp xếp các điểm cực theo tính quan trọng (tính trội) giảm dần trên đường chéo chính của ma trận A dựa trên 3 tiêu chuẩn đánh giá điểm cực, bằng cách này, tác giả có thể bảo toàn được các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc đồng thời thu được sai số giảm bậc nhỏ. Phần tiếp theo của chương này, tác giả xây dựng và hoàn thiện hai thuật toán giảm bậc mô hình cho hệ tuyến tính không ổn định theo hai hướng tiếp cận trực tiếp và gián tiếp. Song song với việc trình bày các thuật toán mới, tác giả cũng đưa ra các định lý, bổ đề và phân chứng minh đầy đủ và một số ví dụ minh họa tính đúng đắn và hiệu quả của các thuật toán được đề xuất.

Chương 3. Về một ứng dụng bài toán giảm bậc mô hình trong điều khiển

Phần đầu chương này, tác giả giới thiệu phạm vi ứng dụng của giảm bậc mô hình trong bài toán giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao. Phần tiếp theo, tác giả trình bày ứng dụng thuật toán giảm bậc mô hình để giảm bậc bộ

điều khiển bền vững bậc cao của hệ thống ổn định góc tải máy phát đồng bộ. Phần cuối cùng của chương này, tác giả trình bày ứng dụng thuật toán giảm bậc để giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao của hệ thống điều khiển bền vững xe hai bánh tự cân bằng. Đồng thời ở chương này, để làm rõ hơn ưu nhược điểm của thuật toán đề xuất, tác giả thực hiện so sánh hiệu quả của thuật toán giảm bậc đã đề xuất với một số thuật toán giảm bậc khác trong quá trình ứng dụng thuật toán giảm bậc vào bài toán giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao.

Chương 4. Thực nghiệm

Trong nội dung chương này, tác giả sẽ thực nghiệm trên một hệ thống điều khiển có bộ điều khiển bậc cao đã được trình bày trong chương 3, cụ thể là thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng sử dụng bộ điều khiển giảm bậc để minh chứng tính đúng đắn của thuật toán điều khiển xe hai bánh và thuật toán giảm bậc mô hình.

Cuối cùng là kết luận và hướng phát triển tiếp theo của luận án.

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ GIẢM BẬC MÔ HÌNH

1.1. Bài toán giảm bậc mô hình

Cho một hệ tuyến tính, liên tục, tham số bất biến theo thời gian, có nhiều đầu vào, nhiều đầu ra, mô tả trong không gian trạng thái bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{1.1}$$

trong đó, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Mục tiêu của bài toán giảm bậc đối với mô hình mô tả bởi hệ phương trình (1.1) là tìm mô hình mô tả bởi hệ phương trình:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r\end{aligned}\tag{1.2}$$

trong đó, $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_r \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{q \times r}$, với $r \ll n$

sao cho mô hình mô tả bởi hệ phương trình (1.2) có thể thay thế mô hình mô tả bởi hệ phương trình (1.1), đồng thời đáp ứng được một số yêu cầu sau:

1. Sai số giảm bậc nhỏ và có thể đánh giá được sai số giảm bậc;
2. Thuật toán giảm bậc cần tính toán hiệu quả, ổn định;
3. Thuật toán giảm bậc có thể thực hiện tự động dựa trên công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc;
4. Các tính chất quan trọng của hệ thống gốc cần được bảo toàn trong hệ giảm bậc như tính ổn định và tính thụ động, ...
5. Phù hợp với từng yêu cầu riêng biệt của từng bài toán giảm bậc.

1.2. Các nghiên cứu giảm bậc trên thế giới

Trong nhiều năm qua, đã có hàng trăm công trình nghiên cứu để giải quyết bài toán giảm bậc mô hình bậc cao được công bố và đề xuất, trong đó hầu hết các công trình tập trung giải quyết bài toán giảm bậc cho hệ tuyến tính. Phụ

thuộc vào các tính chất của hệ gốc cần được bảo toàn trong hệ giảm bậc mà có nhiều phương pháp giảm bậc khác nhau, tuy nhiên, theo tài liệu [6], [7], [22] thì hầu hết các phương pháp đều dựa trên các kỹ thuật cơ bản như sau:

Phân tích nhiễu loạn suy biến (Singular Perturbations Analysis – SPA);

Phân tích phương thức (Modal Analysis – MA);

Phân tích giá trị suy biến (Singular Value Decomposition – SVD);

Phù hợp thời điểm (Moment Matching – MM hay Krylov Methods);

Kết hợp phân tích giá trị suy biến (SVD) và phù hợp thời điểm (MM).

Sau đây, ta đi tìm hiểu cụ thể các phương pháp giảm bậc dựa trên các kỹ thuật cơ bản này.

1.2.1. Nhóm phương pháp dựa trên phân tích nhiễu loạn suy biến (SPA)

Đề xuất đáng quan tâm nhất của nhóm này là của Kokotovic và đồng tác giả [40], [71], [73], Ishizaki và các đồng tác giả [37], Saragih và các đồng tác giả [74], Fernando và các đồng tác giả [25]. Nhóm phương pháp này đặc biệt tiện lợi khi hệ thống gốc có đặc tính biến đổi theo hai mức thời gian và áp dụng cho cả hệ tuyến tính và hệ phi tuyến. Các trạng thái động học của hệ được phân chia thành các nhóm thuộc mode “chậm” và mode “nhanh” và việc giảm bậc được thực hiện bằng cách loại bỏ các mode “nhanh” và chỉ giữ lại các mode “chậm”. Theo [4], một ưu điểm quan trọng của nhóm phương pháp này nằm ở chỗ bản chất vật lý của các trạng thái của hệ gốc được bảo toàn trong hệ giảm bậc, bởi nếu cần thiết các trạng thái thuộc mode “nhanh” đã bỏ đi có thể tái xác định bằng cách quay trở lại hệ gốc. Tuy nhiên, với nhóm phương pháp này, khó khăn chính là làm thế nào để xác định, phân chia một cách hợp lý các trạng thái nhóm thuộc mode “chậm” và các trạng thái thuộc mode “nhanh”, vì các trạng thái của một hệ thống thường ghép ngẫu nhiên với nhau nên khó xác định được

trạng thái nào gắn với mode nào. Thêm vào đó, các mode “nhANH” và mode “chậm” cũng chỉ được xác định theo khái niệm tương đối.

1.2.2. Nhóm phương pháp dựa trên phân tích phương thức

Nhóm phương pháp này dựa trên cơ sở phân tích phương thức để xác định và bảo toàn một số đặc tính quan trọng của mô hình gốc trong mô hình giảm bậc. Trong các tính chất của mô hình gốc cần được bảo toàn thì giá trị riêng quan trọng (hay điểm cực trội) được quan tâm nhiều nhất [8], [67], [68]. Trong các phương pháp đề xuất trên cơ sở bảo lưu các giá trị riêng quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc thì phương pháp tổng quát nhất là phương pháp ghép hợp trong tài liệu [8]. Ưu điểm của nhóm phương pháp bảo toàn các giá trị riêng quan trọng là do giữ các giá trị riêng quan trọng của mô hình gốc trong mô hình giảm bậc nên tính ổn định của mô hình giảm bậc được bảo toàn. Tuy nhiên, theo phương pháp ghép hợp để xác định mô hình giảm bậc cần phải tính các giá trị riêng và các véc tơ riêng của ma trận $\mathbf{A}$, do đó nếu ma trận $\mathbf{A}$ có kích thước rất lớn thì quá trình tính toán sẽ mất thời gian đáng kể. Đặc điểm thứ hai của phương pháp ghép hợp là đáp ứng bước nhảy $h(t)$ của mô hình gốc và mô hình giảm bậc có thể khác nhau đáng kể, điều này có thể được khắc phục bằng cách phối hợp phương pháp ghép hợp với phương pháp trùng khớp các điểm theo thời gian [36]. Một câu hỏi quan trọng đối với phương pháp ghép hợp là chọn các giá trị riêng như thế nào? Câu hỏi này có đáp án khi kết hợp với một tiêu chuẩn áp dụng trong kỹ thuật phân tích, tổng hợp hệ thống. Tiêu chuẩn tỷ số năng lượng dựa trên cơ sở xét tổng năng lượng đáp ứng xung ở đầu ra của mô hình gốc, bảo toàn các giá trị riêng có đóng góp nhiều nhất vào tổng đó đã được dùng để xác định bậc thích hợp nhất cho mô hình giảm bậc được đề xuất trong tài liệu [52]. Trong tài liệu [20] sử dụng những xung đơn vị để tìm một đại lượng đo tầm ảnh hưởng của từng trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$ làm cơ sở xác định các giá trị quyết định. Một tiêu chuẩn khác được đề xuất trong tài liệu [75] là chọn các giá trị riêng quan trọng của hệ dựa trên sự đóng góp của từng mode biến đổi theo thời

gian vào đặc tính giữa đầu vào và đầu ra của hệ. Một phương pháp lựa chọn giá trị riêng quan trọng đáng quan tâm nhất hiện nay là phương pháp điểm cực trội trong tài liệu [67], [68]. Trong tài liệu [67], [68], tác giả đánh giá tính quan trọng (tính trội) của điểm cực dựa trên cơ sở đóng góp của điểm cực vào đáp ứng xung đầu ra, sau đó sử dụng phương pháp Arnoldi và Jacobi-Davidson, không gian con Krylov để xác định và phân loại các điểm cực và bảo toàn các điểm cực trội trong hệ giảm bậc, tuy nhiên thuật toán này chỉ áp dụng cho hệ gốc ổn định tiệm cận, độ phức tạp của thuật toán cao và chưa xác định được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.

1.2.3. Nhóm phương pháp dựa trên SVD

Nhóm phương pháp giảm bậc này được thực hiện dựa trên phép phân tích giá trị suy biến (SVD) và thông tin từ các giá trị Hankel suy biến của hệ thống. Đề xuất quan trọng nhất của nhóm phương pháp này là phương pháp chặt (cắt ngắn) cân bằng trong tài liệu [57]. Phương pháp chặt cân bằng được thực hiện bằng cách áp dụng điều kiện tương đương lên quá trình đường chéo hóa đồng thời hai ma trận Gramian điều khiển và Gramian quan sát động học của hệ trong tư duy hệ hở. Việc tương đương hóa hai ma trận đường chéo như thế cho phép chuyển mô hình gốc biểu diễn trong hệ cơ sở bất kỳ thành hệ tương đương biểu diễn theo hệ tọa độ trong không gian cân bằng nội. Từ không gian cân bằng đó, mô hình bậc thấp có thể tìm được bằng cách loại bỏ các giá trị riêng ít đóng góp cho sự tạo dựng mối quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của hệ, tức là loại bỏ các trạng thái ít khả năng điều khiển và quan sát. Phương pháp chặt cân bằng được phát triển thêm trong tài liệu [65], và được xác định mối quan hệ với các chuẩn Hankel trong tài liệu [29]. Những nghiên cứu gần đây về phương pháp chặt cân bằng [6], [7], [76] tập trung vào hoàn thiện thuật toán hoặc hiệu chỉnh thuật toán chặt cân bằng cho từng bài toán ứng dụng giảm bậc cụ thể.

Ngoài phương pháp chặt cân bằng thì phương pháp dựa trên SVD còn có một số phương pháp khác như phương pháp cân bằng ngẫu nhiên (the stochastic

balancing method) [21], [31], cân bằng thực dương (the positive real balancing method) [61], cân bằng LQG (the LQG balancing method) [38], cân bằng trọng tần số [27], phương pháp xấp xỉ chuẩn Hankel (Hankel-Norm Approximation) [7], xấp xỉ nhiễu loạn suy biến (Singular Perturbation Approximation) [51], ... Phương pháp cân bằng ngẫu nhiên được đề xuất đầu tiên trong nghiên cứu [31] cho hệ cân bằng ngẫu nhiên, sau đó được tổng quát hóa trong nghiên cứu [21]. Khác với phương pháp chặt cân bằng yêu cầu phải giải 2 phương trình Lyapunov, phương pháp cân bằng ngẫu nhiên yêu cầu giải một phương trình Lyapunov và một phương trình Riccati. Một phương pháp rất gần với phương pháp chặt cân bằng là phương pháp cân bằng thực dương [61] áp dụng giảm bậc cho các hệ thực dương. Phương pháp cân bằng thực dương có thể được coi là phương pháp cân bằng ngẫu nhiên áp dụng cho thừa số phổ của các hệ thụ động và yêu cầu giải 2 phương trình Riccati. Phương pháp cân bằng LQG (the LQG balancing method) [38] cũng yêu cầu giải 2 phương trình Riccati mở rộng theo tư duy hệ kín. Hai phương pháp giảm bậc khác cũng gần tương tự như phương pháp chặt cân bằng là phương pháp xấp xỉ chuẩn Hankel (Hankel-Norm Approximation) [7], xấp xỉ nhiễu loạn suy biến (Singular Perturbation Approximation) [51]. Theo [6], ưu điểm chung của các phương pháp giảm bậc dựa trên SVD là khả năng bảo toàn tính ổn định và cung cấp công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc toàn cục. Tuy nhiên, các phương pháp thuộc nhóm này đều yêu cầu nhiều lần phân tích ma trận nên độ phức tạp của thuật toán cao và khó khăn khi áp dụng cho các hệ bậc rất lớn.

1.2.4. Nhóm phương pháp phù hợp thời điểm (MM) hay phương pháp không gian con Krylov (Krylov Methods)

Cơ sở của nhóm phương pháp này là chọn trùng khớp đặc tính đáp ứng xung của hệ giảm bậc với đáp ứng xung của hệ gốc tại các thời điểm. Nhóm phương pháp này được phát triển từ phương pháp lấy xấp xỉ khi tích phân gần đúng hàm theo chuỗi của Pade [72]. Một hạn chế lớn của phương pháp gần đúng

Pade là đôi khi các mô hình bậc thấp tìm được có thể không ổn định dù rằng mô hình gốc bậc cao ổn định. Để khắc phục nhược điểm trên đã có nhiều phương pháp được đề xuất trong đó quan trọng nhất là phương pháp giảm bậc ổn định sử dụng phương pháp gần đúng theo chuỗi Chebyshev Pade được đề xuất trong tài liệu [15] và phương pháp phù hợp thời điểm (moment matching) hay phương pháp không gian con Krylov trong tài liệu [23], [32], [35]. Trong đó, phương pháp không gian con Krylov được chia làm 3 nhóm nhỏ hơn là:

- 1) Thực hiện theo quy trình Arnoldi như trong tài liệu [32],
- 2) Thực hiện theo quy trình Lanholz như trong tài liệu [23], [32],
- 3) Thực hiện theo tỷ số năng lượng như trong tài liệu [32], [35].

Các kỹ thuật này đảm bảo cho việc lựa chọn điểm trùng khớp phù hợp, xác định được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc, đảm bảo được sự ổn định của mô hình, có thể áp dụng cho hệ nhiều vào nhiều ra, hệ tính toán song song,... Theo [6], ưu điểm chủ yếu của nhóm phương pháp này nằm ở chỗ tính toán đơn giản hơn so với các phương pháp khác. Tuy nhiên, nhóm phương pháp này yêu cầu phải lựa chọn điểm trùng khớp, nên quá trình giảm bậc không thể thực hiện tự động mà phụ thuộc vào kinh nghiệm của người sử dụng, đồng thời không tồn tại công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc toàn cục.

1.2.5. Nhóm phương pháp kết hợp phân tích giá trị suy biến (SVD) và phù hợp thời điểm (MM)

Nhóm phương pháp này tìm cách kết hợp ưu điểm của phương pháp phân tích giá trị suy biến (SVD) và phương pháp phù hợp thời điểm [6], trong đó đáng quan tâm nhất là nhóm phương pháp low – rank Gramian [10], [49], [64]. Nghiên cứu [64] đề xuất cách giải 2 phương trình Lyapunov cho hệ kích thước lớn theo phương pháp lặp low-rank ADI (LR-ADI) (ADI - alternating direction implicit). Nghiên cứu [49] đề xuất cách giải 2 phương trình Lyapunov cho hệ kích thước lớn theo phương pháp lặp phân tích Cholesky ADI (CF-ADI). Một

phương pháp giải 2 phương trình Lyapunov cho hệ kích thước lớn khác cũng được đề xuất trong [64] được gọi là phương pháp lặp low-rank Smith (LR – Smith) và là một trường hợp đặc biệt của phương pháp lặp low-rank ADI (LR-ADI). Trong [10] thực hiện kết nối giữa phương pháp kiểu Smith (Smith-type methods) và phương pháp kiểu ADI (ADI-type methods). Ưu điểm của nhóm phương pháp này là sẽ bảo toàn được tính ổn định của hệ, cung cấp công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc toàn cục, giảm độ phức tạp của thuật toán giảm bậc nên có thể áp dụng cho hệ có bậc rất cao.

1.2.6. Nhóm các phương pháp khác

Trong [44] giới thiệu phương pháp giảm bậc bảo toàn các trạng thái quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc. Trong [85] đề xuất phương pháp kết hợp phép chiếu trực giao thích hợp (POD) với phương pháp chặt cân bằng (POD-BT). Trong [62] đề xuất phương pháp dùng các thuật toán PSO hoặc GA tìm thông số của mô hình giảm bậc cố định cho hệ SISO kích thước lớn, ...

1.3. Các nghiên cứu trong nước về giảm bậc

Theo tìm hiểu của tác giả thì ở trong nước hiện nay chưa có nhiều công trình nghiên cứu về giảm bậc mô hình, xin nêu ra ở đây một số công trình mà tác giả đã tìm hiểu được.

Trong tài liệu [56], tác giả tập trung nghiên cứu một số vấn đề lý thuyết của giảm bậc mô hình (tập trung đặc biệt vào bảo toàn thụ động) và xấp xỉ cho các hệ thống động lực theo phương pháp xấp xỉ đáng điệu phát triển bởi JC Willems.

Trong tài liệu [1], tác giả đề xuất phương pháp giảm bậc kết hợp giữa phương pháp dựa trên SVD với bảo toàn giá trị riêng quan trọng và áp dụng thuật toán giảm bậc cho bài toán viễn thông.

Trong tài liệu [4], tác giả đề xuất phương pháp giảm bậc tối ưu đầu ra, đảm bảo bảo lưu các trạng thái quan trọng của mô hình gốc bậc cao trong mô hình giảm bậc và áp dụng thuật toán giảm bậc cho các bài toán trong mạng viễn thông.

1.4. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu về giảm bậc mô hình

Qua giới thiệu và đánh giá ở mục 1.2 cho thấy mỗi phương pháp đều có những ưu nhược điểm riêng nên theo quan điểm của tác giả phương pháp "tốt nhất" hiện nay, tức là một phương pháp giảm bậc đáp ứng mọi yêu cầu của bài toán giảm bậc và áp dụng cho mọi đối tượng cần giảm bậc, chưa tồn tại. Trong đó, tác giả đặc biệt quan tâm đến nhóm phương pháp giảm bậc dựa trên phân tích phương thức và thấy rằng còn tồn tại một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu như sau:

- Phương pháp điểm cực trội trong tài liệu [67], [68], mặc dù đã đưa ra được tiêu chuẩn đánh giá tính quan trọng của điểm cực tuy nhiên thuật toán này có độ phức tạp tính toán cao và chưa đưa ra được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.
- Trong nghiên cứu [1], tác giả đưa ra phương pháp giảm bậc bằng cách kết hợp phương pháp cắt ngắn phương thức (modal truncation) với phương pháp chặt cân bằng nhằm giảm độ phức tạp của thuật toán giảm bậc do ít sử dụng phân tích SVD, nhưng nhược điểm của thuật toán này là chưa xây dựng được tiêu chuẩn cụ thể để đánh giá tính quan trọng của điểm cực, thuật toán được thực hiện trên trường số phức nên mặc dù hệ gốc có thông số thực nhưng hệ giảm bậc thu được theo thuật toán lại có thông số phức, điều này dẫn tới sự sai lệch về bản chất vật lý của hệ giảm bậc so với hệ gốc.

Đặc biệt, tác giả thấy rằng, hai thuật toán giảm bậc trên cũng như hầu hết các nghiên cứu giảm bậc tuyến tính đã đề xuất đều áp dụng cho hệ gốc ổn định tiệm cận – tức là hệ có tất cả các điểm cực nằm ở bên trái trục ảo, các nghiên cứu về giảm bậc cho hệ không ổn định còn rất hạn chế. Tuy nhiên, trong thực tế các mô hình tuyến tính bậc cao (mô hình đối tượng bậc cao, các bộ điều khiển bậc cao như trong các nghiên cứu [3], [53], [84]) cũng có thể không ổn định, do

đó để đáp ứng yêu cầu bài toán giảm bậc (mô hình đối tượng hoặc bộ điều khiển bậc cao) thì các thuật toán cần phải có khả năng giảm bậc được cả hệ ổn định và không ổn định.

Theo các nghiên cứu [17], [38], [81], [82], [84], [88], [90] thì có hai cách tiếp cận cơ bản để giảm bậc cho hệ không ổn định như sau: **Cách tiếp cận thứ nhất:** [6], [24], [42], [84] (cách giảm bậc gián tiếp hệ không ổn định) hệ không ổn định được phân tích thành tổng của hai phần là phần ổn định và phần không ổn định. Sau đó, áp dụng các thuật toán giảm bậc ổn định như chặt cân bằng [57] trên phần ổn định. Hệ giảm bậc được hình thành là tổng của phần giảm bậc hệ ổn định và phần không ổn định. Theo cách tiếp cận thứ nhất thì hiệu quả giảm bậc phụ thuộc chủ yếu vào thuật toán giảm bậc áp dụng cho phần hệ ổn định. Tuy nhiên do cách tiếp cận này coi phần hệ không ổn định là không thể loại bỏ trong hệ giảm bậc do đó hệ giảm bậc luôn có bậc lớn hơn bậc của phần hệ không ổn định, điều này dẫn đến cách tiếp cận này có thể không cung cấp một hệ giảm bậc xấp xỉ tốt mối quan hệ vào – ra của hệ gốc khi phần hệ không ổn định chiếm một phần đáng kể. Tuy nhiên trong thực tế, các phần hệ không ổn định thường chiếm một phần nhỏ trong hệ gốc như trong tài liệu [3] nên cách tiếp cận này vẫn có thể cho kết quả giảm bậc tốt. **Cách tiếp cận thứ hai:** (cách giảm bậc trực tiếp hệ không ổn định) hệ không ổn định được giảm bậc trực tiếp theo thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ tuyến tính không ổn định trong tài liệu [88], theo thuật toán LQG [38], theo phân tích nguyên tố trong tài liệu [82], thuật toán chặt cân bằng áp dụng cho hệ rời rạc không ổn định trong tài liệu [17], thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ tuyến tính không ổn định trong tài liệu [90]. Ưu điểm của cách tiếp cận này là bậc của hệ giảm bậc không phụ thuộc vào bậc của phần hệ không ổn định, tức là bậc của hệ giảm bậc có thể nhỏ hơn bậc của phần hệ không ổn định. Tuy nhiên, các thuật toán đã đề xuất theo hướng này đều tồn tại những nhược điểm, cụ thể là:

- Thuật toán chặt cân bằng mở rộng trong tài liệu [88] cần phải giải 4 phương trình Lyapunov nên độ phức tạp tính toán cao và không thể áp dụng cho mọi hệ không ổn định và không cung cấp công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.
- Thuật toán phân tích nguyên tố trong tài liệu [82] yêu cầu kinh nghiệm của người sử dụng khi lựa chọn phân tích nguyên tố và cũng không đưa ra được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.
- Thuật toán giảm bậc hệ không ổn định trong tài liệu [17] có cung cấp công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc nhưng thuật toán chỉ áp dụng được cho hệ rời rạc.
- Trong nghiên cứu [90] tác giả đã đề xuất phép chiếu (phép dịch trục tọa độ) dựa vào giá trị phần thực β của điểm cực không ổn định có giá trị phần thực lớn nhất để chuyển hệ không ổn định thành hệ ổn định sau đó áp dụng thuật toán chặt cân bằng để giảm bậc. Tuy nhiên, thuật toán này chưa đưa ra được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc do đó thuật toán chưa thể thực hiện giảm bậc tự động dựa trên công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.

Chính vì thế, việc nghiên cứu các thuật toán giảm bậc đã đề xuất cho hệ ổn định để các thuật toán này có thể áp dụng cho hệ không ổn định hoặc nghiên cứu để hoàn thiện các thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định đã được đề xuất hoặc đề xuất thuật toán mới có thể giảm bậc được cả hệ ổn định và hệ không ổn định là rất cần thiết.

Những vấn đề luận án tập trung giải quyết

Từ những phân tích ở trên, luận án của tác giả sẽ tập trung giải quyết hai vấn đề sau:

Vấn đề thứ nhất là đề xuất thuật toán giảm bậc dựa trên phương pháp phân tích phương thức khắc phục được các nhược điểm còn tồn tại trong các tài liệu [1], [67], [68], cụ thể thuật toán sẽ phải giải quyết được các vấn đề sau:

1. Xây dựng và mở rộng tiêu chuẩn đánh giá tính trội của điểm cực có liên hệ trực tiếp với tiêu chuẩn đánh giá sai số giảm bậc và mục tiêu thu được sai số giảm bậc nhỏ;
2. Xác định một chặn trên của sai số giảm bậc;
2. Với cùng sai số giảm bậc nhỏ - bậc của hệ giảm bậc càng nhỏ càng tốt;
3. Có thể bảo toàn các điểm cực trội của hệ gốc trong hệ giảm bậc;
4. Có khả năng giảm bậc được cho cả hệ ổn định và hệ không ổn định;
5. Sử dụng các công cụ toán học phổ biến, độ phức tạp thuật toán nhỏ.

Vấn đề thứ hai là nghiên cứu hoàn thiện thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo hướng tiếp cận thứ 2 (cách giảm bậc trực tiếp hệ không ổn định), cụ thể là tác giả nghiên cứu để xác định được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc của thuật toán chặt cân bằng mở rộng được đề xuất trong tài liệu [90] để thuật toán có thể thực hiện giảm bậc tự động dựa trên công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.

1.5. Kết luận chương 1

Trong chương này, tác giả đã nghiên cứu và đánh giá một cách có hệ thống các thuật toán giảm bậc mô hình tuyến tính, từ đó thấy rằng các thuật toán đã đề xuất đều có ưu nhược điểm riêng, cần được áp dụng cho các bài toán giảm bậc thích hợp. Đồng thời, các thuật toán giảm bậc tuyến tính chủ yếu áp dụng cho hệ ổn định, các thuật toán giảm bậc áp dụng cho hệ không ổn định là chưa nhiều. Từ những nghiên cứu và đánh giá những vấn đề còn tồn tại của các thuật toán giảm bậc đã được đề xuất, tác giả đã đưa ra hai vấn đề mà luận án tập trung giải quyết là xây dựng một thuật toán giảm bậc mới và hoàn thiện thuật toán đã

được đề xuất trong tài liệu [90] để đáp ứng tốt yêu cầu của bài toán giảm bậc mô hình tuyến tính như tồn tại một công thức chặn trên của sai số giảm bậc, bảo toàn điểm cực trội hoặc các trạng thái Hankel quan trọng, sai số giảm bậc nhỏ, đồng thời có thể giảm bậc được cho cả hệ ổn định và hệ không ổn định.

CHƯƠNG 2. XÂY DỰNG THUẬT TOÁN GIẢM BẬC MÔ HÌNH

2.1. Giới thiệu

Trong chương này, tác giả sẽ xây dựng thuật toán giảm bậc mới cho hệ ổn định và hệ không ổn định theo các định hướng nghiên cứu đã đặt ra ở chương 1 đồng thời minh chứng hiệu quả và tính đúng đắn của thuật toán thông qua một số ví dụ.

Bố cục của chương 2 như sau: Trong mục 2.2 tác giả sẽ giới thiệu các công cụ toán học được sử dụng trong giảm bậc mô hình. Thuật toán giảm bậc cho hệ ổn định sẽ được tác giả trình bày trong mục 2.3. Đánh giá sự đóng góp của các điểm cực vào tiêu chuẩn đánh giá sai số giảm bậc (chuẩn H_∞ và H_2), từ kết quả đánh giá đó tác giả đưa ra được khái niệm về thước đo tính trội của điểm cực theo chuẩn H_∞ và gợi ý phương pháp bảo toàn các điểm cực trội sao cho thu được sai số giảm bậc nhỏ sẽ được trình bày trong mục 2.3.1. Trong mục 2.3.2, tác giả sẽ đưa ra thuật toán chuyển hệ gốc về dạng tam giác với mục tiêu giảm độ phức tạp của thuật toán giảm bậc. Với hệ ở dạng tam giác, tác giả sẽ đưa ra khái niệm thước đo tính trội theo chuẩn H_∞ và mở rộng khái niệm tính trội bằng cách đưa ra khái niệm thước đo tính trội theo chuẩn H_2 và theo chuẩn hỗn hợp (kết hợp chuẩn H_∞ và H_2), đồng thời tác giả cũng đưa ra công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc dựa trên các thước đo tính trội trong mục 2.3.2. Trong mục 2.3.3, tác giả xây dựng thuật toán mới để sắp xếp các điểm cực theo thước đo tính trội H_∞ , H_2 và hỗn hợp trên đường chéo chính của ma trận tam giác trên $\mathbf{A}$ sao cho thu được sai số giảm bậc nhỏ và bảo toàn được các điểm cực trội. Các ví dụ minh họa tính đúng đắn và hiệu quả của thuật toán giảm bậc cho hệ ổn định sẽ được tác giả trình bày trong mục 2.4

Phần tiếp theo của chương 2, tác giả xây dựng và hoàn thiện thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định trong mục 2.5. Trong mục 2.5.1, tác giả xây dựng một thuật toán giảm bậc hệ không ổn định theo phương pháp gián tiếp là

phần mở rộng của thuật toán giảm bậc đã được tác giả xây dựng trong mục 2.3. Thuật toán giảm bậc hệ không ổn định theo phương pháp trực tiếp là phần mở rộng của thuật toán chặt cân bằng [90] cùng kết quả chứng minh sự đúng đắn của công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc sẽ được trình bày trong mục 2.5.2. Một ví dụ minh họa tính đúng đắn và hiệu quả của các thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định sẽ được tác giả trình bày trong mục 2.6.

2.2. Các công cụ toán học sử dụng trong các thuật toán giảm bậc mô hình

2.2.1. Phép phân tích ma trận

2.2.1.1. Phép phân tích giá trị suy biến (SVD)

Cho ma trận $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, với $n \leq m$. Khi đó tồn tại hai ma trận unita $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_n$, và $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{I}_m$, với $\mathbf{U}^*$, $\mathbf{V}^*$ là ma trận chuyển vị liên hợp của ma trận $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ (lấy chuyển vị của ma trận $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ rồi lấy liên hợp của các phần tử), sao cho:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

trong đó $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ là ma trận đường chéo, với $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ là căn bậc hai của giá trị riêng $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, $\mathbf{V}^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{V}$. Phép phân tích $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ được gọi là phép phân tích giá trị suy biến của ma trận $\mathbf{A}$ [6].

2.2.1.2. Phép phân tích Schur

Cho ma trận vuông $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Khi đó tồn tại ma trận unita $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{U}^*,$$

trong đó: $\mathbf{\Delta}$ là ma trận tam giác trên với các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$ nằm trên đường chéo chính của ma trận $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{U}^*$ là ma trận chuyển vị liên hợp của ma trận $\mathbf{U}$.

2.2.1.3. Phép phân tích Cholesky

Cho ma trận $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận xác định dương. Khi đó tồn tại một ma trận tam giác trên $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sao cho:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{R}^* \mathbf{R},}$$

Ma trận $\mathbf{R}$ còn được gọi là *thừa số cholesky* của $\mathbf{A}$.

2.2.2. Gramian điều khiển và quan sát của hệ tuyến tính

Xét một hệ tuyến tính, liên tục, tham số bất biến theo thời gian, ổn định tiệm cận như mô tả trong (1.1).

Do $\mathbf{A}$ là ma trận ổn định (tất cả các giá trị riêng của $\mathbf{A}$ đều có phần thực âm) và hệ mô tả bởi phương trình trong (1.1) có khả năng điều khiển và quan sát hoàn toàn. Khi đó Gramian đặc trưng cho khả năng điều khiển $\mathbf{P}$ và cho khả năng quan sát $\mathbf{Q}$ của hệ (1.1) được định nghĩa như sau [6]:

$$\boxed{\mathbf{P} := \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^* t} dt,} \quad (2.1)$$

$$\boxed{\mathbf{Q} := \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}^* t} dt,} \quad (2.2)$$

Gramian điều khiển $\mathbf{P}$ và Gramian quan sát $\mathbf{Q}$ thỏa mãn hai phương trình Lyapunov sau đây:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^* = -\mathbf{B} \mathbf{B}^* \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{C}^* \mathbf{C} \quad (2.4)$$

Gramian là đại lượng dùng để đo năng lượng điều khiển và năng lượng quan sát của hệ. Ý nghĩa vật lý của các Gramian được thể hiện trong tài liệu [6] như sau: Giả sử $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ là hai Gramian điều khiển và quan sát của hệ (1.1). Khi đó

(i) Năng lượng nhỏ nhất để điều khiển hệ từ trạng thái 0 tại thời điểm $t = 0$ tới trạng thái $\mathbf{x}_r$ tại thời điểm $t \rightarrow \infty$ là $\mathbf{x}_r^* \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_r$.

(ii) Năng lượng lớn nhất để quan sát trạng thái ban đầu $\mathbf{x}_0$ của hệ là $\mathbf{x}_0^* \mathbf{Q} \mathbf{x}_0$

Nhận xét: Tính chất (i) và (ii) của Gramian điều khiển và quan sát cho chúng ta biết biến trạng thái nào là khó điều khiển hoặc dễ điều khiển (cũng như khó quan sát hay dễ quan sát). Cụ thể, những biến trạng thái nằm trong vùng các vector riêng của $\mathbf{P}$ tương ứng với giá trị riêng lớn nhất sẽ là dễ điều khiển nhất vì chỉ cần năng lượng nhỏ để điều khiển những biến này. Tương tự, những biến trạng thái nằm trong vùng các vector riêng của $\mathbf{Q}$ tương ứng với giá trị riêng lớn nhất sẽ dễ quan sát nhất vì chỉ cần năng lượng nhỏ để quan sát những biến này.

Tính chất (ii) cho chúng ta ý tưởng về khái niệm cân bằng, tức là dùng một phép đổi biến để sắp xếp lại các biến trạng thái theo thứ tự dễ điều khiển/dễ quan sát đến khó điều khiển/khó quan sát. Nếu ta sử dụng một phép biến đổi $\mathbf{T}$ để đưa hệ $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ trong (1.1) về dạng tương đương $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T})$ thì các Gramian sẽ được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}} &= \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T}^* \\ \hat{\mathbf{Q}} &= (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}\end{aligned}$$

Khi này tích của hai Gramian mới $\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}$ là $\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}(\mathbf{P}\mathbf{Q})\mathbf{T}^{-1}$. Điều này đồng nghĩa rằng dù phép đổi biến $\mathbf{T}$ đã làm thay đổi các Gramian của hệ nhưng lại không làm thay đổi các giá trị riêng của tích các Gramian $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$. Cụ thể, theo tài liệu [6] ta có: Các giá trị riêng của tích các Gramian $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$ là dương và bất biến đối với các phép biến đổi không suy biến.

Ký hiệu $\{\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ là các giá trị riêng của tích $\mathbf{P}\mathbf{Q}$, với giả thiết $\sigma_1 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ thì theo [6] ta có: Tập các giá trị $\{\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ được gọi là các giá trị suy biến Hankel của hệ. Giá trị suy biến Hankel σ_i được coi là “năng lượng” của mỗi trạng thái của hệ.

2.3. Thuật toán giảm bậc mô hình mới cho hệ ổn định

Ma trận truyền của hệ (1.1) có dạng như sau:

$$\mathbf{G}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

Chuẩn H_2 của hệ $\mathbf{G}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ được định nghĩa như sau:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_2}^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}\{\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)\} d\omega.$$

Chuẩn H_2 của $\mathbf{G}(s)$ cũng có thể được tính toán dựa vào các Gramian của hệ thống [6] như sau:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_2}^2 = \text{trace}(\mathbf{B}^*\mathbf{Q}\mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^*), \quad (2.5)$$

trong đó $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ là các Gramian quan sát và điều khiển của hệ.

Chuẩn H_∞ của hệ $\mathbf{G}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ được định nghĩa như sau:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} := \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)), \quad (2.6)$$

trong đó $\sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega))$ là giá trị suy biến lớn nhất của $\mathbf{G}(j\omega)$.

2.3.1. Tính trội H_∞

Giả sử hệ (1.1) ổn định tiệm cận và có mô hình cực tiểu thì luôn luôn tồn tại một phép biến đổi không suy biến $\mathbf{x}_{\text{mod}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}_{\text{mod}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\mathbf{B}_{\text{mod}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_{\text{mod}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$ sao cho $(\mathbf{A}_{\text{mod}}, \mathbf{B}_{\text{mod}}, \mathbf{C}_{\text{mod}})$ có dạng sau:

$$\mathbf{A}_{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{mod}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{mod}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]. \quad (2.7)$$

Trong đó mỗi giá trị riêng λ_i của $\mathbf{A}_{\text{mod}}$ có dạng cấu trúc Jordan đơn giản. Quá trình trên được gọi là quá trình đường chéo hóa. Ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$ có thể phân tích thành tổng của các ma trận truyền đơn giản sau:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s) + \dots + \mathbf{G}_n(s), \quad (2.8)$$

trong đó $\mathbf{G}_i(s) := \mathbf{C}_i (s - \lambda_i)^{-1} \mathbf{B}_i$ với $i = 1, \dots, n$ là các ma trận truyền đơn giản. Dựa trên tính chất của chuẩn ma trận [30] thì chuẩn H_∞ của $\mathbf{G}(s)$ có thể được xác định dựa trên các ma trận truyền $\mathbf{G}_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ như sau:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} = \|\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s) + \dots + \mathbf{G}_n(s)\|_{H_\infty} \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{G}_i(s)\|_{H_\infty} = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i\|_2}{|\text{Re } \lambda_i|}, \quad (2.9)$$

trong đó $\|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i)$.

Vế bên phải của biểu thức (2.9) cho chúng ta biết rằng mỗi một điểm cực đóng góp một lượng $\frac{\|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i\|_2}{|\text{Re } \lambda_i|}$ vào chuẩn H_∞ của $\mathbf{G}(s)$. Trong lý thuyết điều khiển, điểm cực đóng góp nhiều có thể quan trọng hơn điểm cực đóng góp ít. Theo ý tưởng đó, trong tài liệu [67] đưa ra định nghĩa về điểm cực trội như sau: Cho hệ $\mathbf{G}(s)$ có dạng đường chéo như trong (2.7), điểm cực λ_i của $\mathbf{G}(s)$ được gọi là điểm cực trội nếu số hạng tương ứng của nó $R_i := \frac{\|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i\|_2}{|\text{Re } \lambda_i|}$ là giá trị lớn nhất so với các số hạng R_j ($j \neq i$) khác. Giá trị R_i được gọi là thước đo tính trội của điểm cực λ_i .

Bây giờ ta lại quay lại với kỹ thuật chặt (cắt ngắn) mô hình. Đối tượng của chặt mô hình được phân chia thành tập các giá trị riêng của $\mathbf{A}$, ... điểm cực của $\mathbf{G}(s)$ thành hai tập hợp: một tập sẽ được bỏ đi và tập còn lại được giữ trong hệ giảm bậc. Từ đó, chúng ta muốn giữ r giá trị riêng của $\mathbf{A}$ trong tập $\mathbf{A}_r = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}\}$ thì hệ thống giảm bậc thu được dựa trên chặt mô hình là

$$\mathbf{G}_{red}(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} \mathbf{G}_i(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} \mathbf{C}_i (s - \lambda_i)^{-1} \mathbf{B}_i.$$

Công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ của kỹ thuật chặt mô hình được cho bởi [67]

$$\|\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_{red}(s)\|_{H_\infty} \leq \sum_{\lambda_i \notin \Lambda_r} \frac{\|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|} = \sum_{\lambda_i \notin \Lambda_r} R_i. \quad (2.10)$$

Để thu được sai số giảm bậc nhỏ theo chuẩn H_∞ ta có thể loại bỏ các điểm cực có thước đo tính trội R_i giá trị nhỏ hoặc giữ các điểm cực có thước đo tính trội R_i giá trị lớn. Từ đó, tôi đưa ra một kỹ thuật chặt mô hình như sau:

Thuật toán 2.3.1. Thuật toán modal truncation

Giả sử ta có hệ tuyến tính, tham số bất biến theo thời gian như dạng (1.1), hệ ổn định tiệm cận và biểu diễn $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ở dạng tối thiểu.

Bước 1: Sử dụng chuyển đổi $\mathbf{T}$ để đưa hệ thống về dạng đường chéo $(\mathbf{A}_{mod}, \mathbf{B}_{mod}, \mathbf{C}_{mod})$ như (2.7).

Bước 2: Với mỗi một điểm cực λ_i , $i = 1, \dots, n$, ta tính thước đo tính trội R_i tương ứng. Sau đó, sắp xếp các thước đo tính trội theo độ lớn giảm dần

$$R_{i_1} \geq \dots \geq R_{i_r} \geq R_{i_{r+1}} \geq \dots \geq R_{i_n}.$$

Bước 3: Lựa chọn r điểm cực trội để giữ lại trong hệ giảm bậc: $\Lambda_r = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}\}$. Hệ giảm bậc có dạng như sau:

$$\mathbf{G}_{red}(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} \mathbf{G}_i(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} \mathbf{C}_i (s - \lambda_i)^{-1} \mathbf{B}_i.$$

2.3.2. Quá trình tam giác hóa

2.3.2.1. Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác

Thuật toán chặt mô hình theo thuật toán 2.3.1 (modal truncation) có nhược điểm là việc chuyển đổi ma trận $\mathbf{A}$ của hệ về dạng đường chéo có độ phức tạp tính toán cao, đặc biệt là khi bậc của hệ gốc lớn. Do đó, để giảm độ phức tạp của thuật toán, tác giả đề xuất đưa ma trận $\mathbf{A}$ của hệ (1.1) về dạng ma trận tam giác trên thay vì đưa về dạng đường chéo. Quá trình chuyển đổi này sẽ thu được các tính chất tương tự như quá trình đường chéo hóa là:

- (i) Ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$ có thể phân tích thành dạng tương tự như (2.8),
- (ii) Các điểm cực trội sẽ được định nghĩa như trong tài liệu [67],
- (iii) Công thức tính chặn trên của sai số có dạng tương tự như (2.10).

Nội dung cụ thể của thuật toán như sau:

Giả sử rằng hệ thống tuyến tính tham số bất biến theo thời gian trong (1.1) là hệ ổn định tiệm cận và ở dạng tối thiểu $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Thuật toán 2.3.2. Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác

Đầu vào: Hệ gốc $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ được mô tả như (1.1)

Bước 1: Phân tích Schur của ma trận $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$, trong đó $\mathbf{U}$ là ma trận unitary và $\mathbf{\Lambda}$ là ma trận tam giác trên.

Bước 2: Tính Gramian quan sát $\mathbf{Q}$ từ phương trình Lyapunov sau:

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} + (\mathbf{C}\mathbf{U})^T(\mathbf{C}\mathbf{U}) = 0 \quad (2.11)$$

Bước 3: Phân tích Cholesky của $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$, trong đó $\mathbf{R}$ là ma trận tam giác trên.

Bước 4: Tính ma trận không suy biến $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}$.

Bước 5 : Tính $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T})$.

Đầu ra: Hệ tương đương $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$.

Định nghĩa 1: Hệ thống tương đương $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ trong Thuật toán 2.3.2 được gọi là quá trình tam giác hóa.

Lý do để $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ được gọi là quá trình tam giác hóa là do ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$ có dạng ma trận tam giác trên, điều này được chứng minh trong bổ đề sau:

Bổ đề 1. Hệ thống tương đương $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ trong Thuật toán 2.3.2 có các tính chất sau:

(a) Ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$ có dạng tam giác trên,

(b) Gramian quan sát $\tilde{\mathbf{Q}}$, là nghiệm của phương trình Lyapunov sau:

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} = 0, \quad (2.12)$$

là ma trận đơn vị.

Chứng minh bổ đề 1:

(a) Đầu tiên, ta chứng minh $\tilde{\mathbf{A}}$ có dạng tam giác trên. Ta có:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = (\mathbf{R} \mathbf{U}^T) \mathbf{A} (\mathbf{U} \mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{R} \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}^{-1}.$$

Do đó $\tilde{\mathbf{A}}$ là tích của ba ma trận tam giác trên suy ra $\tilde{\mathbf{A}}$ có dạng ma trận tam giác trên.

(b) Tiếp theo, ta chứng minh Gramian quan sát mới $\tilde{\mathbf{Q}}$ là ma trận đơn vị. Thực tế, từ hai phương trình Lyapunov (2.11) và (2.12) ta có:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-T} (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}.$$

□

2.3.2.2. Phân tích dạng tam giác

Đặt $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ là dạng tam giác của ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$. Ta phân tích $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ thành dạng như sau:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \tilde{\mathbf{C}}_2].$$

Đặt $\mathbf{G}_1(s) := \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_1)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1$ và $\mathbf{G}_2(s) := \tilde{\mathbf{C}}_2 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_2)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2$ tương ứng là ma trận truyền của hai hệ con. Bằng cách sử dụng tính chất tam giác của ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$, ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$ có thể phân tích thành tổng của $\mathbf{G}_1(s)$ và $\mathbf{G}_2(s)$.

Bổ đề 2. Với cách ký hiệu như trên, ta thấy rằng

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{V}(s)\mathbf{G}_2(s),$$

trong đó $\mathbf{V}(s) := \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T$. Hơn nữa, $\mathbf{V}(s)$ có tính chất sau

$$\mathbf{V}^T(-s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}.$$

Để chứng minh bổ đề trên, ta viết hai phương trình Lyapunov $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}^* + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^* = 0$ và $\tilde{\mathbf{A}}^*\tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^*\tilde{\mathbf{C}} = 0$ dưới dạng khối, với lưu ý là $\tilde{\mathbf{P}}$ không có dạng đường chéo và $\tilde{\mathbf{Q}}$ là ma trận đơn vị, như sau:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11} & \tilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11} & \tilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{B}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{B}}_2\tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_2\tilde{\mathbf{B}}_2^T \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1^T\tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_1^T\tilde{\mathbf{C}}_2 \\ \tilde{\mathbf{C}}_2^T\tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_2^T\tilde{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Hệ hai phương trình trên tương đương với các phương trình sau:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{P}}_{11} + \tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{P}}_{12}^T + \tilde{\mathbf{P}}_{11}\tilde{\mathbf{A}}_{11}^T + \tilde{\mathbf{P}}_{12}\tilde{\mathbf{A}}_{12}^T + \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{B}}_1^T = 0, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{P}}_{12} + \tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{P}}_{22}^T + \tilde{\mathbf{P}}_{12}\tilde{\mathbf{A}}_{22}^T + \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{B}}_2^T = 0, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22} \tilde{\mathbf{P}}_{22} + \tilde{\mathbf{P}}_{22} \tilde{\mathbf{A}}_{22}^T + \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2^T = 0, \quad (2.15)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11}^* + \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_1 = 0, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12} + \tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_2 = 0, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22}^T + \tilde{\mathbf{A}}_{22} + \tilde{\mathbf{C}}_2^T \tilde{\mathbf{C}}_2 = 0. \quad (2.18)$$

Chứng minh bổ đề 2: Thực tế, $\mathbf{G}(s)$ có thể được viết ở dạng sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11} & -\tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} & (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{12} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{12}}_{-\tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_2} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2 + \tilde{\mathbf{C}}_2 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ &= \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1}_{\mathbf{G}_1(s)} - \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^* \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_2 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2}_{\mathbf{G}_2(s)} + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_2 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2}_{\mathbf{G}_2(s)} \\ &= \mathbf{G}_1(s) + \left[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T \right] \mathbf{G}_2(s) \\ &= \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{V}(s) \mathbf{G}_2(s), \end{aligned}$$

trong chuyển đổi ở trên, ta sử dụng $\tilde{\mathbf{A}}_{12} = -\tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_2$ như trong phương trình (2.17)

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng $\mathbf{V}^T(-s)\mathbf{V}(s) = \mathbf{I}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^T(-s)\mathbf{V}(s) &= \left[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T \right] \left[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T \right] \\
&= \left[\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T - \tilde{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_1}_{(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T) + (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})} (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T \right] \\
&= [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}_1(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T - \tilde{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T + \tilde{\mathbf{C}}_1(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T)^{-1} \{(-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T) + (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})\} \\
&\quad (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1^T] \\
&= \mathbf{I},
\end{aligned}$$

trong biến đổi ở trên, ta thay thế $\tilde{\mathbf{C}}_1^T \tilde{\mathbf{C}}_1 = (-s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11}^T) + (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})$ theo phương trình (2.16).

Tương tự như bổ đề 2, ta có thể phân tích $\mathbf{G}(s)$ thành tổng của rất nhiều ma trận truyền. Giả sử rằng hệ tương đương tam giác $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ có dạng sau:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_n \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{C}}_n]. \quad (2.19)$$

$$\text{Đặt } \mathbf{g}_i(s) := \frac{\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i}{s - \lambda_i}; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{và} \quad \mathbf{v}_i(s) := \mathbf{I} - \frac{\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{C}}_i^T}{s - \lambda_i}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Bổ đề 3. Với cách ký hiệu như trên, ta thấy rằng:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{g}_1(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{g}_2(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\mathbf{g}_3(s) + \dots + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\dots\mathbf{v}_{n-1}(s)\mathbf{g}_n(s). \quad (2.20)$$

với $\mathbf{v}_i(s)$ có tính chất

$$\mathbf{v}_i^T(-s)\mathbf{v}_i(s) = \mathbf{I}; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Chứng minh bổ đề 3: Bổ đề này có thể được chứng minh bằng cách áp dụng suy luận quy nạp của bổ đề 2. □

2.3.2.3. Phân tích chuẩn H_∞ và H_2 trong quá trình tam giác hóa

Nhận xét sau đây đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích chuẩn H_∞ và H_2 của hệ thống.

Nhận xét 1. Ma trận truyền $\mathbf{V}(s)$ trong bổ đề 2 và $\mathbf{v}_i(s)$; $i = 1, \dots, n-1$ trong bổ đề 3 tương ứng với tính chất được gọi là ma trận truyền “vượt qua tất cả” (“all-pass”), chi tiết trong [29]. Trong loại ma trận truyền này, số hạng của chuẩn H_∞ tương ứng với

$$\|\mathbf{V}(s)\|_{H_\infty} = 1,$$

và

$$\|\mathbf{v}_i(s)\|_{H_\infty} = 1; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Bổ đề 4. Giả sử rằng $\mathbf{G}(s)$ có dạng tam giác như trong (2.19). Thì

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_\infty} + \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_\infty} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty} \\ &= \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{B}}_1\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_1|} + \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_2|} + \dots + \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_n \tilde{\mathbf{B}}_n\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_n|}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Chứng minh bổ đề 4: Từ (2.20) và theo tính chất của chuẩn ma trận [30] ta có:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} &= \|\mathbf{g}_1(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{g}_2(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\mathbf{g}_3(s) + \dots + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\dots\mathbf{v}_{n-1}(s)\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty} \\ &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_\infty} + \|\mathbf{v}_1(s)\mathbf{g}_2(s)\|_{H_\infty} + \|\mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\mathbf{g}_3(s)\|_{H_\infty} + \dots + \|\mathbf{v}_1(s)\dots\mathbf{v}_{n-1}(s)\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty} \\ &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_\infty} + \underbrace{\|\mathbf{v}_1(s)\|_{H_\infty}}_{=1} \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_\infty} + \dots + \underbrace{\|\mathbf{v}_1(s)\|_{H_\infty}}_{=1} \dots \underbrace{\|\mathbf{v}_{n-1}(s)\|_{H_\infty}}_{=1} \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty} \\ &= \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_\infty} + \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_\infty} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ } \mathbf{g}_i(s) = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i}{s - \lambda_i} \text{ với } i = 1, \dots, n, \text{ ta có thể thấy rằng } \|\mathbf{g}_i(s)\|_{H_\infty} \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|} \text{ với}$$

$i = 1, \dots, n$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 5. Giả sử rằng $\mathbf{G}(s)$ có dạng tam giác như trong (2.19). Thì

$$\begin{aligned}\|\mathbf{G}(s)\|_{H_2} &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_2} + \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_2} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2} \\ &= \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_1)} + \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_2^T \tilde{\mathbf{B}}_2)} + \dots + \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_n^T \tilde{\mathbf{B}}_n)}. \quad (2.22)\end{aligned}$$

Chứng minh bổ đề 5: Từ (2.20) và theo tính chất của chuẩn ma trận [30] ta có

$$\begin{aligned}\|\mathbf{G}(s)\|_{H_2} &= \|\mathbf{g}_1(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{g}_2(s) + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\mathbf{g}_3(s) + \dots + \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\dots\mathbf{v}_{n-1}(s)\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2} \\ &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_2} + \|\mathbf{v}_1(s)\mathbf{g}_2(s)\|_{H_2} + \|\mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s)\mathbf{g}_3(s)\|_{H_2} + \dots + \|\mathbf{v}_1(s)\dots\mathbf{v}_{n-1}(s)\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2} \\ &\leq \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_2} + \underbrace{\|\mathbf{v}_1(s)\|_{H_2}}_{=1} \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_2} + \dots + \underbrace{\|\mathbf{v}_1(s)\|_{H_2}}_{=1} \dots \underbrace{\|\mathbf{v}_{n-1}(s)\|_{H_2}}_{=1} \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2} \\ &= \|\mathbf{g}_1(s)\|_{H_2} + \|\mathbf{g}_2(s)\|_{H_2} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2}.\end{aligned}$$

Có thể thấy rằng Gramian quan sát của ma trận truyền $\mathbf{g}_i(s) = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i}{s - \lambda_i}$ là ma

trận đơn vị với $i=1, \dots, n$, do đó $\|\mathbf{g}_i(s)\|_{H_2} = \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)}$ với $i=1, \dots, n$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Tổng quát ta thấy về bên phải của biểu thức (2.21) và (2.22) cho chúng ta biết đóng góp của mỗi điểm cực vào chuẩn H_∞ và H_2 của $\mathbf{G}(s)$. Điều này dẫn đến định nghĩa về điểm cực trội trong dạng tam giác như sau:

Định nghĩa 2. (Chỉ số trội H_∞ và H_2) Cho hệ thống $\mathbf{G}(s)$ có dạng tam giác như trong (2.19), điểm cực λ_i của $\mathbf{G}(s)$ được gọi là trội H_∞ nếu thông số tương

ứng của nó $R_i := \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i\|_2}{|\text{Re } \lambda_i|}$ là giá trị lớn nhất so với các giá trị $R_j, j \neq i$. Thông số

R_i được gọi là chỉ số trội H_∞ của điểm cực λ_i . Tương ứng, điểm cực điểm cực λ_i của $\mathbf{G}(s)$ được gọi là trội H_2 nếu thông số tương ứng của nó

$S_i := \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)}$ là giá trị lớn nhất so với các giá trị $S_j, j \neq i$. Thông số

S_i được gọi là chỉ số trội H_2 của điểm cực λ_i .

Bên cạnh chỉ số trội trội H_∞ và H_2 ta cũng định nghĩa một loại chỉ số trội mới như sau:

Định nghĩa 3. (Chỉ số trội hỗn hợp) Chỉ số $J_i := \max\{R_i, S_i\}$ được gọi là chỉ số trội hỗn hợp tương ứng với điểm cực λ_i , với $i=1, \dots, n$.

Vai trò của chỉ số trội trội H_∞ và H_2 và chỉ số trội hỗn hợp trong giảm bậc mô hình sẽ được làm rõ trong nội dung tiếp theo.

2.3.3. Giảm bậc mô hình dựa trên cắt ngắn tam giác

2.3.3.1. Phân tích chặn trên của sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ và H_2

Giả sử rằng $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ là dạng tam giác của ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$ và được phân chia thành dạng sau:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \tilde{\mathbf{C}}_2].$$

Nếu ta đặt $\mathbf{G}_1(s) = \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1$ như là mô hình giảm bậc của $\mathbf{G}(s)$ thì sai số giảm bậc được xác định như sau:

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_1(s).$$

Dựa trên kết quả của việc phân tích tam giác trong bổ đề 2, ta sẽ ước lượng sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ và H_2 . Các chỉ số trội sẽ đóng vai trò quan trọng trong những bước ước tính đó.

Định lý 1. Sai số giảm bậc của hệ thỏa mãn các tính chất sau:

$$(a) \quad \|\mathbf{E}(s)\|_{H_\infty} \leq \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty} \leq R_{r+1} + \dots + R_n,$$

$$(b) \quad \|\mathbf{E}(s)\|_{H_2} \leq \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2} \leq S_{r+1} + \dots + S_n,$$

$$(c) \quad \max \left\{ \|\mathbf{E}(s)\|_{H_\infty}, \|\mathbf{E}(s)\|_{H_2} \right\} \leq \max \left\{ \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty}, \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2} \right\} \leq J_{r+1} + \dots + J_n,$$

trong đó $\mathbf{G}_2(s) = \tilde{\mathbf{C}}_2 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_2$ là hệ con của $\mathbf{G}(s)$ và R_i, S_i, J_i tương ứng là chỉ số trội H_∞, H_2 và hỗn hợp của điểm cực λ_i , với $i=1, \dots, n$.

Chứng minh định lý 1: Theo bổ đề 2 ta có:

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_1(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{G}_2(s).$$

Do đó

$$\|\mathbf{E}(s)\|_{H_\infty} = \|\mathbf{V}(s)\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty} \leq \underbrace{\|\mathbf{V}(s)\|_{H_\infty}}_{=1} \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty} = \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty},$$

và

$$\|\mathbf{E}(s)\|_{H_2} = \|\mathbf{V}(s)\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2} \leq \underbrace{\|\mathbf{V}(s)\|_{H_2}}_{=1} \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2} = \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2}.$$

Kết quả tính toán ở trên cho ta thấy sai số giảm bậc mô hình của hệ theo chuẩn H_∞, H_2 được giới hạn bởi hệ con $\mathbf{G}_2(s)$.

Bây giờ chung ta sẽ tính toán chuẩn H_∞ và H_2 của hệ con $\mathbf{G}_2(s)$. Từ $\mathbf{G}_2(s)$ là hệ con của $\mathbf{G}(s)$ nên nó cũng có dạng tam giác như sau:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{22} = \begin{bmatrix} \lambda_{r+1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_n \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}}_2 = [\tilde{\mathbf{C}}_{r+1} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{C}}_n].$$

Do đó, kết quả của phần 2.3.2.2 có thể áp dụng cho $\mathbf{G}_2(s)$. Tương tự như bổ đề 4 và bổ đề 5 ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_\infty} &\leq \|\mathbf{g}_{r+1}(s)\|_{H_\infty} + \|\mathbf{g}_{r+2}(s)\|_{H_\infty} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_\infty} \\ &= \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_{r+1} \tilde{\mathbf{B}}_{r+1}\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_{r+1}|} + \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_{r+2} \tilde{\mathbf{B}}_{r+2}\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_{r+2}|} + \dots + \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_n \tilde{\mathbf{B}}_n\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_n|} \\ &= R_{r+1} + \dots + R_n, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{G}_2(s)\|_{H_2} &\leq \|\mathbf{g}_{r+1}(s)\|_{H_2} + \|\mathbf{g}_{r+2}(s)\|_{H_2} + \dots + \|\mathbf{g}_n(s)\|_{H_2} \\
&= \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_{r+1}^T \tilde{\mathbf{B}}_{r+1})} + \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_{r+2}^T \tilde{\mathbf{B}}_{r+2})} + \dots + \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_n^T \tilde{\mathbf{B}}_n)} \\
&= S_{r+1} + \dots + S_n
\end{aligned}$$

Cuối cùng tính chất trong phần (c) là kết quả của phần (a) và (b). Định lý đã được chứng minh. $\square$

2.3.3.2. Sắp xếp điểm cực theo các chỉ số trội

Hệ giảm bậc $\mathbf{G}_1(s) = \tilde{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1$ giữ lại một phần điểm cực của hệ thống gốc, tức là $\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_{11}) \subset \lambda(\tilde{\mathbf{A}})$. Từ đây một câu hỏi đặt ra là các điểm cực nên được giữ lại như thế nào để có được sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ và H_2 là nhỏ nhất? Định lý 1 đã cho ta biết rằng ta nên giữ trong $\mathbf{G}_1(s)$ các điểm cực có chỉ số trội H_∞ , H_2 và hỗn hợp lớn nhất để có được sai số nhỏ.

Tuy nhiên, để các điểm cực trong $\mathbf{G}_1(s)$ nằm ở vị trí đầu trên đường chéo của ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$, ta cần phải sắp xếp lại vị trí các điểm cực trên đường chéo của ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$. Quá trình này có thể thực hiện bằng thuật toán sau

Thuật toán 2.3.3. (Sắp xếp lại điểm cực theo chỉ số trội H_∞ , H_2 và hỗn hợp)

Đầu vào: Hệ $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ là dạng tam giác của ma trận truyền $\mathbf{G}(s)$ và cũng là đầu ra của thuật toán 2.3.2.

Bước 1: Với mỗi điểm λ_i , với $i = 1, \dots, n$ ta tính toán chỉ số trội H_∞ tương ứng

$$R_i = \frac{\|\tilde{\mathbf{C}}_i \tilde{\mathbf{B}}_i\|_2}{|\text{Re } \lambda_i|} \quad (\text{hoặc chỉ số trội } H_2 \text{ tương ứng } S_i = \sqrt{\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)}), \text{ hoặc chỉ số trội}$$

hỗn hợp tương ứng $J_i = \max\{R_i, S_i\}$).

Bước 2: Chọn chỉ số trội H_∞ lớn nhất R_{i_1} (tương tự với chỉ số trội H_2 và hỗn hợp).

Bước 3: Sắp xếp lại điểm cực λ_i (và liên hợp của nó $\bar{\lambda}_i$, nếu cần thiết) thành vị trí đầu tiên trên đường chéo của ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$ bằng ma trận đơn nhất (unitary matrix) $\mathbf{U}_1$:

$$\mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & * & * & * \\ & \bar{\lambda}_i & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Thuật toán sắp xếp lại giá trị riêng theo phân tích Schur liên quan đến tài liệu [41, 42]. Trong Matlab để thực hiện sắp xếp lại giá trị riêng theo phân tích Schur ta dùng lệnh *ordschur*.

Bước 4: Tính hệ thống tương đương mới $(\mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{U}_1)$.

Bước 5: Bỏ đi hai hàng và cột đầu tiên của $(\mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^T \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{U}_1)$ ta thu được một hệ thống nhỏ $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ với kích cỡ $n - 2$.

Bước 6: Lặp lại quá trình trên từ bước 1 đến 5 cho hệ thống nhỏ $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ và tiếp tục vòng lặp cho đến khi tất cả các điểm cực được sắp xếp lại theo độ lớn của chỉ số trội H_∞ , chỉ số trội H_2 hoặc chỉ số trội hỗn hợp.

Đầu ra: Hệ thống đã được sắp xếp các điểm cực theo chỉ số trội H_∞ hoặc H_2 hoặc hỗn hợp $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$.

Trong thực tế, thay vì sắp xếp lại tất cả các điểm cực chúng ta chỉ cần sắp xếp lại r điểm cực đầu tiên. Mỗi khi các điểm cực được sắp xếp lại, ta chặt mô hình theo kỹ thuật chặt mô hình sẽ có được hệ giảm bậc.

2.3.3.3 Rút gọn hệ tương đương

Thuật toán 2.3.4. Rút gọn hệ tương đương

Đầu vào: Hệ tương đương $(\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}})$ thu được từ *Thuật toán 2.3.3*.

Bước 1: Chọn số bậc cần rút gọn r sao cho $r < n$.

Bước 2: Biểu diễn $(\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}})$ ở dạng khối nhau sau:

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{A}}_{11} & \check{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \check{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{B}}_1 \\ \check{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{C}} = [\check{\mathbf{C}}_1 \quad \check{\mathbf{C}}_2],$$

trong đó $\check{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\check{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $\check{\mathbf{C}}_1 \in \mathbb{R}^{q \times r}$.

Đầu ra: Hệ rút gọn $(\check{\mathbf{A}}_{11}, \check{\mathbf{B}}_1, \check{\mathbf{C}}_1)$.

2.4. Ví dụ giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao

Để minh chứng hiệu quả và tính đúng đắn của thuật toán giảm bậc mô hình đã được đề xuất trong mục 2.3, tác giả áp dụng thuật toán giảm bậc mô hình mới để giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao, cụ thể qua hai ví dụ sau:

2.4.1. Ví dụ minh họa 1

Xét mô hình bộ lọc số bậc cao trong tài liệu [87] được định nghĩa trong miền s như sau:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{-0.1242s^5 - 0.4629s^4 - 0.0823s^3 + 1.504s^2 + 1.959s + 1.401}{s^6 + 4.905s^5 + 10.82s^4 + 13.13s^3 + 9.533s^2 + 3.834s + 0.9407}$$

Thực hiện giảm bậc mô hình bậc 6 ở trên theo các thuật toán trong mục 2.3, kết quả thu được như sau:

Thuật toán 2.3.2: Đưa hệ về dạng tam giác

-Bước 1: Tính phân tích Schur của ma trận $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$,

$$U = \begin{bmatrix} 0.4051 & -0.1397 & -0.4605 & -0.5597 & 0.3768 & 0.3861 \\ -0.5301 & 0.5318 & 0.2857 & -0.2347 & 0.4528 & 0.3073 \\ -0.0950 & -0.7287 & 0.4233 & 0.1836 & 0.4762 & 0.1422 \\ 0.5132 & 0.3842 & -0.0079 & 0.5496 & 0.5217 & -0.1212 \\ -0.5232 & -0.1377 & -0.6909 & 0.2218 & 0.3026 & -0.2987 \\ 0.0932 & 0.0005 & 0.2232 & -0.4967 & 0.2499 & -0.7952 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1.4123 & -0.3626 & 1.5433 & 2.0768 & -2.8265 & -1.6784 \\ 1.6391 & -1.4123 & -1.3757 & -1.2101 & 0.9149 & 0.7659 \\ 0 & 0 & -0.7934 & -2.3819 & 2.6491 & 1.8253 \\ 0 & 0 & 0.2794 & -0.7934 & 2.8050 & 1.1245 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2468 & 0.1453 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5119 & -0.2468 \end{bmatrix}.$$

- Bước 2+ Bước 3: Phân tích Cholesky của Gramian quan sát $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.0261 & -0.0017 & 0.0141 & -0.0597 & 0.5632 & -0.6803 \\ 0 & 0.0032 & -0.0146 & 0.0271 & -1.2493 & 0.4428 \\ 0 & 0 & 0.0040 & 0.0026 & -1.1092 & -0.0796 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0271 & -1.3083 & 0.1971 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6786 & 0.1102 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2262 \end{bmatrix}.$$

- Bước 4: Tính ma trận không suy biến $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}$

$$\mathbf{T} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.0155 & -0.0352 & -0.2998 & 0.0774 & -0.4178 & 0.1478 \\ -0.0203 & 0.1550 & 0.7119 & -0.2763 & 0.9337 & -0.3265 \\ -0.0036 & -0.2295 & -0.7219 & 0.2972 & -1.0258 & 0.4256 \\ 0.0196 & 0.1306 & 0.4075 & -0.1061 & 0.6865 & -0.2957 \\ -0.0200 & -0.0539 & -0.3008 & 0.0469 & -0.4834 & 0.1328 \\ 0.0036 & 0.0021 & 0.0512 & -0.0175 & 0.0513 & 0.0114 \end{bmatrix}.$$

Bước 5: Tính $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T})$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1.5218 & -3.0171 & -1.9266 & 2.4388 & -1.7309 & 0.0907 \\ 0.2010 & -1.3028 & -1.7826 & 2.2565 & -1.6015 & 0.0839 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.6098 & -0.3661 & -1.0957 & 0.0574 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.9099 & -0.9771 & 1.3869 & -0.0727 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4922 & 0.5555 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.5039 & -0.0014 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0.0127 \\ -0.3086 \\ -0.4520 \\ -0.4320 \\ 0.2982 \\ 0.0873 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [1.7446 \quad 1.6142 \quad 1.1043 \quad -1.3979 \quad 0.9921 \quad -0.0520].$$

Thuật toán 2.3.3. Thuật toán sắp xếp lại điểm cực theo chỉ số trội H_2

- Hệ tương đương $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.2468 & -0.7765 & 1.1807 & -1.1807 & 0.8850 & 0.8850 \\ 0.2829 & -0.2468 & 1.1807 & -1.1807 & 0.8850 & 0.8850 \\ -0.0000 & 0.0000 & -1.4123 & -0.1967 & -2.1171 & -2.1171 \\ -0.0000 & 0.0000 & 3.0213 & -1.4123 & 2.1171 & 2.1171 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.7934 & 0.3446 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -1.9314 & -0.7934 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0.3229 \\ 0.6858 \\ -0.0271 \\ -0.0786 \\ -0.0008 \\ 0.0360 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [-0.7025 \quad -0.7025 \quad 1.6807 \quad -1.6807 \quad 1.2597 \quad 1.2597].$$

- Kết quả giảm bậc được cho trong bảng 2.1 như sau:

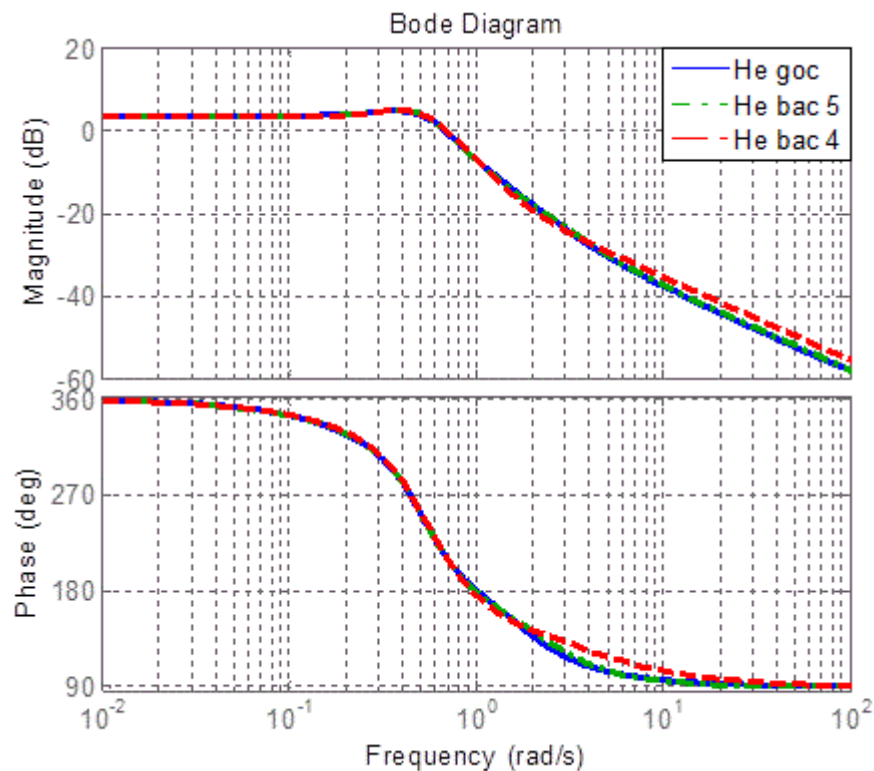
Bảng 2.1. Kết quả giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao

Bậc	Hệ giảm bậc $G_r(s)$	Sai số $\ G(s) - G_r(s)\ _{H_2}$
5	$\frac{-0.1258s^4 - 0.51s^3 + 0.3043s^2 + 1.413s + 1.698}{s^5 + 4.903s^4 + 9.523s^3 + 8.828s^2 + 4.008s + 1.151}$	0.0145
4	$\frac{-0.1685s^3 - 0.1015s^2 + 0.2835s + 1.052}{s^4 + 3.318s^3 + 4.263s^2 + 2.07s + 0.7264}$	0.0360

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 3, 4, 5 (*hinf_MK.m*,
htwo_MK.m, *Mixed_MK.m*)

Lưu ý: Tác giả sẽ gọi hệ giảm bậc (bậc r) là hệ bậc r .

Để đánh giá rõ hơn kết quả giảm bậc hệ gốc bậc cao, tác giả sử dụng đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc như hình 2.1 sau đây:



Hình 2.1. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc

Nhận xét: Từ kết quả giảm bậc, sai số giảm bậc và đồ thị hàm bode của hệ gốc và hệ giảm bậc ta thấy:

- Sai số giảm bậc của hệ bậc 5 nhỏ hơn sai số giảm bậc của hệ bậc 4.
- Đồ thị bode của hệ bậc 5 gần như trùng khít với đồ thị bode của hệ gốc bậc 6; Đồ thị bode của hệ bậc 4 có sai lệch nhỏ với đồ thị bode của hệ gốc bậc 6 ở vùng tần cao (từ tần số $> 5,4$ rad/s).

Như vậy, tùy thuộc vào yêu cầu sai số giảm bậc và phạm vi ứng dụng của mô hình giảm bậc trong bài toán giảm bậc bộ lọc số mà ta có thể lựa chọn mô hình giảm bậc tương ứng thay thế cho mô hình gốc. Cụ thể là nếu muốn sai số giảm bậc nhỏ và chấp nhận có sai lệch đồ thị bode so với hệ gốc nhỏ thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 4 thay thế cho hệ gốc. Nếu muốn sai số giảm bậc nhỏ nhất và sai lệch đồ thị bode so với hệ gốc nhỏ nhất có thể thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 5 thay cho hệ gốc. Kết quả trên chứng tỏ thuật toán giảm bậc mới có khả năng giảm bậc được cho mô hình tuyến tính ổn định bậc cao.

2.4.2. Ví dụ minh họa 2

Xét mô hình SISO CD player với bậc $n = 120$ trong tài liệu [67], mô hình này thường được sử dụng để kiểm chứng hiệu quả và tính đúng đắn của các thuật toán giảm bậc.

Thực hiện giảm bậc mô hình CD player bằng thuật toán mới và bằng thuật toán modal truncation (thuật toán 2.3.1 trong mục 2.3), kết quả giảm bậc được thể hiện trong bảng 2.2 và bảng 2.3 như sau:

Bảng 2.2. Kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞

Bậc (r)	Giảm bậc theo modal truncation	Giảm bậc theo chỉ số trội H_∞	Giảm bậc theo chỉ số trội H_2	Giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp
6	0.8506	0.8456	0.8456	0.8456

12	0.1780	0.1372	0.2118	0.1372
16	0.1138	0.0383	0.1165	0.1098
20	0.0466	0.0315	0.0946	0.0311
24	0.0405	0.0112	0.0111	0.0111
30	0.0110	0.0033	0.0090	0.0033
40	0.0038	0.0032	0.0092	0.0015
50	$4.0861 \cdot 10^{-4}$	$3.8326 \cdot 10^{-4}$	0.0092	$2.8109 \cdot 10^{-4}$
60	$9.3818 \cdot 10^{-5}$	$4.5397 \cdot 10^{-5}$	$4.4522 \cdot 10^{-5}$	$4.4522 \cdot 10^{-5}$

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 3, 4, 5 (*hinf_MK.m*,
htwo_MK.m, *Mixed_MK.m*)

Nhận xét: So sánh kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ giữa các phương pháp giảm bậc ta thấy:

+ Phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ có kết quả sai số giảm bậc nhỏ hơn phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 ;

+ Trong các trường hợp $r = 12, 30$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp và phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ có kết quả sai số giảm bậc giống nhau.

+ Trong các trường hợp $r = 24, 60$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp và phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 có kết quả sai số giảm bậc giống nhau.

+ Trong các trường hợp $r = 20$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp có kết quả sai số giảm bậc nhỏ hơn sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 nhưng lớn hơn sai số sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ .

+ Trong các trường hợp $r = 16, 40, 50$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp có kết quả giảm nhỏ nhất so với sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ và H_2 .

+ Trong hầu hết các trường hợp giảm bậc thì sai số giảm bậc theo thuật toán mới đều nhỏ hơn sai số giảm bậc theo phương pháp modal truncation.

Bảng 2.3. Kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_2

Bậc (r)	Giảm bậc theo modal truncation	Giảm bậc theo chỉ số trội H_∞	Giảm bậc theo chỉ số trội H_2	Giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp
6	2.9892	2.8227	2.8227	2.8227
12	1.3162	1.1741	1.1275	1.1741
16	1.2307	1.0508	0.5994	0.6743
20	0.9906	0.5783	0.3060	0.4750
24	0.4562	0.3193	0.1219	0.1219
30	0.1311	0.0860	0.0690	0.0861
40	0.0643	0.0477	0.0119	0.0126
50	0.0100	0.0108	0.0071	0.0040
60	0.0015	0.0016	0.0013	0.0013

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 3, 4, 5 (*hinf_MK.m*,

htwo_MK.m, Mixed_MK.m)

Nhận xét: So sánh kết quả sai số giảm bậc theo chuẩn H_2 giữa các phương pháp giảm bậc ta thấy:

+ Phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 cho kết quả giảm bậc có sai số nhỏ hơn phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ .

+ Trong các trường hợp $r = 12, 60$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp và phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ có kết quả sai số giảm bậc giống nhau.

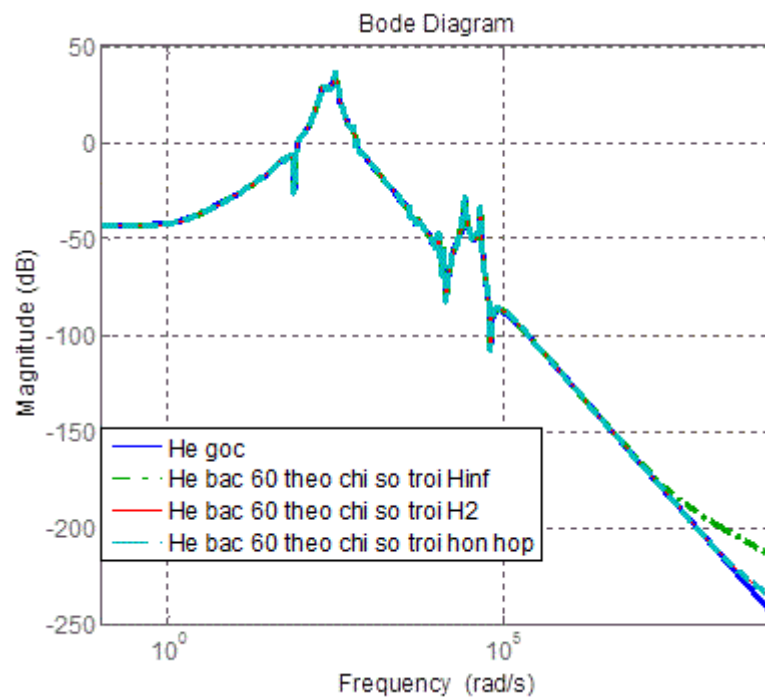
+ Trong các trường hợp $r = 24$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp và phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 có kết quả sai số giảm bậc giống nhau.

+ Trong các trường hợp $r = 16, 20, 30, 40$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp có kết quả sai số giảm bậc nhỏ hơn sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ nhưng lớn hơn sai số sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_2 .

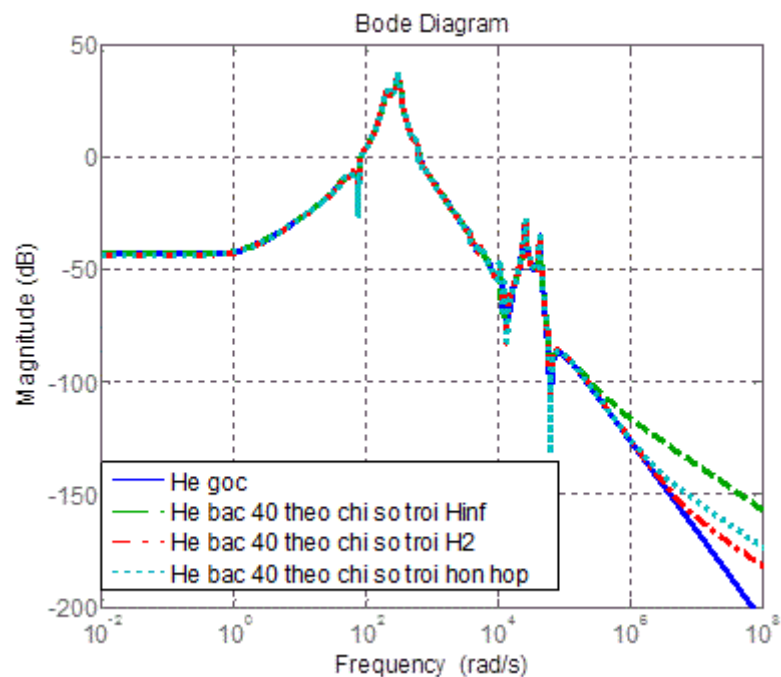
+ Trong các trường hợp $r = 50$, phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp có kết quả sai số giảm bậc nhỏ nhất so với sai số giảm bậc của phương pháp giảm bậc theo chỉ số trội H_∞ và H_2 ;

+ Trong hầu hết các trường hợp giảm bậc thì sai số giảm bậc theo thuật toán mới đều nhỏ hơn sai số giảm bậc theo phương pháp modal truncation.

Để đánh giá rõ hơn kết quả giảm bậc hệ gốc bậc cao, tác giả sử dụng đồ thị bode của hệ gốc và một số hệ giảm bậc như hình 2.2, hình 2.3 sau đây:



Hình 2.2. Đồ thị bode của hệ gốc và hệ bậc 60



Hình 2.3. Đồ thị bode của hệ gốc và hệ bậc 40

Nhận xét: Từ đồ thị 2.2 ta thấy: đồ thị bode của hệ bậc 60 theo chỉ số trội H_2 và đồ thị bode của hệ bậc 60 theo chỉ số trội hỗn hợp là trùng nhau. Đồ thị bode của hệ bậc 60 theo chỉ số trội H_∞ sai lệch so với đồ thị bode của hệ gốc vùng tần số lớn hơn 2.67×10^7 rad/s, trong khi đồ thị bode của hệ bậc 60 theo chỉ số trội H_2

và chỉ số trội hỗn hợp sai lệch so với đồ thị bode của hệ gốc vùng tần số lớn hơn 3.61×10^8 rad/s. Kết quả đồ thị bode giống với kết quả sai số giảm bậc trên bảng 2.2 và bảng 2.3.

Từ đồ thị 2.3 ta thấy: đồ thị bode của hệ bậc 40 theo chỉ số trội H_2 có sai lệch với đồ thị bode của hệ gốc từ vùng tần số lớn hơn 2.4×10^6 rad/s. Đồ thị bode của hệ bậc 60 theo chỉ số trội hỗn hợp có sai lệch so với đồ thị bode của hệ gốc từ vùng tần số 1.51×10^6 rad/s. Đồ thị bode của hệ bậc 40 theo chỉ số trội H_∞ sai lệch so với đồ thị bode của hệ gốc vùng tần số lớn hơn 1.37×10^5 rad/s. Trong vùng tần số lớn hơn 1.37×10^5 rad/s thì đồ thị bode của hệ bậc 40 theo chỉ số trội hỗn hợp nằm giữa đồ thị bode của hệ bậc 40 theo chỉ số trội H_2 và theo chỉ số trội H_∞ . Kết quả đồ thị bode giống với kết quả sai số giảm bậc trên bảng 2.2 và bảng 2.3.

Như vậy, tùy thuộc vào yêu cầu sai số giảm bậc và phạm vi ứng dụng của mô hình giảm bậc CD player trong bài toán cụ thể mà ta có thể lựa chọn mô hình giảm bậc tương ứng thay thế cho mô hình CD player gốc, kết quả này chứng tỏ thuật toán giảm bậc mới có khả năng giảm bậc được cho mô hình tuyến tính ổn định bậc cao.

2.5. Thuật toán giảm bậc mới cho hệ không ổn định

Để thực hiện giảm bậc cho hệ không ổn định thì tác giả xây dựng và hoàn thiện 2 thuật toán giảm bậc theo 2 cách tiếp cận cơ bản:

Cách tiếp cận thứ nhất: (Phương pháp gián tiếp) Phân tách hệ không ổn định $G(s)$ thành hai phần: $G(s) = G^+(s) + G^-(s)$, trong đó $G^+(s)$ là phân hệ không ổn định và $G^-(s)$ là phân hệ ổn định. Sau đó thực hiện giảm bậc phân hệ ổn định $G^-(s)$ thu được hệ rút gọn ổn định $\hat{G}^-(s)$, kết quả giảm bậc của hệ không ổn định $G(s)$ sẽ là $\hat{G}(s) = \hat{G}^-(s) + G^+(s)$ [42].

Cách tiếp cận thứ hai: (Phương pháp giảm bậc trực tiếp) Hoàn thiện thuật toán chặt cân bằng mở rộng được đề xuất trong tài liệu [90] để thuật toán có thể thực hiện giảm bậc tự động dựa trên công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc.

2.5.1. Thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp gián tiếp (Cách tiếp cận thứ nhất)

Phần nội dung sau đây sẽ trình bày chi tiết nội dung của phương pháp giảm bậc mới cho hệ không ổn định thực hiện theo cách tiếp cận thứ nhất trên cơ sở thuật toán giảm bậc cho hệ ổn định đã được tác giả xây dựng trong mục 2.3.

Thuật toán 2.5.1. Thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp gián tiếp.

Đầu vào: Hệ (A, B, C) được mô tả trong (1.1) (hệ không ổn định).

Bước 1: Chuyển hệ thống về dạng tựa tam giác ta thu được hệ thống có dạng:

$$A_t = \begin{bmatrix} A_{t11} & A_{t12} \\ 0 & A_{t22} \end{bmatrix}, B_t = \begin{bmatrix} B_{t1} \\ B_{t2} \end{bmatrix}, C_t = [C_{t1} \quad C_{t2}],$$

với $A_{t11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (với m là các điểm cực ổn định), $A_{t12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $A_{t22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $B_{t1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B_{t2} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times p}$, $C_{t1} \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $C_{t2} \in \mathbb{R}^{q \times (n-m)}$.

Bước 2: Tính S từ phương trình Lyapunov sau:

$$A_{t11}S - SA_{t22} + A_{t12} = 0.$$

Bước 3: Xác định ma trận chuyển trạng thái

$$W = \begin{bmatrix} I_r & . & S \\ \dots & . & \dots \\ 0 & . & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

với $\mathbf{I}_m$ và $\mathbf{I}_{n-m}$ tương ứng là ma trận đơn vị kích thước $m \times m$ và $(n-m) \times (n-m)$.

Bước 4: Tính $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d) = (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_t\mathbf{W}, \mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t\mathbf{W})$.

Bước 5: Phân tách hệ $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$ về dạng:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{d22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{d1} \\ \mathbf{B}_{d2} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = [\mathbf{C}_{d1} \quad \mathbf{C}_{d2}],$$

với $\mathbf{A}_{d11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{A}_{d22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$

$\mathbf{B}_{d1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{B}_{d2} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times p}$, $\mathbf{C}_{d1} \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $\mathbf{C}_{d2} \in \mathbb{R}^{q \times (n-m)}$,

Hệ ổn định $(\mathbf{A}_{d11}, \mathbf{B}_{d1}, \mathbf{C}_{d1})$,

Hệ không ổn định $(\mathbf{A}_{d22}, \mathbf{B}_{d2}, \mathbf{C}_{d2})$.

Bước 6: Giảm bậc hệ ổn định $(\mathbf{A}_{d11}, \mathbf{B}_{d1}, \mathbf{C}_{d1})$ theo thuật toán 2.3.2, 2.3.3 và 2.3.4 thu được hệ rút gọn $(\check{\mathbf{A}}_1, \check{\mathbf{B}}_1, \check{\mathbf{C}}_1)$.

Đầu ra: Hệ rút gọn $((\check{\mathbf{A}}_1, \check{\mathbf{B}}_1, \check{\mathbf{C}}_1) + (\mathbf{A}_{d22}, \mathbf{B}_{d2}, \mathbf{C}_{d2}))$.

Chi tiết thuật toán 2.5.1 đã được công bố trong bài báo số 1 và số 2 của tác giả.

2.5.2. Thuật toán giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp trực tiếp (Cách tiếp cận thứ hai)

Ý tưởng của thuật toán chặt cân bằng mở rộng được đề xuất trong tài liệu [90] là thực hiện phép chiếu (dịch chuyển gốc tọa độ) để chuyển hệ gốc không ổn định về dạng ổn định, sau đó thực hiện giảm bậc hệ ổn định theo thuật toán chặt cân bằng thu được hệ giảm bậc ổn định. Cuối cùng, thuật toán thực hiện phép chiếu ngược (dịch chuyển gốc tọa độ ngược) để chuyển hệ giảm bậc ổn định về dạng không ổn định giống hệ gốc ban đầu.

Ma trận truyền của hệ (1.1) có dạng như sau:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

Định nghĩa 4. Hệ thống (1.1) được gọi là ổn định - β nếu phần thực của các điểm cực hệ $\text{real}(\lambda(\mathbf{A})) < \beta$, $\beta \geq 0$. Tập hợp các hệ liên tục ổn định - β được ký hiệu là $\mathbb{C}_\beta$. Chuẩn $H_{\infty, \beta}$ của $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}_\beta$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(s)\|_{H_{\infty, \beta}} &:= \sup_{\text{real}(\lambda(\mathbf{A})) < \beta} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(s)) \\ &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(\beta + j\omega)) \end{aligned}$$

Trong đó $\sigma_{\max}(\mathbf{G}(s))$ là giá trị suy biến lớn nhất của $\mathbf{G}(s)$.

Trong trường hợp $\beta = 0$ thì hệ (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận như định nghĩa gốc [6]. Ma trận $\mathbf{A}$ trong trường hợp này là ma trận Hurwitz, ..., $\text{real}(\lambda(\mathbf{A})) < 0$, và chuẩn $H_{\infty, \beta}$ của $\mathbf{G}(s)$ trùng với chuẩn H_∞ của $\mathbf{G}(s)$ như định nghĩa gốc là:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_{\infty, 0}} = \|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)).$$

Định lý 2: Cho bất kỳ hệ liên tục $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}_\beta$ được biểu diễn bởi hệ phương trình (1.1), ta xem xét hệ $\mathbf{G}_\beta(s)$ với chuyển đổi $(\mathbf{A}_\beta, \mathbf{B}_\beta, \mathbf{C}_\beta) = (\mathbf{A} - \beta\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. Thì hệ $\mathbf{G}_\beta(s)$ có các tính chất sau:

(i) $\mathbf{G}_\beta$ là ổn định tiệm cận.

(ii) Chuẩn H_∞ của $\mathbf{G}_\beta(s)$ là bằng với chuẩn $H_{\infty, \beta}$ của $\mathbf{G}(s)$, ...

$$\|\mathbf{G}_\beta(s)\|_{H_\infty} = \|\mathbf{G}(s)\|_{H_{\infty, \beta}}.$$

Chứng minh định lý 2:

(i) Từ $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}_\beta$, chúng ta có $\text{real}(\lambda(\mathbf{A})) < \beta$, $\beta \geq 0$ và $\text{real}(\lambda(\mathbf{A} - \beta\mathbf{I})) < 0$.

(ii) Ta thấy rằng:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_\beta(j\omega) &= \mathbf{C}_\beta(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}_\beta)^{-1}\mathbf{B}_\beta \\
 &= \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A} + \beta\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B} \\
 &= \mathbf{C}((\beta + j\omega)\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
 &= \mathbf{G}(\beta + j\omega),
 \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{G}_\beta\|_{\mathbf{H}_\infty} &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}_\beta(j\omega)) \\
 &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(\beta + j\omega)) \\
 &= \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{H}_{\infty, \beta}}.
 \end{aligned}$$

□

Sau đây, tác giả giới thiệu thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ không ổn định [90] như sau:

Thuật toán 2.5.2. Thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ không ổn định [90]

Đầu vào: Hệ $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ được mô tả trong (1.1) (hệ không ổn định) có biểu diễn dạng hàm truyền là $\mathbf{G}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

Bước 1: Xác định điểm cực α không ổn định lớn nhất của hệ (1.1). Đặt $\beta = \text{real}(\alpha) + \delta$, trong đó $\delta \in \mathbb{R}$ nhỏ tùy ý và $\delta > 0$.

Bước 2: Chuyển đổi hệ $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ thành hệ $\mathbf{G}_\beta(s)$ ổn định theo hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\beta &= \mathbf{A} - \beta\mathbf{I} \\
 \mathbf{B}_\beta &= \mathbf{B} \\
 \mathbf{C}_\beta &= \mathbf{C}
 \end{aligned}$$

Bước 3: Tính Grammian quan sát $\mathbf{Q}_\beta$ và Grammian điều khiển được $\mathbf{P}_\beta$ của hệ thống $(\mathbf{A}_\beta, \mathbf{B}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$ bằng cách giải hai phương trình Lyapunov sau:

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{P}_\beta + \mathbf{P}_\beta \mathbf{A}_\beta^T = -\mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\beta^T,$$

$$\mathbf{A}_\beta^T \mathbf{Q}_\beta + \mathbf{Q}_\beta \mathbf{A}_\beta = -\mathbf{C}_\beta^T \mathbf{C}_\beta.$$

Bước 4: Phân tích Cholesky ma trận $\mathbf{P}_\beta = \mathbf{R}_{\beta p} \mathbf{R}_{\beta p}^T$, với $\mathbf{R}_{\beta p}$ là ma trận tam giác trên.

Bước 5: Phân tích Cholesky ma trận $\mathbf{Q}_\beta = \mathbf{R}_{\beta o} \mathbf{R}_{\beta o}^T$, với $\mathbf{R}_{\beta o}$ là ma trận tam giác trên.

Lưu ý: Có thể tính phân tích Cholesky của hai ma trận Gramian điều khiển và Gramian quan sát từ các thông số của hệ $(\mathbf{A}_\beta, \mathbf{B}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$ mà không qua bước tính hai ma trận Gramian điều khiển và quan sát (bước 3) như trong tài liệu [10], [33], [63]. Trong Matlab để tính trực tiếp phân tích Cholesky của hai ma trận Gramian điều khiển và Gramian quan sát từ các thông số của hệ $(\mathbf{A}_\beta, \mathbf{B}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$ có thể thực hiện bằng lệnh *lyapchol*.

Bước 6: Phân tích SVD ma trận $\mathbf{R}_{\beta o} \mathbf{R}_{\beta p}^T = \mathbf{U}_\beta \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_\beta^T$.

Bước 7: Tính ma trận $\mathbf{T}_\beta$ không suy biến

$$\mathbf{T}_\beta^{-1} = \mathbf{R}_{\beta p} \mathbf{V}_\beta \mathbf{\Lambda}^{-1/2}.$$

Bước 8: Tính $(\hat{\mathbf{A}}_\beta, \hat{\mathbf{B}}_\beta, \hat{\mathbf{C}}_\beta) = (\mathbf{T}_\beta^{-1} \mathbf{A}_\beta \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\beta^{-1} \mathbf{B}_\beta, \mathbf{C}_\beta \mathbf{T}_\beta)$.

Lưu ý: Các bước từ bước 3 đến bước 8 liên quan đến thuật toán chuyển hệ về dạng cân bằng [45], [46], [57]. Trong Matlab để thực hiện chuyển hệ về dạng cân bằng ta dùng lệnh *bareal*.

Bước 9: Chọn số bậc cần rút gọn r sao cho $r < n$.

Bước 10: Biểu diễn $(\hat{\mathbf{A}}_\beta, \hat{\mathbf{B}}_\beta, \hat{\mathbf{C}}_\beta)$ ở dạng khối như sau:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11\beta} & \hat{\mathbf{A}}_{12\beta} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21\beta} & \hat{\mathbf{A}}_{22\beta} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}}_{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{1\beta} \\ \hat{\mathbf{B}}_{2\beta} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{C}}_{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{1\beta} & \hat{\mathbf{C}}_{2\beta} \end{bmatrix},$$

trong đó $\hat{\mathbf{A}}_{11\beta} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\hat{\mathbf{B}}_{1\beta} \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $\hat{\mathbf{C}}_{1\beta} \in \mathbb{R}^{q \times r}$.

Ta thu được hệ giảm bậc $(\hat{\mathbf{A}}_{11\beta}, \hat{\mathbf{B}}_{1\beta}, \hat{\mathbf{C}}_{1\beta})$ ổn định.

Bước 11: Chuyển đổi hệ $(\hat{\mathbf{A}}_{11\beta}, \hat{\mathbf{B}}_{1\beta}, \hat{\mathbf{C}}_{1\beta})$ ổn định về hệ ổn định $-\beta$ $(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{C}}_1)$ theo hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{11} &= \hat{\mathbf{A}}_{11\beta} - \beta \mathbf{I}, \\ \hat{\mathbf{B}}_1 &= \hat{\mathbf{B}}_{1\beta}, \\ \hat{\mathbf{C}}_1 &= \hat{\mathbf{C}}_{1\beta}. \end{aligned}$$

Đầu ra: Hệ giảm bậc $(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{C}}_1)$

Đặt $\hat{\mathbf{G}}_{1\beta}(s) = \hat{\mathbf{C}}_{1\beta} (s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11\beta})^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{1\beta}$ là dạng ma trận truyền của hệ $(\hat{\mathbf{A}}_{11\beta}, \hat{\mathbf{B}}_{1\beta}, \hat{\mathbf{C}}_{1\beta})$ và đặt $\hat{\mathbf{G}}_1(s) = \hat{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \hat{\mathbf{B}}_1$ là dạng ma trận truyền hệ giảm bậc $(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{C}}_1)$, ta có định lý sau:

Định lý 3: Đặt $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{C}_{\beta}$ và $\hat{\mathbf{G}}_1(s)$ là hệ giảm bậc thu được từ thuật toán 2.5.2.

Thì ta thu được công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc như sau:

$$\|\mathbf{G}(s) - \hat{\mathbf{G}}_1(s)\|_{H_{\infty, \beta}} \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n),$$

trong đó $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ là giá trị Hankel suy biến của $\mathbf{G}_{\beta}(s)$.

Chứng minh định lý 3: Đặt $\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s) - \hat{\mathbf{G}}_1(s) = \mathbf{C}_e (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_e)^{-1} \mathbf{B}_e$, ta có

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{A}}_{11} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\hat{\mathbf{C}}_1 \end{bmatrix}.$$

Từ $\text{real}(\lambda(\mathbf{A})) < \beta$, $\text{real}(\lambda(\hat{\mathbf{A}}_{11})) < \beta$, ta có $\mathbf{E}(s) \in \mathbb{C}_\beta$. Sử dụng định lý 2 ta thu được:

$$\|\mathbf{E}(s)\|_{\mathbf{H}_{\infty,\beta}} = \|\mathbf{E}_\beta(s)\|_{\mathbf{H}_{\infty}} = \|\mathbf{G}_\beta(s) - \hat{\mathbf{G}}_{1\beta}(s)\|_{\mathbf{H}_{\infty}},$$

trong đó $\mathbf{E}_\beta(s) = \mathbf{C}_e (s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_e - \beta\mathbf{I}))^{-1} \mathbf{B}_e$. Từ $\mathbf{G}_\beta(s)$ và $\hat{\mathbf{G}}_{1\beta}(s)$ là hệ ổn định tiệm cận và $\hat{\mathbf{G}}_{1\beta}(s)$ là hệ giảm bậc thu được từ bằng thuật toán chặt cân bằng của hệ $\mathbf{G}_\beta(s)$, ta có:

$$\|\mathbf{G}_\beta(s) - \hat{\mathbf{G}}_{1\beta}(s)\|_{\mathbf{H}_{\infty}} \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n),$$

trong đó $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ là giá trị Hankel suy biến của $\mathbf{G}_\beta(s)$. □

2.6. Ví dụ giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định bậc cao

Để minh chứng hiệu quả và tính đúng đắn của hai thuật toán giảm bậc mô hình đã được đề xuất và hoàn thiện trong mục 2.5, tác giả áp dụng các thuật toán này để giảm bậc một hệ tuyến tính không ổn định bậc cao có dạng như sau:

$$\mathbf{S}(s) = \frac{\mathbf{H}(s)}{\mathbf{D}(s)}$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= 1.26s^{15} + 110.4s^{14} + 3959s^{13} + 8.089 \cdot 10^4 s^{12} + 1.078 \cdot 10^6 s^{11} + 1.006 \cdot 10^7 s^{10} \\ &\quad + 6.869 \cdot 10^7 s^9 + 3.547 \cdot 10^8 s^8 + 1.419 \cdot 10^9 s^7 + 4.478 \cdot 10^9 s^6 + 1.116 \cdot 10^{10} s^5 \\ &\quad + 2.142 \cdot 10^{10} s^4 + 2.96 \cdot 10^{10} s^3 + 2.616 \cdot 10^{10} s^2 + 1.183 \cdot 10^{10} s + 1.536 \cdot 10^9 \\ \mathbf{D}(s) &= -0.0001185s^{15} - 0.02028s^{14} - 1.051s^{13} - 22.89s^{12} - 222.5s^{11} - 165.6s^{10} \\ &\quad + 1.999 \cdot 10^4 s^9 + 2.433 \cdot 10^5 s^8 + 1.533 \cdot 10^6 s^7 + 5.942 \cdot 10^6 s^6 + 1.438 \cdot 10^7 s^5 \\ &\quad + 2.042 \cdot 10^7 s^4 + 1.401 \cdot 10^7 s^3 + 2.108 \cdot 10^6 s^2 + 1.49 \cdot 10^{-8} s \end{aligned}$$

2.6.1 Giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định theo thuật toán giảm bậc gián tiếp

Thực hiện giảm hệ không ổn định $\mathbf{S}(s)$ theo thuật toán ở 2.5.1, kết quả thu được như sau:

Bước 1-5: Phân tách bộ điều khiển thành phần ổn định và không ổn định

Phân hệ ổn định

$$S_{od}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

Với

$$\begin{aligned} A(s) &= -1.063.10^4 s^{14} - 1.022.10^6 s^{13} - 4.043.10^7 s^{12} - 8.913.10^8 s^{11} - 1.239.10^{10} s^{10} \\ &\quad - 1.154.10^{11} s^9 - 7.392.10^{11} s^8 - 3.265.10^{12} s^7 - 9.676.10^{12} s^6 - 1.779.10^{13} s^5 \\ &\quad - 1.564.10^{13} s^4 + 4.185.10^{12} s^3 + 1.911.10^{13} s^2 + 9.806.10^{12} s + 1.257.10^{12} \\ B(s) &= s^{14} + 181.5s^{13} + 1.074.10^4 s^{12} + 3.039.10^5 s^{11} + 5.012.10^6 s^{10} + 5.309.10^7 s^9 \\ &\quad + 3.788.10^8 s^8 + 1.853.10^9 s^7 + 6.172.10^9 s^6 + 1.35.10^{10} s^5 + 1.784.10^{10} s^4 \\ &\quad + 1.163.10^{10} s^3 + 1.725.10^9 s^2 + 1.286.10^{-5} s + 1.628.10^{-7} \end{aligned}$$

Phân hệ không ổn định

$$S_{ko}(s) = \frac{-1.941.10^4}{s - 10.31}$$

Bước 6: Thực hiện giảm bậc phân hệ ổn định $S_{od}(s)$ của theo thuật toán 2.3.2 và thuật toán 2.3.3 thu được kết quả như sau:

Thuật toán 2.3.2: Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác**Thuật toán 2.3.3:** Thuật toán sắp xếp lại điểm cực theo chỉ số trội H_2 Ta thu được hệ tương đương $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0002 & 0.0002 & 0.0003 & 0.0002 & -0.0003 & 0.0002 & -0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 0 & -100.00 & -118.48 & 60.7053 & 56.3024 & -55.913 & -56.067 & 31.677 & 44.4656 & 24.9638 & -33.2208 & 29.254 & -9.034 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -35.098 & 13.344 & 4.5251 & 3.3703 & 10.0482 & -9.5266 & -14.6697 & -10.1687 & 14.0749 & -13.668 & 4.3821 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & -9.1392 & -16.923 & 16.8244 & 16.8713 & -9.5179 & -13.3535 & -7.4916 & 9.9710 & -8.7819 & 2.7129 \\ 0 & 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -7.8347 & 16.0496 & 15.6206 & -8.8121 & -12.3631 & -6.9357 & 9.2310 & -8.1300 & 2.5115 \\ 0 & 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.4721 & -7.7430 & -15.5288 & 8.7603 & 12.2905 & 6.8950 & -9.1768 & 8.0823 & -2.4967 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0001 & -7.7860 & 10.564 & 12.3246 & 6.9141 & -9.2022 & 8.1047 & -2.5036 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0002 & -0.0004 & 0.0001 & -1.7795 & -2.4778 & -6.9527 & -3.9005 & 5.1913 & -4.5722 & 1.4124 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0006 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & -4.8770 & -6.7148 & 7.2831 & -6.4145 & 1.9815 \\ 0 & 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0005 & 0.0006 & -0.0005 & 0.0001 & -0.0002 & 1.2426 & -1.5349 & 4.0858 & -3.5984 & 1.1116 \\ 0 & 0 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0009 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0002 & -2.7192 & 4.9394 & -1.4796 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0008 & -0.0002 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0002 & -0.0003 & -0.0001 & -0.1496 & -2.1092 & 1.3031 \\ 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0035 & -0.0016 & -0.0008 & -0.0003 & -0.0007 & -0.0010 & -0.0005 & 0.0006 & -0.0004 & -0.2012 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = 10^{17} \cdot \begin{bmatrix} 6.3728 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [0.0000 \quad -0.0000 \quad 14.1421 \quad 8.3784 \quad -4.2753 \quad -3.9589 \quad 3.9353 \quad 3.9456 \quad -2.2258 \quad -3.1230 \quad -1.7524 \quad 2.3323 \quad -2.0536 \quad 0.6342].$$

Kết quả giảm bậc phân hệ ổn định $\mathbf{S}_{od}(s)$ được thể hiện trong bảng 2.4 như sau:

Bảng 2.4. Kết quả giảm bậc phân hệ ổn định $\mathbf{S}_{od}(s)$

Bậc	Hệ rút gọn $\mathbf{S}_{odr}(s)$
5	$\frac{-1.063 \cdot 10^4 s^5 - 6.236 \cdot 10^5 s^4 - 1.043 \cdot 10^7 s^3 - 4.823 \cdot 10^7 s^2 + 2.765 \cdot 10^7 s + 2.287 \cdot 10^7}{s^5 + 144s^4 + 4718s^3 + 3.139 \cdot 10^4 s^2 + 2.265 \cdot 10^{-10} s + 3.451 \cdot 10^{-12}}$
4	$\frac{-1.063 \cdot 10^4 s^4 - 5.286 \cdot 10^5 s^3 - 5.707 \cdot 10^6 s^2 + 2.805 \cdot 10^6 s + 2.557 \cdot 10^6}{s^4 + 135.1s^3 + 3510s^2 + 2.528 \cdot 10^{-11} s + 3.859 \cdot 10^{-13}}$
3	$\frac{-1.063 \cdot 10^4 s^3 - 1.578 \cdot 10^5 s^2 + 7.785 \cdot 10^4 s + 7.286 \cdot 10^4}{s^3 + 100s^2 + 7.201 \cdot 10^{-13} s + 1.099 \cdot 10^{-14}}$
2	$\frac{-1.063 \cdot 10^4 s^2 + 771.3s + 728.6}{s^2 + 7.2 \cdot 10^{-15} s + 1.099 \cdot 10^{-16}}$

Đầu ra: Hệ giảm bậc thu được là : $\mathbf{S}_r(s) = \mathbf{S}_{odr}(s) + \mathbf{S}_{ko}(s)$

Kết quả giảm bậc hệ không ổn định $\mathbf{S}(s)$ được thể hiện trong bảng 2.5 như sau:

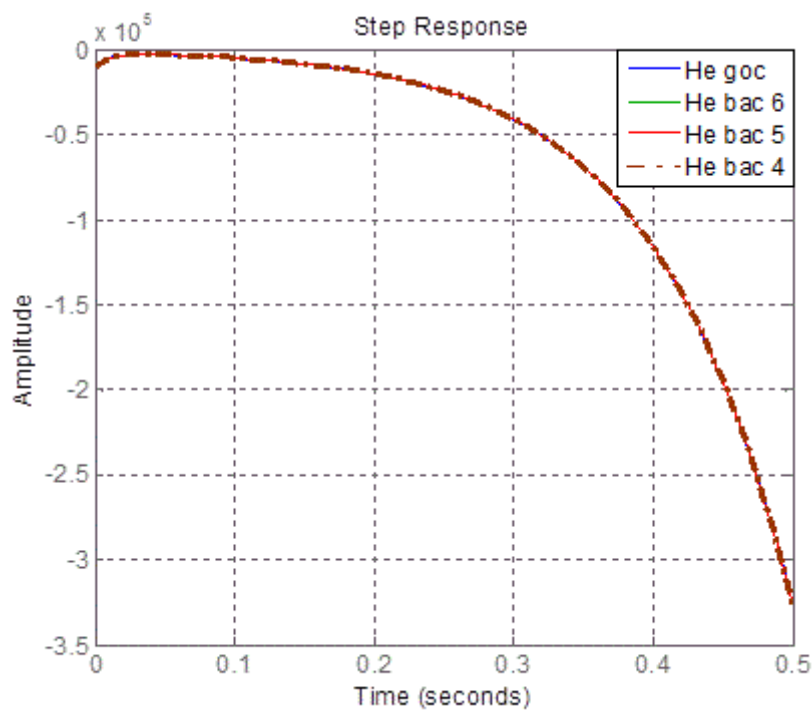
Bảng 2.5. Kết quả giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định $\mathbf{S}(s)$

Bậc	Hệ rút gọn $\mathbf{S}_{odr}(s)$
6	$\frac{-1.063 \cdot 10^4 s^6 - 5.334 \cdot 10^5 s^5 - 6.798 \cdot 10^6 s^4 - 3.22 \cdot 10^7 s^3 - 8.418 \cdot 10^7 s^2 - 2.623 \cdot 10^8 s - 2.359 \cdot 10^8}{s^6 + 133.7s^5 + 3233s^4 - 1.727 \cdot 10^4 s^3 - 3.237 \cdot 10^5 s^2 - 2.333 \cdot 10^{-9} s - 3.559 \cdot 10^{-11}}$

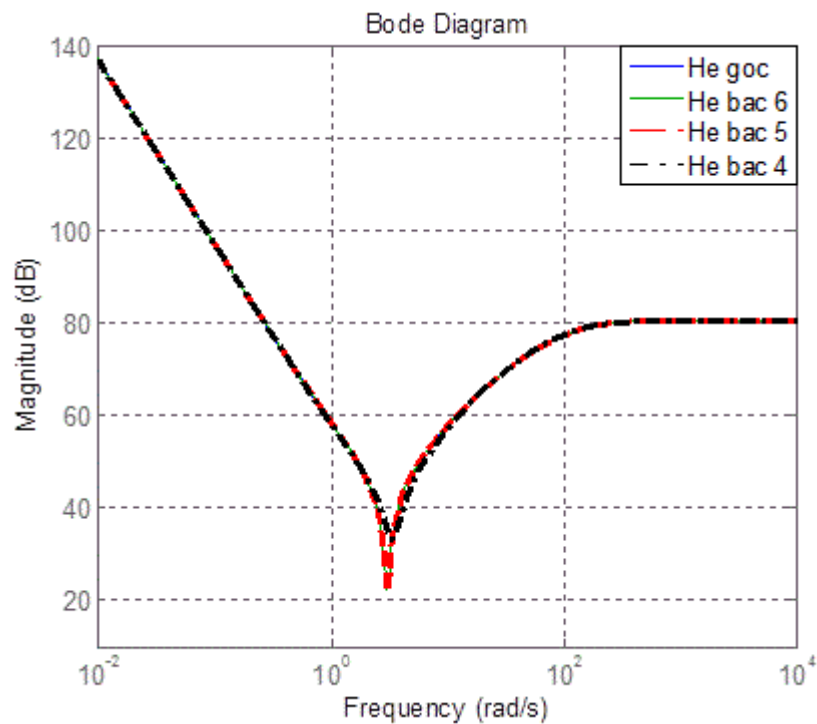
5	$\frac{-1.063.10^4 s^5 - 4.383.10^5 s^4 - 2.877.10^6 s^3 - 6.463.10^6 s^2 - 2.638.10^7 s - 2.638.10^7}{s^5 + 124.8s^4 + 2117s^3 - 3.62.10^4 s^2 - 2.604.10^{-10} s - 3.98.10^{-12}}$
4	$\frac{-1.063.10^4 s^4 - 6.758.10^4 s^3 - 2.353.10^5 s^2 - 7.301.10^4 s - 7.515.10^5}{s^4 + 89.69s^3 - 1031s^2 - 7.028.10^{-12} s - 9.88.10^{-14}}$

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 6 (*Re_Unstable_TT.m'*)

Để đánh để đánh giá rõ hơn kết quả giảm bậc hệ gốc bậc cao, tác giả sử dụng đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc như hình 2.4 và hình 2.5 sau đây:



Hình 2.4. Đáp ứng bước nhảy của hệ gốc và các hệ giảm bậc



Hình 2.5. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc

Nhận xét: Qua kết quả trên hình 2.4 và hình 2.5 ta thấy:

+ Đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ bậc 5, bậc 6 là hoàn toàn trùng khớp với đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ gốc bậc 15.

+ Đáp ứng bước nhảy của hệ bậc 4 trùng khớp với đáp ứng bước nhảy của hệ gốc bậc 15; đồ thị bode của hệ bậc 4 có sai lệch nhỏ với đồ thị bode của hệ gốc bậc 15 từ dải tần $(2,68 \div 3,52)$ rad/s.

Như vậy, tùy thuộc vào yêu cầu sai số giảm bậc và phạm vi ứng dụng của mô hình giảm bậc trong bài toán cụ thể mà ta có thể lựa chọn mô hình giảm bậc tương ứng thay thế cho mô hình gốc. Cụ thể: nếu muốn hệ giảm bậc có bậc thấp nhất có thể và chỉ quan tâm chủ yếu đến sai lệch đáp ứng bước nhảy so với hệ gốc nhỏ thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 4 thay cho hệ gốc bậc 15. Nếu muốn hệ có bậc thấp nhưng sai số giảm bậc nhỏ, sai lệch đáp ứng bước nhảy và sai lệch đồ thị bode so với hệ gốc nhỏ thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 5 thay thế cho hệ gốc bậc 15. Kết quả giảm bậc ở trên chứng tỏ thuật toán giảm bậc mới có khả năng giảm bậc được cho mô hình tuyến tính không ổn định bậc cao.

2.6.2. Giảm bậc hệ tuyến tính không ổn định theo thuật toán giảm bậc trực tiếp

Thực hiện giảm bậc hệ không ổn định $S(s)$ theo thuật toán 2.5.2 tác giả thu được kết quả như sau:

Lưu ý: Theo định nghĩa 4 trong mục 2.5.2, hệ $S(s)$ được gọi là hệ ổn định $-\beta$, nên hệ giảm bậc của $S(s)$, ký hiệu là $\hat{S}_\beta(s)$ được gọi là hệ giảm bậc ổn định $-\beta$.

Bước 1: Xác định điểm cực α không ổn định lớn nhất của hệ $S(s)$, ta được $\alpha = 10.313$. Đặt $\beta = \alpha + \delta = 10.323$

Bước 2: Chuyển đổi hệ không ổn định $S(s)$ thành hệ ổn định $S_\beta(s)$ thu được kết quả sau ở dạng mô hình trạng thái $(\hat{A}_\beta, \hat{B}_\beta, \hat{C}_\beta, \hat{D}_\beta)$ như sau:

$$\mathbf{A}_\beta = \mathbf{A} - \beta \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -181.5308 & -69.2774 & -23.5797 & -14.3273 & -1.3331 & 10.0562 & 7.6510 & 6.0266 & 2.9194 & 1.7667 & 1.2539 & 0.8603 & 0.5178 & 0.0000 & 0 \\ 128 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10.3233 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & -10.3233 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & -10.3233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & -10.3233 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 8192 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\beta = 1.0e^4 [0.0108 \ 0.0058 \ 0.0020 \ 0.0010 \ -0.0008 \ -0.0017 \ -0.0011 \ -0.0009 \ -0.0004 \ -0.0002 \ -0.0002 \ -0.0001 \ -0.0001 \ -0.0182 \ -1.2074]$$

$$\mathbf{D}_\beta = [-1.0632e^4]$$

Bước 3 –10: Kết quả giảm bậc hệ ổn định $S_\beta(s)$ được thể hiện ở bảng 2.6 như sau:

Bảng 2.6: Kết quả giảm bậc hệ ổn định $S_\beta(s)$

Bậc	Hệ giảm bậc $\hat{S}_{1\beta}(s)$	Sai số $\ S_\beta(s) - \hat{S}_{1\beta}(s)\ _{H_\infty}$
6	$\frac{-1.063.10^4 s^6 - 1.116.10^6 s^5 - 4.427.10^7 s^4 - 8.842.10^8 s^3 - 9.583.10^9 s^2 - 5.414.10^{10} s - 1.257.10^{11}}{s^6 + 188.5s^5 + 1.047.10^4 s^4 + 2.211.10^5 s^3 + 1.991.10^6 s^2 + 6.49.10^6 s + 6.47.10^4}$	$9.207.10^{-7}$
5	$\frac{-1.063.10^4 s^5 - 9.871.10^5 s^4 - 3.231.10^7 s^3 - 4.928.10^8 s^2 - 3.612.10^9 s - 1.038.10^{10}}{s^5 + 176.4s^4 + 8335s^3 + 1.201.10^5 s^2 + 5.352.10^5 s + 5340}$	$9.228.10^{-7}$
4	$\frac{-1.063.10^4 s^4 - 8.665.10^5 s^3 - 2.256.10^7 s^2 - 2.397.10^8 s - 9.246.10^8}{s^4 + 165.1s^3 + 6470s^2 + 4.765.10^4 s + 475.8}$	0.0346
3	$\frac{-1.063.10^4 s^3 - 3.28.10^5 s^2 - 3.174.10^6 s - 7.74.10^6}{s^3 + 114.5s^2 + 399.5s + 3.983}$	10.15

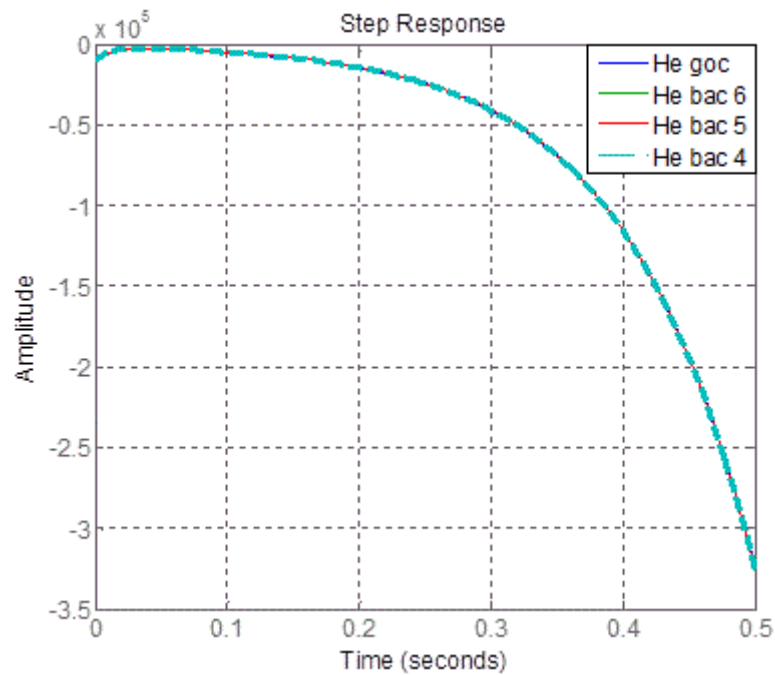
Bước 11: Chuyển đổi hệ giảm bậc $\hat{S}_{1\beta}(s)$ về hệ ổn định $-\beta$ giảm bậc $\hat{S}_1(s)$ ta thu được kết quả giảm bậc thể hiện trong bảng 2.7 như sau:

Bảng 2.7: Kết quả giảm bậc hệ không ổn định $S(s)$

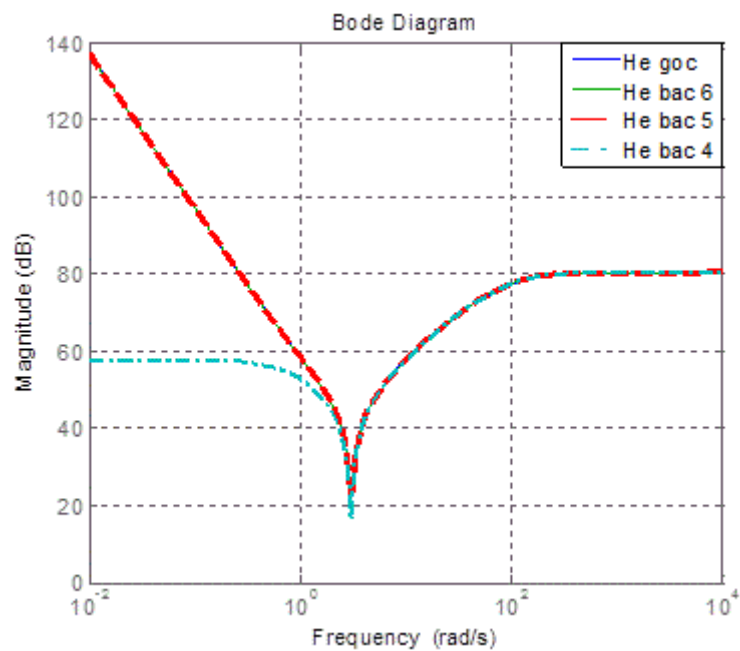
Bậc	Hệ giảm bậc $\hat{S}_1(s)$	Sai số $\ S(s) - \hat{S}_1(s)\ _{H_{\infty,\beta}}$
6	$\frac{-1.063.10^4 s^6 - 4.574.10^5 s^5 - 3.663.10^6 s^4 - 1.162.10^7 s^3 - 3.796.10^7 s^2 - 7.364.10^7 s - 4.726.10^7}{s^6 + 126.6s^5 + 2340s^4 - 3.241.10^4 s^3 - 6.486.10^4 s^2 + 1.033.10^{-5} s - 1.025.10^{-5}}$	$9.207.10^{-7}$
5	$\frac{-1.063.10^4 s^5 - 4.383.10^5 s^4 - 2.877.10^6 s^3 - 6.463.10^6 s^2 - 2.638.10^7 s - 2.638.10^7}{s^5 + 124.8s^4 + 2117s^3 - 3.62.10^4 s^2 + 8.972.10^{-6} s - 5.728.10^{-6}}$	$9.228.10^{-7}$
4	$\frac{-1.063.10^4 s^4 - 4.274.10^5 s^3 - 2.522.10^6 s^2 - 4.157.10^6 s - 2.191.10^7}{s^4 + 123.8s^3 + 1998s^2 - 3.757.10^4 s + 2.789.10^4}$	0.0346
3	$\frac{-1.063.10^4 s^3 + 1317s^2 + 1.981.10^5 s + 1.772.10^6}{s^3 + 83.49s^2 - 1644s + 6978}$	10.15

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 7 (*balance_new.m*)

Để đánh để đánh giá rõ hơn kết quả giảm bậc hệ gốc bậc cao, tác giả sử dụng đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc như hình 2.6 và hình 2.7 sau đây:



Hình 2.6. Đáp ứng bước nhảy của hệ gốc và các hệ giảm bậc



Hình 2.7. Đồ thị bode của hệ gốc và các hệ giảm bậc

Nhận xét: Qua kết quả sai số giảm bậc và hình 2.6, hình 2.7 ta thấy:

+ Sai số giảm bậc theo chuẩn $H_{\infty, \beta}$ của hệ bậc 5, bậc 6 là nhỏ; Đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ bậc 5, bậc 6 là hoàn toàn trùng khớp với đáp ứng bước nhảy và đồ thị bode của hệ gốc bậc 15.

+ Sai số giảm bậc theo chuẩn $H_{\infty, \beta}$ của hệ bậc 4 là lớn hơn nhiều so với sai số giảm bậc của hệ bậc 5, bậc 6; Đáp ứng bước nhảy của hệ bậc 4 trùng khớp với đáp ứng bước nhảy của hệ gốc bậc 15; đồ thị bode của hệ bậc 4 có sai lệch so với đồ thị bode của hệ gốc bậc 15 ở vùng tần thấp (nhỏ hơn 1,98 rad/s)

Như vậy, tùy thuộc vào yêu cầu sai số giảm bậc và phạm vi ứng dụng của mô hình giảm bậc trong bài toán cụ thể mà ta có thể lựa chọn mô hình giảm bậc tương ứng thay thế cho mô hình gốc. Cụ thể: nếu muốn hệ giảm bậc có bậc thấp nhất có thể và chỉ quan tâm chủ yếu đến sai lệch đáp ứng bước nhảy so với hệ gốc nhỏ thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 4 thay cho hệ gốc bậc 15. Nếu muốn hệ có bậc thấp nhưng sai số giảm bậc nhỏ, sai lệch đáp ứng bước nhảy và sai lệch đồ thị bode so với hệ gốc nhỏ thì ta có thể lựa chọn hệ bậc 5 thay thế cho hệ gốc bậc 15.

Kết quả trên chứng tỏ thuật toán giảm bậc trực tiếp có khả năng giảm bậc được cho mô hình tuyến tính không ổn định bậc cao.

2.7. Kết luận chương 2

Trong chương này, tác giả đã đạt được một số nội dung sau:

1. Giới thiệu một số công cụ toán học thường dùng trong giảm bậc mô hình.
2. Xây dựng một thuật toán giảm bậc mới cho hệ ổn định (**thuật toán 2.3.2, thuật toán 2.3.3**) trên cơ sở bảo toàn các điểm cực trội của hệ gốc trong hệ giảm bậc. Điểm mới quan trọng của thuật toán là đưa ra chỉ số trội H_{∞} , chỉ số trội H_2 , chỉ số trội hỗn hợp H_2/H_{∞} để đánh giá tính quan trọng của các điểm cực và khả năng sắp xếp các điểm cực theo các chỉ số trội giảm dần trên đường chéo chính của ma trận **A** và đưa ra được công thức tính chặn trên của sai số giảm

bậc. Đồng thời tác giả đưa ra 3 định nghĩa, 1 định lý và 5 bổ đề mới cùng phần chứng minh đầy đủ.

3. Xây dựng thuật toán giảm bậc mới cho hệ không ổn định theo phương pháp giảm bậc gián tiếp (**thuật toán 2.5.1**) là phần mở rộng của thuật toán mới cho hệ ổn định (**thuật toán 2.3.2, thuật toán 2.3.3**) trên cơ sở bảo toàn các điểm cực trội của hệ gốc trong hệ giảm bậc.

4. Đưa ra được 1 định nghĩa và 2 định lý mới cùng phần chứng minh đầy đủ để xác định công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc từ đó hoàn thiện thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ không ổn định theo tài liệu [90] (**thuật toán 2.5.2**).

5. Các ví dụ giảm bậc hệ tuyến tính ổn định bậc cao (mô hình bộ lọc số [87], mô hình CD player [67]) và hệ tuyến tính không ổn định bậc cao cho thấy tính đúng đắn và hiệu quả của các thuật toán giảm bậc đã đề xuất.

CHƯƠNG 3. VỀ MỘT ỨNG DỤNG BÀI TOÁN GIẢM BẬC MÔ HÌNH TRONG ĐIỀU KHIỂN

Trong nội dung chương 2, tác giả đã xây dựng, hoàn thiện hai thuật toán giảm bậc mô hình cũng như đưa ra các ví dụ minh họa tính đúng đắn của thuật toán đã đề xuất. Để làm rõ hơn ưu nhược điểm, tính đúng đắn và hiệu quả của các thuật toán này, trong chương 3, tác giả sẽ trình bày về một ứng dụng thuật toán giảm bậc mô hình trong điều khiển gồm cả lý thuyết và mô phỏng – cụ thể là ứng dụng giảm bậc mô hình trong bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao.

3.1. Giới thiệu

Theo lý thuyết điều khiển bền vững thì hệ thống điều khiển bền vững H_∞ làm cho chất lượng hệ thống ổn định, ít phụ thuộc vào sự thay đổi của đối tượng cũng như nhiễu tác động lên hệ thống. Mục đích của điều khiển bền vững là chất lượng vòng kín được duy trì mặc dù có sự thay đổi trong đối tượng. Hệ thống điều khiển này được giới thiệu lần đầu tiên bởi McFarlane và Glover vào năm 1991 [54], và đã được sử dụng thành công trong nhiều ứng dụng thực tế. Tuy nhiên, từ phương pháp thiết kế điều khiển bền vững H_∞ đầu tiên [54] đến các nghiên cứu sau này về lý thuyết điều khiển bền vững H_∞ [2] thì bộ điều khiển thường có bậc cao (bậc của bộ điều khiển được xác định là bậc của đa thức mẫu). Bậc của bộ điều khiển cao gây ra nhiều bất lợi khi chúng ta đem thực hiện điều khiển thực, vì :

- + Nếu thiết kế hệ thống điều khiển số thì bộ điều khiển bậc cao sẽ dẫn tới mã chương trình phức tạp làm gia tăng khối lượng tính toán cần được xử lý dẫn tới các hệ thống điều khiển có thể không đáp ứng được yêu cầu điều khiển thời gian thực hoặc nếu muốn đáp ứng được thì yêu cầu tốc độ (tốc độ của vi xử lý) của phần cứng cao làm tăng chi phí của hệ thống điều khiển.

- + Nếu thiết kế điều khiển tương tự thì cấu trúc mạch điều khiển phức tạp, dẫn tới khả năng gặp sự cố trong thiết kế và cũng như trong hoạt động của mạch

tăng lên hay độ tin cậy của hệ thống giảm đồng thời chi phí cho hệ thống điều khiển tương ứng tăng lên.

Vì vậy, việc giảm bậc bộ điều khiển mà vẫn đảm bảo chất lượng của hệ thống điều khiển (thể hiện qua các chỉ tiêu chất lượng tĩnh, chất lượng động của hệ thống điều khiển) có một ý nghĩa thực tiễn rất lớn đối với hệ thống điều khiển bền vững. Để thu được bộ điều khiển bậc thấp thì ta có thể thực hiện theo 2 phương pháp khác nhau như sau:

Phương pháp thứ nhất: phương pháp này lựa chọn một cấu trúc cố định của bộ điều khiển giảm bậc sau đó áp dụng các thuật toán tối ưu để tìm các tham số của bộ điều khiển giảm bậc sao cho đảm bảo các tiêu chuẩn của điều khiển bền vững.

Phương pháp thứ hai: Thiết kế bộ điều khiển bền vững cho đối tượng bất định sẽ thu được bộ điều khiển bậc cao, sau đó thực hiện giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo các thuật toán giảm bậc để thu được bộ điều khiển bậc thấp.

Theo quan điểm của tác giả thì thực hiện theo phương pháp thứ nhất ta có thể giúp thu được bộ điều khiển bậc thấp như trong tài liệu [78], [79] nhưng gặp phải vấn đề là do phải cùng lúc giải hai bài toán tối ưu (bài toán điều khiển bền vững và bài toán tìm thông số của bộ điều khiển bậc thấp) nên tính phức tạp của phương pháp là rất cao và nếu lựa chọn cấu trúc của bộ điều khiển bậc thấp không thích hợp thì có thể không xác định được tham số của bộ điều khiển bậc thấp (bài toán tối ưu không có nghiệm). Với phương pháp thứ hai thì bài toán giảm bậc là một bài toán độc lập nên thực hiện theo phương pháp này ta luôn thu được bộ điều khiển giảm bậc như trong tài liệu [3] vì vậy để luôn tìm được bộ điều khiển bậc thấp trong mọi trường hợp thì phương pháp thứ hai có ưu thế hơn. Chính vì vậy, trong nội dung chương này, tác giả sẽ ứng dụng các thuật toán giảm bậc mô hình đã đề xuất trong chương 2 để giảm bậc bộ điều khiển bậc cao trong bài toán điều khiển bền vững, cụ thể là bài toán giảm bậc bộ điều

hiển bền vững bậc cao trong hệ thống ổn định góc tải máy phát đồng bộ và bài toán giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao trong hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh.

3.2 Ứng dụng giảm bậc trong bài toán điều khiển ổn định góc tải máy phát đồng bộ

Trong tài liệu [3], tác giả đã thiết kế bộ điều khiển bền vững RH_∞ để ổn định góc tải của máy phát đồng bộ khi máy phát hòa với lưới, kết quả thu được bộ điều khiển bậc 28 như sau:

$$\mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) = & -0.004867s^{28} - 0.7519s^{27} - 58.8s^{26} - 2526s^{25} - 8.35 \cdot 10^4 s^{24} - 2.128 \cdot 10^6 s^{23} \\ & - 4.383 \cdot 10^7 s^{22} - 7.542 \cdot 10^8 s^{21} - 1.108 \cdot 10^{10} s^{20} - 1.411 \cdot 10^{11} s^{19} - 1.527 \cdot 10^{12} s^{18} \\ & - 1.544 \cdot 10^{13} s^{17} - 1.341 \cdot 10^{14} s^{16} - 1.032e^{15} s^{15} - 7.021 \cdot 10^{15} s^{14} - 4.211 \cdot 10^{16} s^{13} \\ & - 2.213 \cdot 10^{17} s^{12} - 1.01 \cdot 10^{18} s^{11} - 3.954 \cdot 10^{18} s^{10} - 1.306 \cdot 10^{19} s^9 - 3.564 \cdot 10^{19} s^8 \\ & - 7.845 \cdot 10^{19} s^7 - 1.348 \cdot 10^{20} s^6 - 1.723 \cdot 10^{20} s^5 - 1.52 \cdot 10^{20} s^4 - 8.162 \cdot 10^{19} s^3 \\ & - 1.984 \cdot 10^{19} s^2 + 3.89 \cdot 10^{16} s - 125.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s) = & 5.25e^{-5} s^{28} + 0.009786s^{27} + 0.8675s^{26} + 48.8s^{25} + 1965s^{24} + 6.056 \cdot 10^4 s^{23} \\ & + 1.49 \cdot 10^6 s^{22} - 3.018 \cdot 10^7 s^{21} + 5.14 \cdot 10^8 s^{20} + 7.483 \cdot 10^9 s^{19} + 9.425 \cdot 10^{10} s^{18} \\ & + 1.035 \cdot 10^{12} s^{17} + 9.968 \cdot 10^{12} s^{16} + 8.432 \cdot 10^{13} s^{15} + 6.266 \cdot 10^{14} s^{14} + 4.079 \cdot 10^{15} s^{13} \\ & + 2.314 \cdot 10^{16} s^{12} + 1.134 \cdot 10^{17} s^{11} + 4.74 \cdot 10^{17} s^{10} + 1.66 \cdot 10^{18} s^9 + 4.762 \cdot 10^{18} s^8 \\ & + 1.085 \cdot 10^{19} s^7 + 1.891 \cdot 10^{19} s^6 + 2.399 \cdot 10^{19} s^5 + 2.062 \cdot 10^{19} s^4 + 1.065 \cdot 10^{19} s^3 \\ & + 2.479 \cdot 10^{18} s^2 - 1.59 \cdot 10^4 s + 2.945 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

Bộ điều khiển bậc 28 có nhiều bất lợi khi chúng ta đem thực hiện điều khiển thực như đã phân tích ở mục 3.1 nên vấn đề cấp thiết đặt ra để giải quyết vấn đề chất lượng điều khiển, tốc độ đáp ứng và yêu cầu phần cứng của hệ thống ổn định góc tải máy phát đồng bộ là cần phải giảm bậc bộ điều khiển bậc cao. Để bộ điều khiển giảm bậc có thể thay thế được bộ điều khiển gốc bậc cao thì nó phải thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Sai số giảm bậc nhỏ - sai lệch đáp ứng bước nhảy, đáp ứng tần số của bộ điều khiển giảm bậc so với bộ điều khiển gốc là nhỏ;
2. Bậc của bộ điều khiển nhỏ;
3. Bộ điều khiển giảm bậc vẫn đảm bảo chất lượng điều khiển tương đương bộ điều khiển gốc (thể hiện qua các chỉ tiêu chất lượng tĩnh, chỉ tiêu chất lượng động của hệ thống điều khiển).

Bộ điều khiển bậc 28 là một mô hình tuyến tính ổn định nhưng có hai điểm cực của hệ xấp xỉ bằng không (chi tiết trong phụ lục 13) nên phần tiếp theo tác giả sẽ áp dụng thuật toán giảm bậc hệ không ổn định trong mục 2.5 để giảm bậc bộ điều khiển bậc 28 nhằm thỏa mãn các yêu cầu trên.

3.2.1. Giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc gián tiếp

Chuyển bộ điều khiển bậc 28 về dạng biểu diễn tối thiểu, ta thu được kết quả như sau:

$$\mathbf{R}_m(s) = \frac{\mathbf{N}_m(s)}{\mathbf{D}_m(s)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_m(s) = & -92.89s^{17} - 1.358.10^4 s^{16} - 9.111.10^5 s^{15} - 3.727.10^7 s^{14} - 1.042.10^9 s^{13} \\ & - 2.124.10^{10} s^{12} - 3.286.10^{11} s^{11} - 3.971.10^{12} s^{10} - 3.825.10^{13} s^9 - 2.963.10^{14} s^8 \\ & - 1.836.10^{15} s^7 - 8.929.10^{15} s^6 - 3.315.10^{16} s^5 - 9.091.10^{16} s^4 - 1.768.10^{17} s^3 \\ & - 2.22.10^{17} s^2 - 1.279.10^{17} s + 2.036.10^{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m(s) = & s^{17} + 178.5s^{16} + 1.484.10^4 s^{15} + 7.642.10^5 s^{14} + 2.731.10^7 s^{13} + 7.183.10^8 s^{12} \\ & + 1.436.10^{10} s^{11} + 2.221.10^{11} s^{10} + 2.677.10^{12} s^9 + 2.517.10^{13} s^8 + 1.831.10^{14} s^7 \\ & + 1.018.10^{15} s^6 + 4.225.10^{15} s^5 + 1.263.10^{16} s^4 + 2.552.10^{16} s^3 + 3.075.10^{16} s^2 \\ & + 1.588.10^{16} s \end{aligned}$$

Thực hiện giảm bậc bộ điều khiển $\mathbf{R}_m(s)$ theo thuật toán 2.5.1 cho kết quả giảm bậc được thể hiện trong bảng 3.1 như sau:

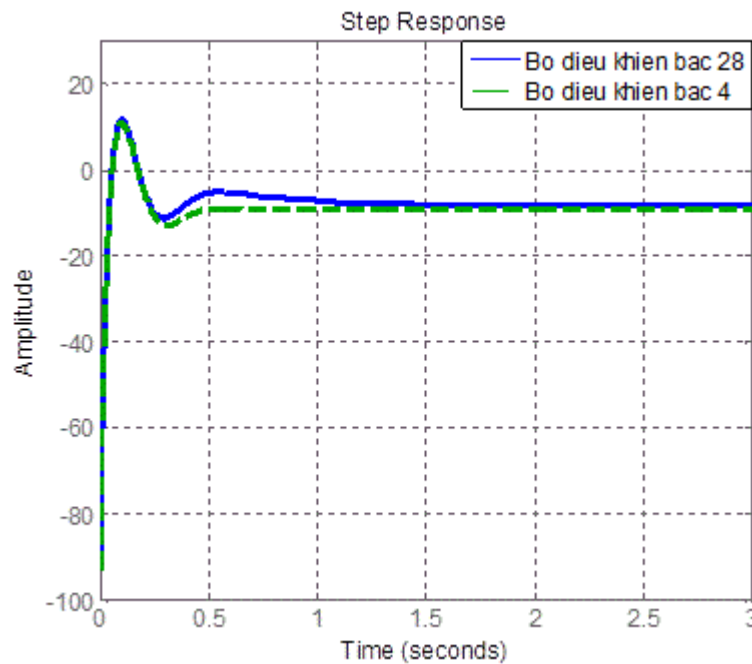
Bảng 3.1. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán giảm bậc gián tiếp

Bậc	$R_r(s)$
5	$\frac{-92.89s^5 - 2747s^4 - 2.202 \cdot 10^4 s^3 - 1.515 \cdot 10^5 s^2 - 3.974 \cdot 10^5 s + 1495}{s^5 + 61.72s^4 + 1503s^3 + 1.944 \cdot 10^4 s^2 + 1.167 \cdot 10^5 s - 5.905 \cdot 10^{-16}}$
4	$\frac{-92.89s^4 - 1042s^3 - 4767s^2 - 6.205 \cdot 10^4 s + 85.25}{s^4 + 43.89s^3 + 717.7s^2 + 6651s - 3.366 \cdot 10^{-17}}$

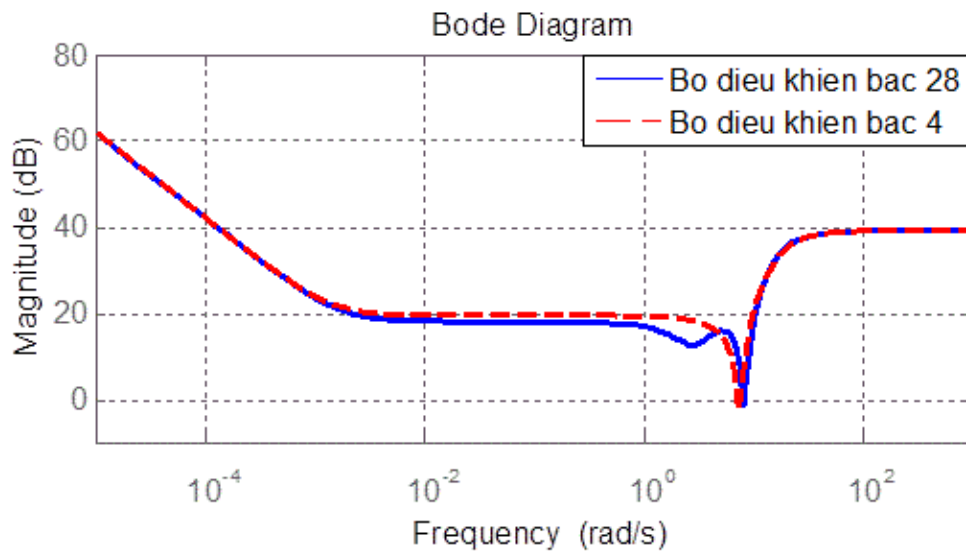
Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 3, 4, 5 (*hinf_MK.m*, *htwo_MK.m*, *Mixed_MK.m*)

Lưu ý: Tác giả sẽ gọi bộ điều khiển giảm bậc (bậc r) là bộ điều khiển bậc r .

Để xác định mô hình giảm bậc thích hợp, tác giả sử dụng đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển giảm bậc thể hiện trên hình 3.1 và hình 3.2 như sau:



Hình 3.1. Đáp ứng bước nhảy của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4



Hình 3.2. Đồ thị bode của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4

Nhận xét: Qua hình 3.1 và 3.2 ta thấy đáp ứng của bộ điều khiển bậc 4 có sai lệch nhỏ so với đáp ứng của bộ điều khiển gốc bậc 28.

Từ các kết quả trên ta thấy bộ điều khiển bậc 4 có khả năng thỏa mãn được các yêu cầu của bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc 28 nên có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 4 để thay thế bộ điều khiển gốc bậc 28 trong tài liệu [3].

3.2.2. Giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc trực tiếp

Thực hiện giảm bậc bộ điều khiển $\mathbf{R}_m(s)$ theo thuật toán 2.5.2 tác giả thu được kết quả như sau:

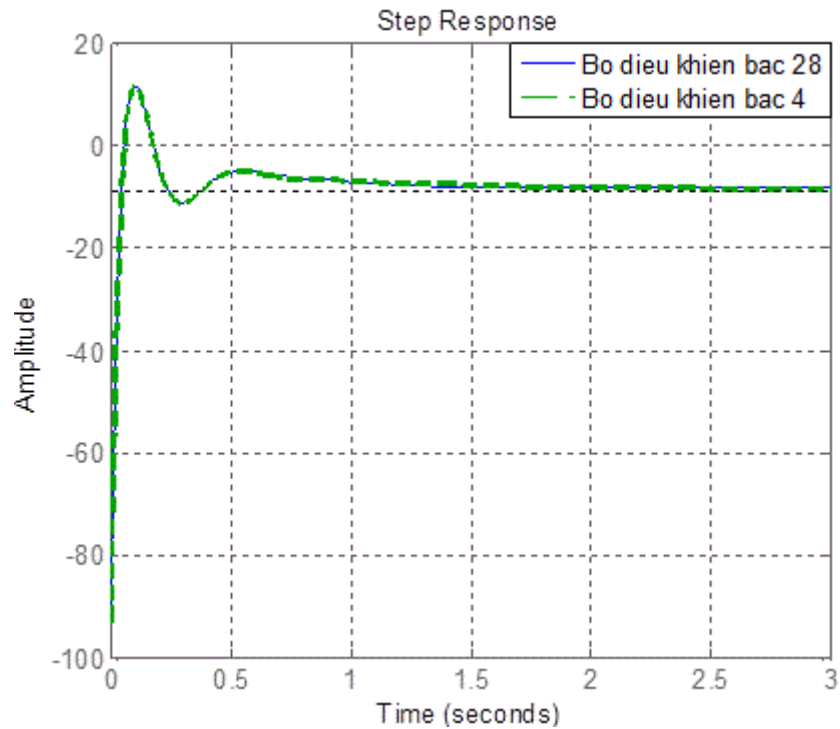
Bảng 3.2. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán giảm bậc trực tiếp

Bậc	$\mathbf{R}_r(s)$
5	$\frac{-92.89s^5 - 438.1s^4 - 7570s^3 - 2.603 \cdot 10^4 s^2 - 3.759 \cdot 10^4 s - 1.26 \cdot 10^4}{s^5 + 36.85s^4 + 557.6s^3 + 4799s^2 + 4428s + 1653}$
4	$\frac{-92.89s^4 - 424s^3 - 7535s^2 - 2.483 \cdot 10^4 s - 3.513 \cdot 10^4}{s^4 + 36.7s^3 + 552.5s^2 + 4720s + 3923}$

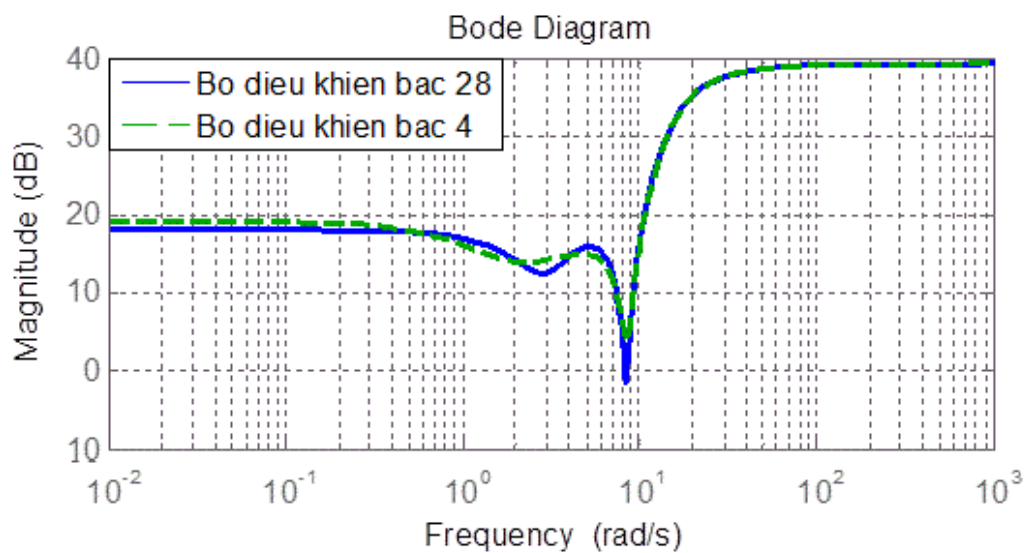
Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 8 (*balance_new.m*)

Lưu ý: Tác giả sẽ gọi bộ điều khiển giảm bậc (bậc r) là bộ điều khiển bậc r .

Để xác định mô hình giảm bậc thích hợp, tác giả phân tích đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển giảm bậc, kết quả thu thể hiện trên hình 3.3, hình 3.4 như sau:



Hình 3.3. Đáp ứng bước nhảy của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4



Hình 3.4. Đồ thị bode của bộ điều khiển gốc và bộ điều khiển bậc 4

Nhận xét: Qua hình 3.3 và hình 3.4 ta thấy rằng đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số của bộ điều khiển bậc 4 gần như trùng khít so với đáp ứng của bộ điều khiển gốc bậc 28.

Từ các kết quả trên ta thấy bộ điều khiển bậc 4 có khả năng thỏa mãn được các yêu cầu của bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc 28 nên có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 4 để thay thế bộ điều khiển gốc bậc 28 trong hệ thống ổn định góc tải của máy phát đồng bộ theo tài liệu [3].

(*) So sánh kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc bậc 28 với kết quả đạt được trong tài liệu [3]

Trong [3], tác giả sử dụng thuật toán chặt cân bằng ngẫu nhiên (trong Matlab dùng lệnh *bstmr*) để giảm bậc bộ điều khiển gốc bậc 28 và qua so sánh đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số tác giả thấy rằng: Đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số của bộ điều khiển bậc 6 gần như trùng khít với đáp ứng bước nhảy và đáp ứng tần số của bộ điều khiển gốc bậc 28 và lựa chọn bộ điều khiển bậc 6 là bộ điều khiển thấp nhất có thể thay thế được bộ điều khiển bậc 28. Qua mô phỏng hệ thống điều khiển ổn định góc tải của máy phát đồng bộ sử dụng bộ điều khiển bậc 6 tác giả [3] thấy rằng chất lượng hệ thống điều khiển (đánh giá qua các thông số thời gian đáp ứng, độ quá điều chỉnh, sai lệch tĩnh, ...) tương đương như hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 28, chi tiết xem trong tài liệu [3]. Qua kết quả trên, chứng tỏ bộ điều khiển bậc 4 theo hai phương pháp giảm bậc thỏa mãn điều kiện giảm bậc (sai số giảm bậc nhỏ, chất lượng điều khiển tương đương hệ gốc, bậc bộ điều khiển nhỏ) nên hoàn toàn có thể thay thế bộ điều khiển bậc 28 trong tài liệu [3]. Mặt khác, các bộ điều khiển giảm bậc theo các thuật toán mới đều có bậc **nhỏ hơn** bậc của bộ điều khiển thu được theo thuật toán chặt cân bằng ngẫu nhiên trong tài liệu [3], bậc bộ điều khiển thấp hơn đem lại hiệu quả là lập trình điều khiển đơn giản hơn, tốc độ đáp ứng của hệ thống tốt hơn, khả năng điều khiển thực tốt hơn, chi phí cho phần cứng hệ thống giảm đi so với kết quả trong [3]. Kết quả này cho thấy, hai thuật toán đã được đề

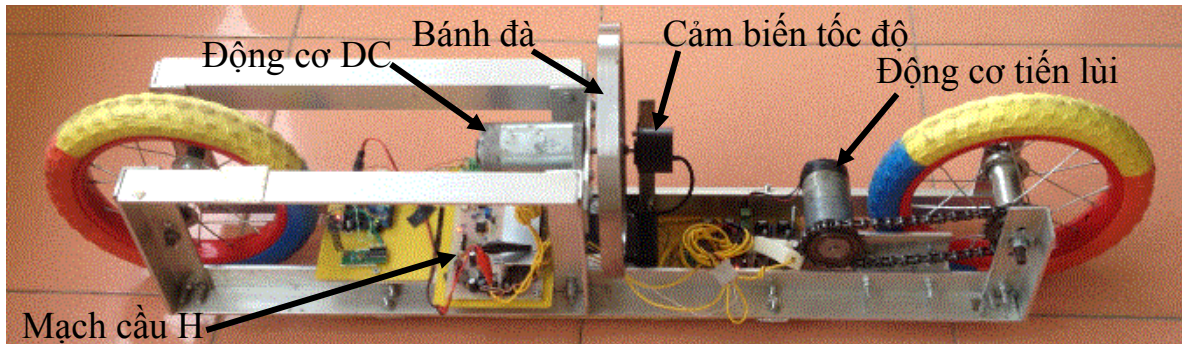
xuất có khả năng đáp ứng tốt các yêu cầu của bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao.

3.3. Ứng dụng giảm bậc mô hình trong bài toán điều khiển cân bằng xe hai bánh

3.3.1. Bài toán điều khiển cân bằng xe hai bánh

Hiện nay, nghiên cứu điều khiển cân bằng xe hai bánh (robot hai bánh tự cân bằng, xe hai bánh tự cân bằng) thu hút được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu cũng như các công ty sản xuất, do khả năng ứng dụng thực tế của xe hai bánh là lớn. Tuy nhiên, do xe hai bánh thường phải làm việc trong các điều kiện khác nhau, tải trọng mang theo có thể thay đổi, ngoại lực tác động vào xe có thể thay đổi nên việc mô hình hóa xe hai bánh tự cân bằng gặp nhiều khó khăn và có thể coi xe hai bánh là đối tượng bất định (chi tiết trong tài liệu [78], [79]). Do tính chất bất định của mô hình xe hai bánh nên trong các thuật toán điều khiển đã được đề xuất để điều khiển xe hai bánh tự cân bằng như điều khiển phi tuyến trong tài liệu [14], [47], thiết kế bù bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận quỹ đạo gốc trong tài liệu [26] và điều khiển PD trong tài liệu [43], [77] thì điều khiển bền vững RH_{∞} trong tài liệu [78], [79] là thích hợp nhất để điều khiển đối tượng bất định. Tuy nhiên, như đã đề cập ở phần 3.1, nhược điểm của điều khiển bền vững là bộ điều khiển thu được thường có bậc cao, như trong tài liệu [78], [79], nên yêu cầu đặt ra là cần phải giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao này. Từ cơ sở đó, tác giả thấy rằng: bộ điều khiển bền vững bậc cao thu được từ quá trình thiết kế điều khiển bền vững cho mô hình xe hai bánh tự cân bằng là một mô hình thích hợp để kiểm chứng tính đúng đắn và hiệu quả của thuật toán giảm bậc đã được tác giả đề xuất và hoàn thiện trong chương 2. Với mục tiêu trên, trong nội dung nghiên cứu tiếp theo, tác giả sẽ thiết kế và chế tạo một mô hình xe hai bánh tự cân bằng trong giới hạn bài toán khi xe chuyển động thẳng, khi xe mang tải và chịu tác động của ngoại lực trong giới hạn cho phép.

Quá trình thiết kế phần cơ khí và phần điện của mô hình xe hai bánh được trình bày chi tiết trong phụ lục 8. Kết quả của quá trình thiết kế, tác giả thu được **mô hình hoàn thiện của xe hai bánh tự cân bằng** được thể hiện trong hình 3.5 như sau:



Hình 3.5. Mô hình hoàn thiện của xe hai bánh tự cân bằng

Quá trình xây dựng mô hình danh định và phân tích tính chất của mô hình xe hai bánh tự cân bằng được thể hiện trong phụ lục 9. Kết quả cho thấy: Trong mô hình xe hai bánh tự cân bằng có một số tham số là bất định như: khối lượng tải thay đổi dẫn tới chiều cao trọng tâm xe thay đổi, mô men quán tính của xe biến đổi, ... đồng thời khi hoạt động xe hai bánh có thể chịu ảnh hưởng của các yếu tố bất định từ bên ngoài như: ngoại lực, nhiễu bất định do sự thay đổi của địa hình chuyển động, ... do đó mô hình xe hai bánh thực chất là một đối tượng bất định. Trong đó, tác giả quan tâm nhiều nhất đến tính bất định do sự biến đổi của khối lượng tải và ngoại lực tác động. Các yếu tố bất định có thể làm giảm tính chính xác của mô hình toán học của xe hai bánh từ đó dẫn tới giảm chất lượng điều khiển, thậm chí có thể làm hệ thống trở nên mất ổn định, chi tiết trong phụ lục 9.

Vì vậy, tác giả đã thiết kế hệ thống điều khiển bền vững RH_{∞} cho xe hai bánh tự cân bằng thể hiện trong phụ lục 10 và phụ lục 11. Kết quả, tác giả thu được bộ điều khiển như sau:

$$\mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{H}(s)}{\mathbf{D}(s)}$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) = & -2.23.10^{-7}s^{30} - 4.67.10^{-4}s^{29} - 0.266s^{28} - 22.96s^{27} - 1006s^{26} - 2.853.10^4s^{25} \\ & - 5.837.10^5s^{24} - 4.199.10^{11}s^{18} - 9.144.10^6s^{23} - 1.139.10^8s^{22} - 1.158.10^9s^{21} \\ & - 9.776.10^9s^{20} - 6.949.10^{10}s^{19} - 2.172.10^{12}s^{17} - 9.663.10^{12}s^{16} - 3.71.10^{13}s^{15} \\ & - 1.231.10^{14}s^{14} - 3.53.10^{14}s^{13} - 8.74.10^{14}s^{12} - 1.862.10^{15}s^{11} - 3.398.10^{15}s^{10} \\ & - 5.276.10^{15}s^9 - 6.903.10^{15}s^8 - 7.511.10^{15}s^7 - 6.676.10^{15}s^6 - 4.721.10^{15}s^5 \\ & - 2.556.10^{15}s^4 - 9.953.10^{14}s^3 - 2.482.10^{14}s^2 - 2.977.10^{13}s - 0.00439 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(s) = & 4.971.10^{-14}s^{30} + 2.032.10^{-10}s^{29} + 2.663.10^{-7}s^{28} + 1.221.10^{-4}s^{27} + 9.72.10^{-3}s^{26} \\ & + 0.3918s^{25} + 10.14s^{24} + 187.1s^{23} + 2612s^{22} + 2.862.10^4s^{21} + 1.088.10^7s^{18} \\ & + 2.523.10^5s^{20} + 1.82.10^6s^{19} + 5.428.10^7s^{17} + 2.273.10^8s^{16} + 8.005.10^8s^{15} \\ & + 2.372.10^9s^{14} + 5.9.10^9s^{13} + 1.225.10^{10}s^{12} + 2.107.10^{10}s^{11} + 2.962.10^{10}s^{10} \\ & + 3.341.10^{10}s^9 + 2.941.10^{10}s^8 + 1.931.10^{10}s^7 + 8.743.10^9s^6 + 2.286.10^9s^5 \\ & + 1.519.10^8s^4 - 5.226.10^7s^3 + 3.6.10^{-6}s^2 + 5.32.10^{-22}s \end{aligned}$$

(Quá trình tính toán bộ điều khiển được thể hiện ở phụ lục 10 và phụ lục 11)

Bộ điều khiển bậc 30 sẽ dẫn tới nhiều bất lợi (được trình bày trong mục 3.1) khi chúng ta thực hiện điều khiển cân bằng xe. Vì vậy vấn đề cấp thiết đặt ra là cần phải giảm bậc bộ điều khiển bậc 30 đáp ứng các yêu cầu sau:

1. Bộ điều khiển giảm bậc vẫn đảm bảo chất lượng điều khiển tương đương bộ điều khiển gốc (sai lệch chất lượng điều khiển nhỏ) - thoả mãn được yêu cầu ổn định bền vững của hệ thống;
2. Bậc của bộ điều khiển nhỏ.

Bộ điều khiển bền vững bậc 30 là một mô hình tuyến tính không ổn định nên phần tiếp theo đây tác giả sẽ áp dụng hai thuật toán giảm bậc được đề xuất trong mục 2.5 của Chương 2 để giảm bậc bộ điều khiển thoả mãn các yêu cầu trên.

3.3.2. Giảm bậc bộ điều khiển bền vững theo thuật toán giảm bậc gián tiếp

Thực hiện giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc 30 theo thuật toán giảm bậc gián tiếp (thuật toán 2.5.1) ở chương 2, kết quả thu được như sau:

Chuyển bộ điều khiển bền vững bậc 30 về dạng biểu diễn tối thiểu, ta thu được kết quả là:

$$\mathbf{R}_m(s) = \frac{\mathbf{H}_m(s)}{\mathbf{D}_m(s)} \quad (3.1)$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m(s) = & -4.485.10^6 s^{27} - 4.231.10^8 s^{26} - 1.912.10^{10} s^{25} - 5.51.10^{11} s^{24} - 1.138.10^{13} s^{23} \\ & - 1.794.10^{14} s^{22} - 2.245.10^{15} s^{21} - 2.29.10^{16} s^{20} - 1.939.10^{17} s^{19} - 1.381.10^{18} s^{18} \\ & - 8.359.10^{18} s^{17} - 4.33.10^{19} s^{16} - 1.929.10^{20} s^{15} - 7.413.10^{20} s^{14} - 2.462.10^{21} s^{13} \\ & - 7.066.10^{21} s^{12} - 1.75.10^{22} s^{11} - 3.732.10^{22} s^{10} - 6.814.10^{22} s^9 - 1.058.10^{23} s^8 \\ & - 1.385.10^{23} s^7 - 1.508.10^{23} s^6 - 1.341.10^{23} s^5 - 9.487.10^{22} s^4 - 5.138.10^{22} s^3 \\ & - 2.001.10^{22} s^2 - 4.99.10^{21} s - 5.987.10^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m(s) = & s^{27} + 2088s^{26} + 1.803.10^5 s^{25} + 7.485.10^6 s^{24} + 1.966.10^8 s^{23} + 3.66.10^9 s^{22} \\ & + 5.14.10^{10} s^{21} + 5.657.10^{11} s^{20} + 5.003.10^{12} s^{19} + 3.618.10^{13} s^{18} + 2.166.10^{14} s^{17} \\ & + 1.083.10^{15} s^{16} + 4.539.10^{15} s^{15} + 1.601.10^{16} s^{14} + 4.748.10^{16} s^{13} + 1.182.10^{17} s^{12} \\ & + 2.456.10^{17} s^{11} + 4.226.10^{17} s^{10} + 5.944.10^{17} s^9 + 6.709.10^{17} s^8 + 5.908.10^{17} s^7 \\ & + 3.881.10^{17} s^6 + 1.758.10^{17} s^5 + 4.598.10^{16} s^4 + 3.058.10^{15} s^3 - 1.051.10^{15} s^2 \end{aligned}$$

Bước 1-5: Thực hiện phân tách bộ điều khiển thành phần hệ ổn định và phần hệ không ổn định thu được kết quả như sau:

Phân hệ ổn định

$$\mathbf{R}_{od}(s) = \frac{\mathbf{A}(s)}{\mathbf{B}(s)}$$

Với

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) = & -4.485.10^6 s^{24} - 4.235.10^8 s^{23} - 1.904.10^{10} s^{24} - 5.422.10^{11} s^{22} - 1.098.10^{13} s^{20} \\ & - 1.683.10^{14} s^{19} - 2.029.10^{15} s^{18} - 1.974.10^{16} s^{17} - 1.576.10^{17} s^{16} - 1.046.10^{18} s^{15} \\ & - 5.827.10^{18} s^{14} - 2.737.10^{19} s^{13} - 1.088.10^{20} s^{12} - 3.666.10^{20} s^{11} - 1.046.10^{21} s^{10} \\ & - 2.518.10^{21} s^9 - 5.092.10^{21} s^8 - 8.575.10^{21} s^7 - 1.188.10^{22} s^6 - 1.331.10^{22} s^5 \\ & - 1.175.10^{22} s^4 - 7.877.10^{21} s^3 - 3.766.10^{21} s^2 - 1.144.10^{21} s - 1.659.10^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(s) = & s^{24} + 2088s^{23} + 1.806.10^5 s^{22} + 7.504.10^6 s^{21} + 1.973.10^8 s^{20} + 3.681.10^9 s^{19} \\ & + 5.178.10^{10} s^{18} + 5.71.10^{11} s^{17} + 5.062.10^{12} s^{16} + 3.671.10^{13} s^{15} + 2.204.10^{14} s^{14} \\ & + 1.105.10^{15} s^{13} + 4.653.10^{15} s^{12} + 1.649.10^{16} s^{11} + 4.918.10^{16} s^{10} + 1.233.10^{17} s^9 \\ & + 2.583.10^{17} s^8 + 4.492.10^{17} s^7 + 6.408.10^{17} s^6 + 7.371.10^{17} s^5 + 6.669.10^{17} s^4 \\ & + 4.57.10^{17} s^3 + 2.23.10^{17} s^2 + 6.9.10^{16} s + 1.018.10^{16} \end{aligned}$$

Phân hệ không ổn định

$$R_{ko}(s) = \frac{-5.838.10^4 s^2 - 9.163.10^4 s - 5.881.10^4}{s^3 - 0.1032s^2 + 1.185.10^{-17} s - 1.513.10^{-18}}$$

Bước 6: Thực hiện giảm bậc phân hệ ổn định $R_{od}(s)$ của bộ điều khiển theo các thuật toán sau:

Thuật toán 2.3.2: Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác

Thuật toán 2.3.3. Thuật toán sắp xếp lại điểm cực theo chỉ số trội H_2 , H_∞ và chỉ số trội hỗn hợp H_2/H_∞

Kết quả thu được các hệ giảm bậc phân hệ ổn định $R_{od}(s)$ được thể hiện trong bảng 3.3 như sau:

Bảng 3.3. Kết quả giảm bậc phân hệ ổn định của bộ điều khiển bậc cao

Bậc	Hệ rút gọn $R_{odr}(s)$
2	$\frac{-4.485.10^6 s^2 - 6.844.10^7 s - 3.02.10^8}{s^2 + 2009s + 1.853.10^4}$
1	$\frac{-4.485.10^6 s - 2.69.10^7}{s + 2000}$

Đầu ra: Hệ giảm bậc $R_r(s) = R_{odr}(s) + R_{ko}(s)$ được thể hiện trong bảng 3.4 như sau:

Bảng 3.4. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao

Bậc	Hệ rút gọn $R_r(s)$
5	$\frac{-4.485.10^6 s^5 - 6.804.10^7 s^4 - 4.123.10^8 s^3 - 1.235.10^9 s^2 - 1.816.10^9 s - 1.09.10^9}{s^5 + 2009s^4 + 1.833.10^4 s^3 - 1913s^2 + 2.165.10^{-13} s - 2.804.10^{-14}}$
4	$\frac{-4.485.10^6 s^4 - 2.65.10^7 s^3 - 1.141.10^8 s^2 - 1.833.10^8 s - 1.176.10^8}{s^4 + 2000s^3 - 206.5s^2 + 2.369.10^{-14} s - 3.026.10^{-15}}$

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 3, 4, 5, 6 (*hinf_MK.m*, *htwo_MK.m*, *Mixed_MK.m*, *Re_Ustable_TT.m*)

3.3.3. Giảm bậc bộ điều khiển bền vững theo thuật toán giảm bậc trực tiếp

Tương tự như mục 3.3.2, để áp dụng thuật toán giảm bậc trực tiếp cho bộ điều khiển bền vững bậc 30, tác giả chuyển hệ về dạng biểu diễn tối thiểu và thu được kết quả $\mathbf{R}_m(s)$ như công thức 3.1.

Thuật toán 2.5.2: Thuật toán chặt cân bằng mở rộng cho hệ không ổn định

Bước 1: Xác định điểm cực α không ổn định lớn nhất của bộ điều khiển bậc 27, ta được $\alpha = 0.1032$. Đặt $\beta = \alpha + \delta = 0.1132$.

Bước 2: Chuyển đổi bộ điều khiển bậc 27 thành hệ $\mathbf{R}_{m\beta}(s)$ ổn định thu được kết

quả sau:

$$\mathbf{R}_{m\beta}(s) = \frac{\mathbf{H}_{m\beta}(s)}{\mathbf{D}_{m\beta}(s)} \quad (3.2)$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m\beta}(s) = & -4.485 \cdot 10^6 s^{27} - 4.368 \cdot 10^8 s^{26} - 2.038 \cdot 10^{10} s^{25} - 6.069 \cdot 10^{11} s^{24} - 1.295 \cdot 10^{13} s^{23} \\ & - 2.111 \cdot 10^{14} s^{22} - 2.731 \cdot 10^{15} s^{21} - 2.88 \cdot 10^{16} s^{20} - 2.522 \cdot 10^{17} s^{19} - 1.859 \cdot 10^{18} s^{18} \\ & - 1.164 \cdot 10^{19} s^{17} - 6.239 \cdot 10^{19} s^{16} - 2.877 \cdot 10^{20} s^{15} - 1.145 \cdot 10^{21} s^{14} - 3.935 \cdot 10^{21} s^{13} \\ & - 1.17 \cdot 10^{22} s^{12} - 3.001 \cdot 10^{22} s^{11} - 6.626 \cdot 10^{22} s^{10} - 1.253 \cdot 10^{23} s^9 - 2.017 \cdot 10^{23} s^8 \\ & - 2.735 \cdot 10^{23} s^7 - 3.084 \cdot 10^{23} s^6 - 2.841 \cdot 10^{23} s^5 - 2.082 \cdot 10^{23} s^4 - 1.168 \cdot 10^{23} s^3 \\ & - 4.715 \cdot 10^{22} s^2 - 1.218 \cdot 10^{22} s - 1.514 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m(s) = & s^{27} + 2091 s^{26} + 1.865 \cdot 10^5 s^{25} + 8.004 \cdot 10^6 s^{24} + 2.176 \cdot 10^8 s^{23} + 4.199 \cdot 10^9 s^{22} \\ & + 6.118 \cdot 10^{10} s^{21} + 6.993 \cdot 10^{11} s^{20} + 6.431 \cdot 10^{12} s^{19} + 4.843 \cdot 10^{13} s^{18} + 3.024 \cdot 10^{14} s^{17} \\ & + 1.578 \cdot 10^{15} s^{16} + 6.925 \cdot 10^{15} s^{15} + 2.562 \cdot 10^{16} s^{14} + 7.994 \cdot 10^{16} s^{13} + 2.101 \cdot 10^{17} s^{12} \\ & + 4.633 \cdot 10^{17} s^{11} + 8.511 \cdot 10^{17} s^{10} + 1.29 \cdot 10^{18} s^9 + 1.59 \cdot 10^{18} s^8 + 1.562 \cdot 10^{18} s^7 \\ & + 1.187 \cdot 10^{18} s^6 + 6.677 \cdot 10^{17} s^5 + 2.595 \cdot 10^{17} s^4 + 6.192 \cdot 10^{16} s^3 + 7.312 \cdot 10^{15} s^2 \\ & + 3.447 \cdot 10^{14} s + 2.776 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Bước 3-9: Kết quả thu được hệ giảm bậc hệ $\hat{\mathbf{R}}_{1\beta}(s)$ thể hiện ở bảng 3.5 như sau:

Bảng 3.5. Các hệ giảm bậc $\hat{\mathbf{R}}_{1\beta}(s)$ ổn định

Bậc	Hệ giảm bậc $\hat{\mathbf{R}}_{1\beta}(s)$
5	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^5 - 7.058 \cdot 10^7 s^4 - 4.437 \cdot 10^8 s^3 - 1.38 \cdot 10^9 s^2 - 2.112 \cdot 10^9 s - 1.312 \cdot 10^9}{s^5 + 2010s^4 + 1.924e^4 s^3 + 4467s^2 + 283.3s + 2.406}$
4	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 2.858 \cdot 10^7 s^3 - 1.285 \cdot 10^8 s^2 - 2.091 \cdot 10^8 s - 1.402 \cdot 10^8}{s^4 + 2000s^3 + 473.9s^2 + 30.25s + 0.2572}$

Bước 10: Chuyển đổi hệ giảm bậc $\hat{\mathbf{R}}_{1\beta}(s)$ về hệ $\hat{\mathbf{R}}_1(s)$ (hệ giảm bậc ổn định – β) thu được kết quả thể hiện trong bảng 3.6 như sau:

Bảng 3.6. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển bậc cao theo thuật toán chặt cân bằng mở rộng

Bậc	Hệ giảm bậc $\hat{\mathbf{R}}_1(s)$
5	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^5 - 6.804 \cdot 10^7 s^4 - 4.123 \cdot 10^8 s^3 - 1.235 \cdot 10^9 s^2 - 1.816 \cdot 10^9 s - 1.09 \cdot 10^9}{s^5 + 2009s^4 + 1.833 \cdot 10^4 s^3 - 1913s^2 + 6.614 \cdot 10^{-9} s - 8.44 \cdot 10^{-10}}$
4	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 2.655 \cdot 10^7 s^3 - 1.191 \cdot 10^8 s^2 - 1.811 \cdot 10^8 s - 1.182 \cdot 10^8}{s^4 + 2000s^3 - 205.6s^2 - 0.1231s + 0.003463}$

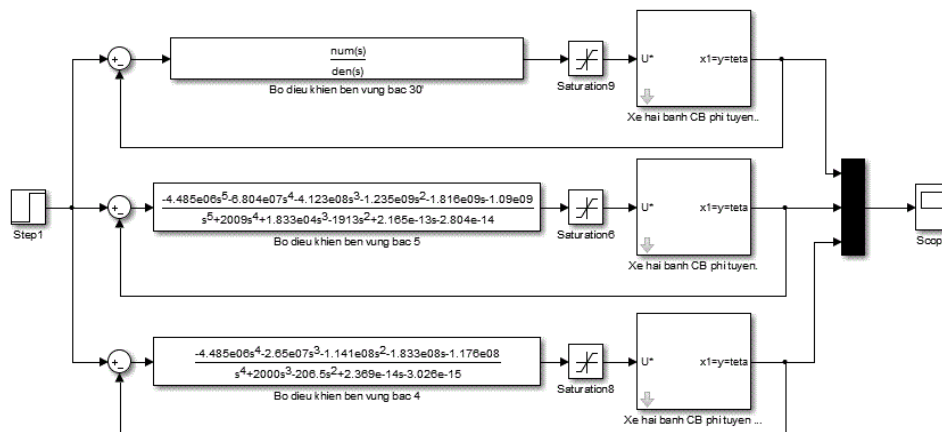
Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 7 (*balance_new.m*)

Lưu ý: Tác giả sẽ gọi bộ điều khiển bền vững giảm bậc (bậc r) là bộ điều khiển bậc r .

3.3.4. Áp dụng bộ điều khiển giảm bậc điều khiển cân bằng xe hai bánh

3.3.4.1. Theo thuật toán giảm bậc gián tiếp

Sử dụng các bộ điều khiển giảm bậc để điều khiển mô hình xe hai bánh tự cân bằng, tác giả lựa chọn bộ điều khiển bền vững bậc 5 và bộ điều khiển bền vững bậc 4 (theo bảng 3.4) để điều khiển xe. Mô hình Simulink mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng các bộ điều khiển giảm bậc được thể hiện trên hình 3.6 như sau:



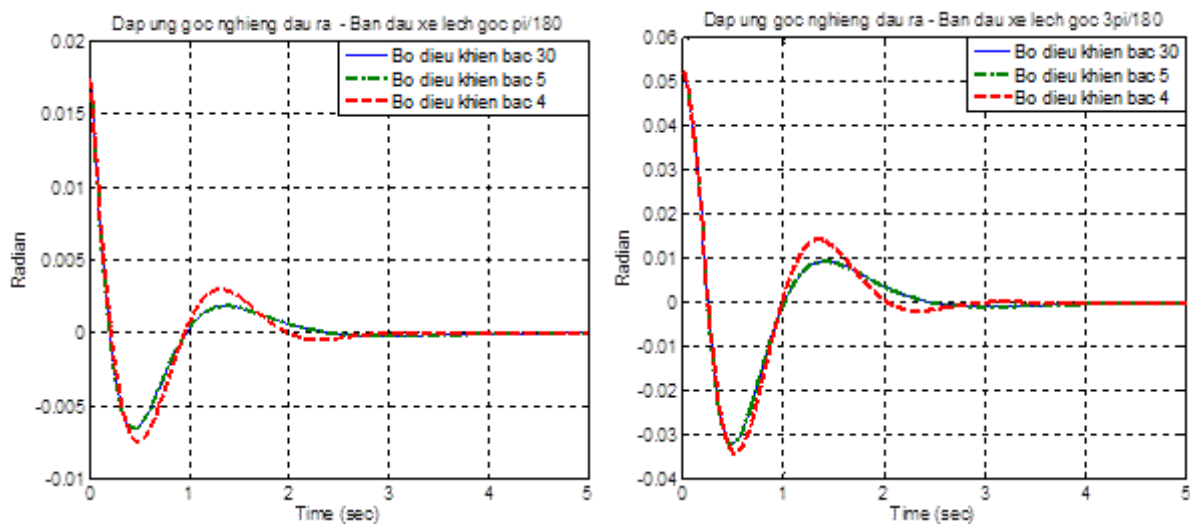
Hình 3.6. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh

Kết quả mô phỏng:

- Khi các thông số của mô hình xe hai bánh là danh định (bảng 9.1 trong phụ lục 9) và ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc

$$\theta = \left(\frac{\pi}{180} \div \frac{3\pi}{180} \right) (rad) \text{ thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe}$$

được thể hiện trên hình 3.7 như sau:



(a)

(b)

Hình 3.7. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và bộ điều khiển bậc 5, bậc 4

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 5 theo thuật toán giảm bậc gián tiếp là:

- + Số lần dao động: 2 lần
- + Thời gian ổn định : 2,4 s
- + Sai lệch tĩnh : 0%

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian ổn định : 2,6 s
- + Sai lệch tĩnh : 0%

Nhận xét: Từ các kết quả trên hình 3.7 ta thấy: Sử dụng bộ điều khiển bậc 5, bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp có thể điều khiển cân bằng cho xe hai bánh khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với thông số mô hình xe danh định trong đó:

+ Đáp ứng đầu ra hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 5 hoàn toàn trùng khít với đáp ứng đầu của hệ thống cân bằng xe hai bánh khi sử dụng bộ điều khiển gốc.

+ Đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh khi sử dụng bộ điều khiển bậc 4 có sự sai khác so với đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh khi sử dụng bộ điều khiển gốc nhưng vẫn đảm bảo điều khiển ổn định xe hai bánh tự cân bằng. Cụ thể: Chất lượng đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh khi sử dụng bộ điều khiển giảm bậc 4 kém hơn (số lần dao động lớn hơn, thời gian đáp ứng lớn hơn, biên độ dao động lớn hơn) so với đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh khi sử dụng bộ điều khiển gốc.

(*) So sánh hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc, bộ điều khiển giảm bậc theo phương pháp giảm bậc mới và bộ điều khiển giảm bậc theo các phương pháp giảm bậc khác.

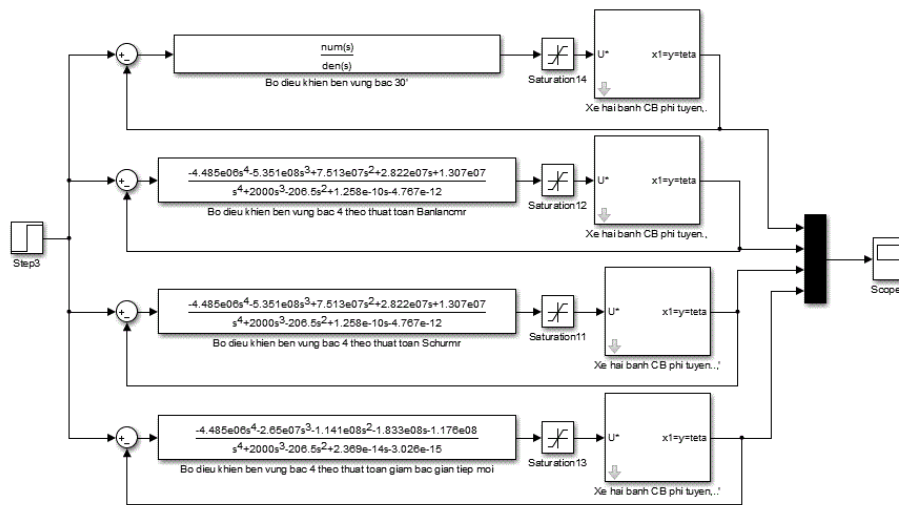
Để minh họa hiệu quả của thuật toán giảm bậc mới tác giả so sánh kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc bằng thuật toán giảm bậc mới với kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc bằng thuật toán chặt cân bằng theo tài liệu [57], thuật toán dựa

trên phân tích Schur theo tài liệu [29], [70]. Trong Matlab, thực hiện giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng theo tài liệu [57] ta sử dụng lệnh **balancmr**, thuật toán dựa trên phân tích Schur theo tài liệu [29], [70] sử dụng lệnh **schurmr** kết quả giảm bậc được thể hiện ở bảng 3.7 như sau:

Bảng 3.7. Bộ điều khiển bậc 4 theo các thuật toán giảm bậc cơ bản

Thuật toán	Hệ giảm bậc $R_r(s)$
Balancmr	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 5.351 \cdot 10^8 s^3 + 7.513 \cdot 10^7 s^2 + 2.822 \cdot 10^7 s + 1.307 \cdot 10^7}{s^4 + 2000 s^3 - 206.5 s^2 + 1.258 \cdot 10^{-10} s - 4.767 \cdot 10^{-12}}$
Schurmr	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 5.351 \cdot 10^8 s^3 + 7.513 \cdot 10^7 s^2 + 2.822 \cdot 10^7 s + 1.307 \cdot 10^7}{s^4 + 2000 s^3 - 206.5 s^2 + 1.258 \cdot 10^{-10} s - 4.767 \cdot 10^{-12}}$

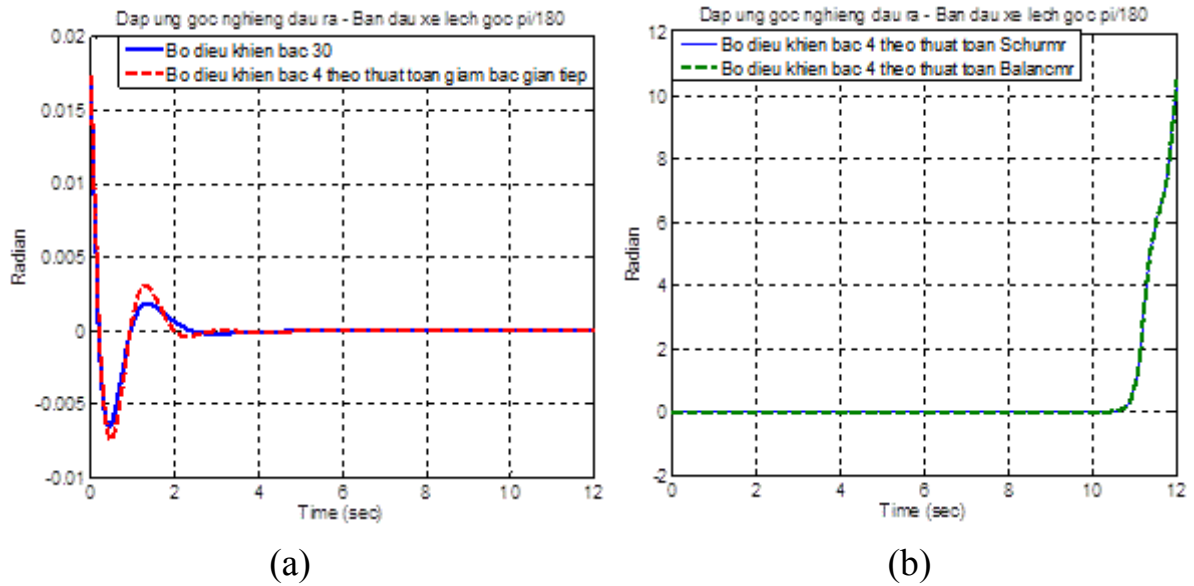
Sơ đồ mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh: được thể hiện trên hình 3.8 như sau:



Hình 3.8. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh

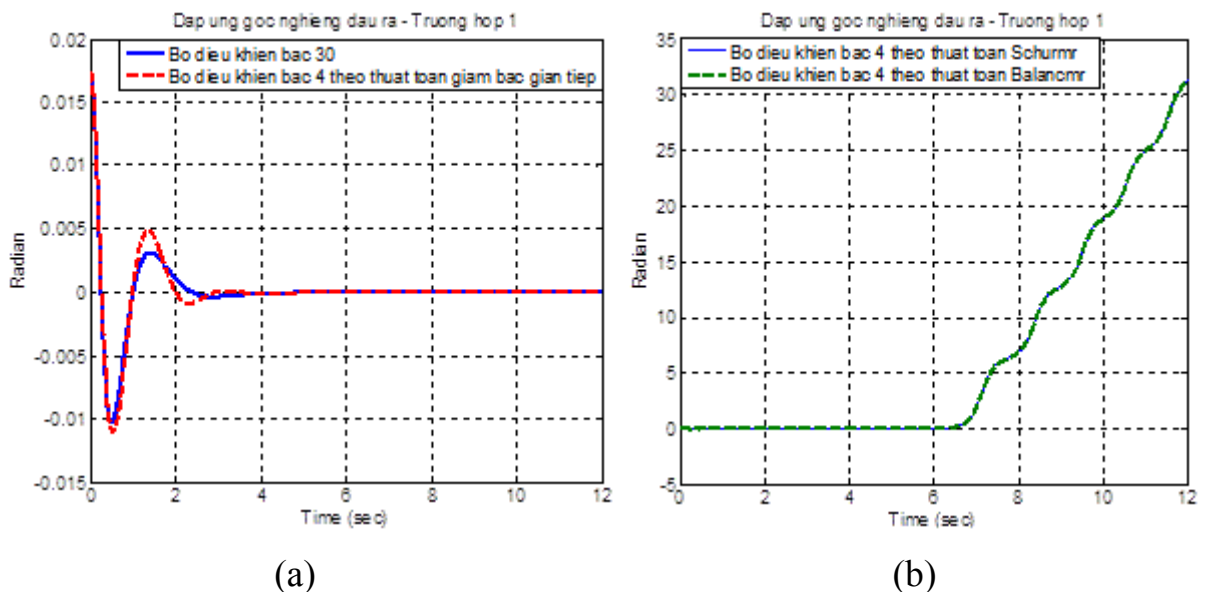
Kết quả mô phỏng

- Khi các thông số của mô hình xe hai bánh là danh định (bảng 9.1 trong phụ lục 9) và ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\theta = \frac{\pi}{180} (rad)$ thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe được thể hiện trên hình 3.9 như sau:

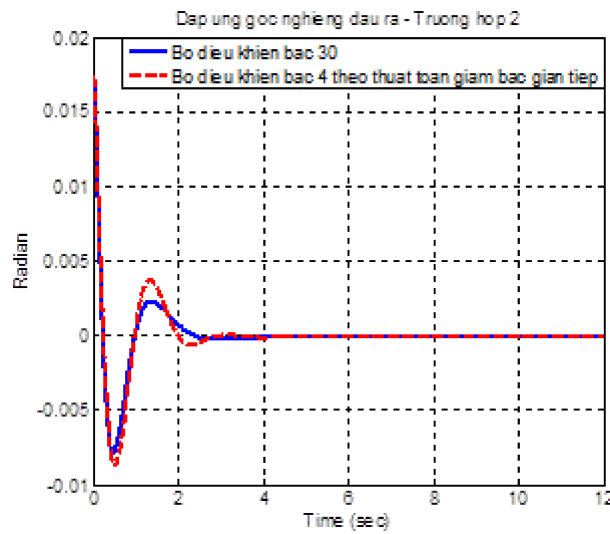


Hình 3.9. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4

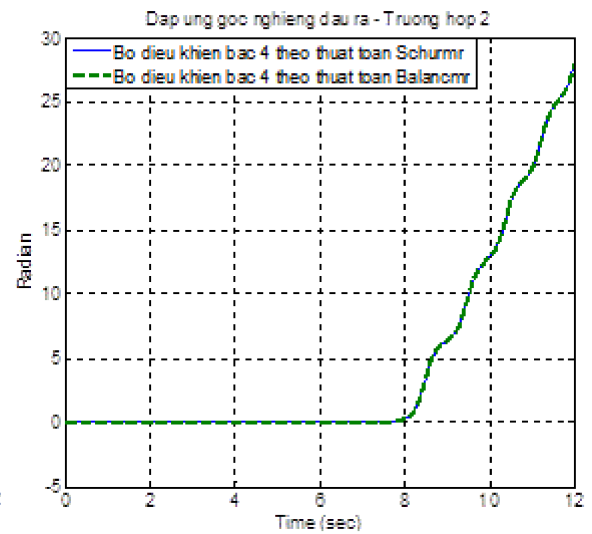
- Khi các thông số của mô hình xe hai bánh thay đổi (bảng 9.2 trong phụ lục 9), ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\theta = \frac{\pi}{180}$ (rad) thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe được thể hiện trên hình 3.10, hình 3.11, hình 3.12 và hình 3.13 như sau:



Hình 3.10. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 1

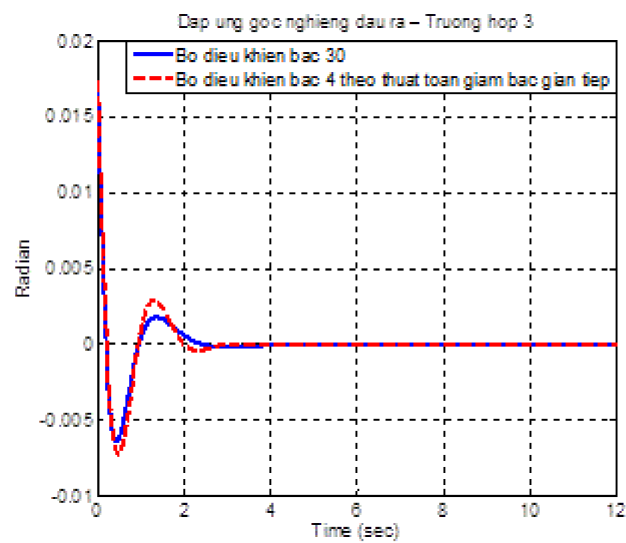


(a)

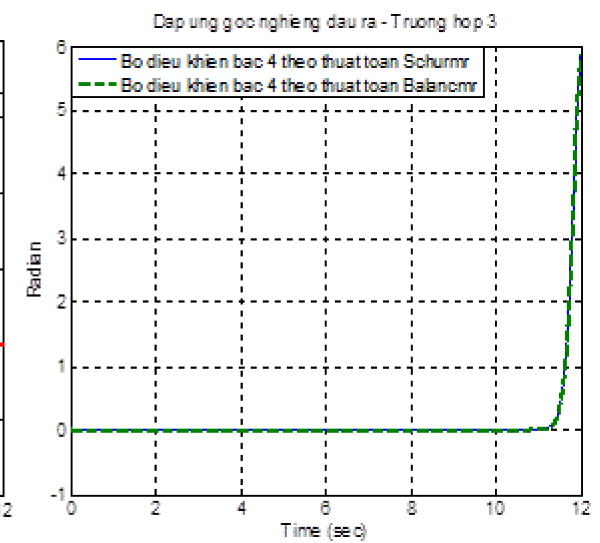


(b)

Hình 3.11. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 2

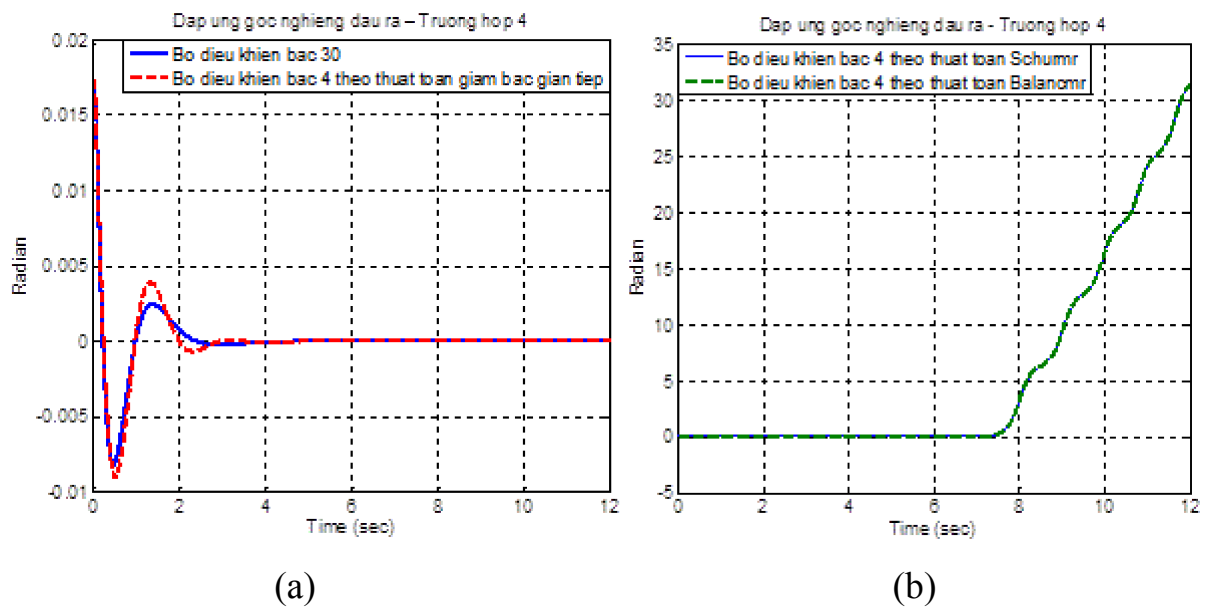


(a)



(b)

Hình 3.12. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 3



Hình 3.13. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 trong trường hợp 4

Nhận xét: Từ các kết quả trên hình 3.10 đến hình 3.13 cho thấy: So sánh chất lượng hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc gián tiếp với hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng các bộ điều khiển bậc 4 theo các thuật toán giảm bậc gián tiếp hệ không ổn định khác cho thấy:

- + Hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc gián tiếp có khả năng điều khiển cân bằng ổn định xe hai bánh khi xe bị nghiêng khỏi phương thẳng đứng với thông số mô hình xe danh định và với thông số mô hình xe thay đổi.

- + Hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng (*balancmr*) theo tài liệu [57] và thuật toán dựa trên phân tích Schur (*schurmr*) theo tài liệu [29], [70] **không** có khả năng điều khiển cân bằng ổn định được xe hai bánh khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với thông số mô hình xe danh định và với thông số mô hình xe thay đổi.

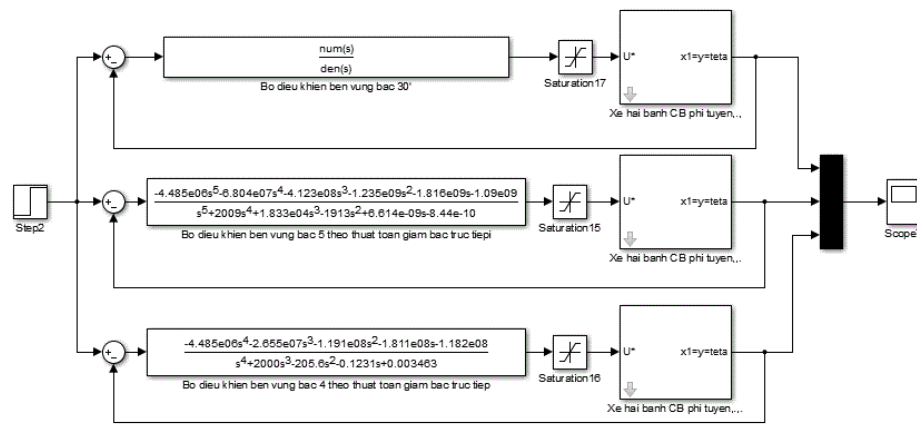
Do đó, bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc gián tiếp hoàn toàn thỏa mãn điều kiện của bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc 30 nên có thể thay thế bộ điều khiển gốc (bậc 30) bằng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán mới để

điều khiển cân bằng xe hai bánh mà chất lượng hệ thống điều khiển cân bằng vẫn được đảm bảo.

3.3.4.2. Theo thuật toán giảm bậc trực tiếp

Sử dụng các bộ điều khiển bền vững giảm bậc theo thuật toán giảm bậc trực tiếp để điều khiển mô hình xe hai bánh tự cân bằng, tác giả lựa chọn bộ điều khiển bền vững bậc 5 và bậc 4 (theo bảng 3.6) để điều khiển xe.

Sơ đồ mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh được thể hiện trên hình 3.14 như sau:



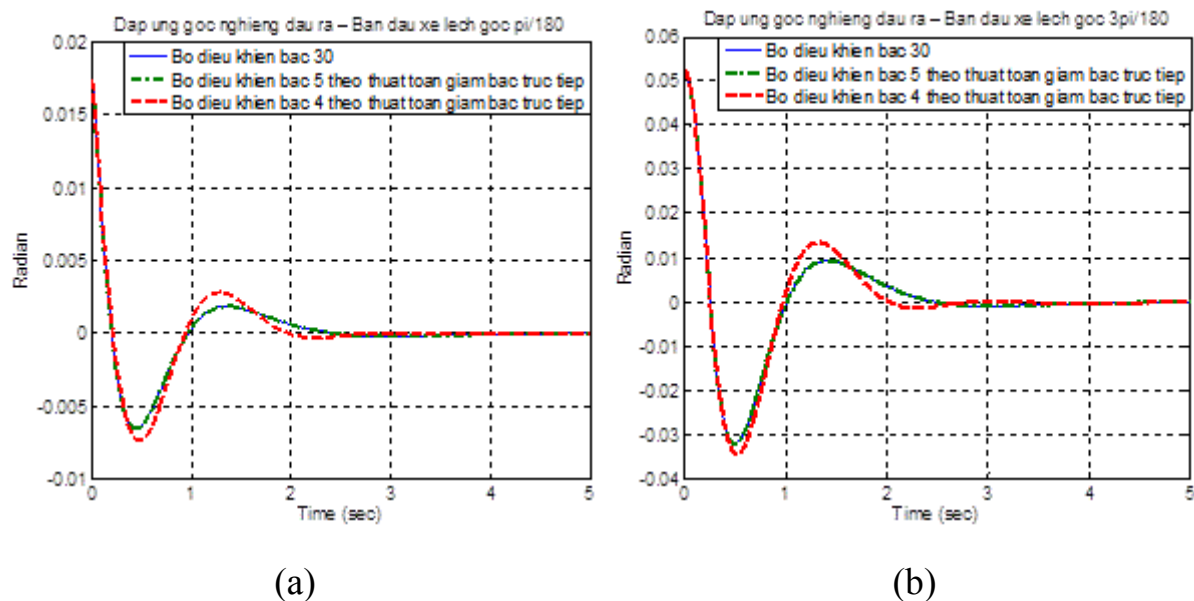
Hình 3.14. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh

Kết quả mô phỏng:

- Khi các tham số của mô hình xe hai bánh là danh định (bảng 9.1 trong phụ lục 9) và ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc

$\theta = \left(\frac{\pi}{180} \div \frac{3\pi}{180} \right) (rad)$ thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe

được thể hiện trên hình 3.15 như sau:



Hình 3.15. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc và bộ điều khiển bậc 5, bậc 4

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 5 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Số lần dao động: 2 lần
- + Thời gian ổn định : 2,4 s
- + Sai lệch tĩnh : 0%.

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian ổn định : 2,6 s
- + Sai lệch tĩnh : 0%

Nhận xét: Từ các kết quả trên hình 3.15 ta thấy: Sử dụng bộ điều khiển bậc 5, bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp có thể điều khiển cân bằng cho xe hai bánh khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với thông số mô hình xe danh định trong đó:

- + Đáp ứng đầu ra hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 5 hoàn toàn trùng khít với đáp ứng đầu của hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển góc.

+ Đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 có sự sai khác so với đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc. Cụ thể: Chất lượng đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển giảm bậc 4 kém hơn (số lần dao động lớn hơn, thời gian đáp ứng lớn hơn, biên độ dao động lớn hơn) so với đáp ứng đầu ra của hệ thống cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc.

(*) **So sánh** hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc, bộ điều khiển giảm bậc theo phương pháp giảm bậc trực tiếp và các phương pháp giảm bậc khác.

Để minh chứng hiệu quả của thuật toán chặt cân bằng mở rộng tác giả so sánh kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng mở rộng với kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou [88] và thuật toán cân bằng LQG [38].

Thực hiện giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou [88] và thuật toán cân bằng LQG [38], kết quả được thể hiện ở các bảng 3.8 và bảng 3.9 như sau:

Bảng 3.8. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou

Bậc	Hệ giảm bậc $\mathbf{R}_r(s)$
4	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 2.669 \cdot 10^7 s^3 - 1.68 \cdot 10^8 s^2 - 5.911 \cdot 10^7 s - 1.594 \cdot 10^8}{s^4 + 2000s^3 - 111.9s^2 - 12.12s + 0.512}$

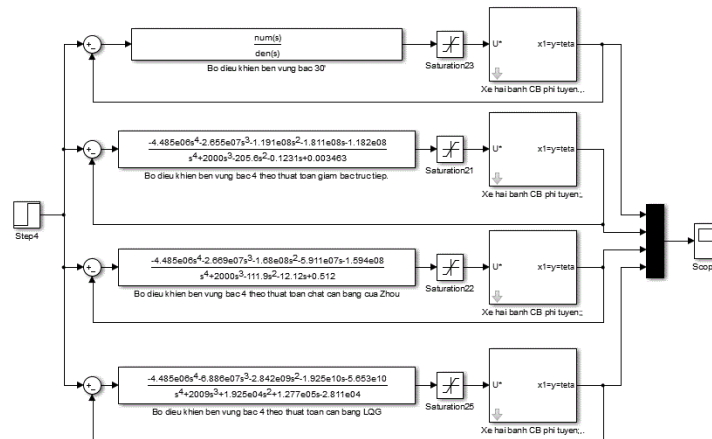
Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 1 (***balance_Zhou.m***)

Bảng 3.9. Kết quả giảm bậc bộ điều khiển gốc theo thuật toán cân bằng LQG

Bậc	Hệ giảm bậc $\mathbf{R}_{lqr}(s)$
4	$\frac{-4.485 \cdot 10^6 s^4 - 6.886 \cdot 10^7 s^3 - 2.842 \cdot 10^9 s^2 - 1.925 \cdot 10^{10} s - 5.653 \cdot 10^{10}}{s^4 + 2009s^3 + 1.925 \cdot 10^4 s^2 + 1.277 \cdot 10^5 s - 2.811 \cdot 10^4}$

Quá trình tính toán được thực hiện theo phụ lục 2 (*balance_lqg.m*)

Sơ đồ mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4 được thể hiện trên hình 3.16 như sau:

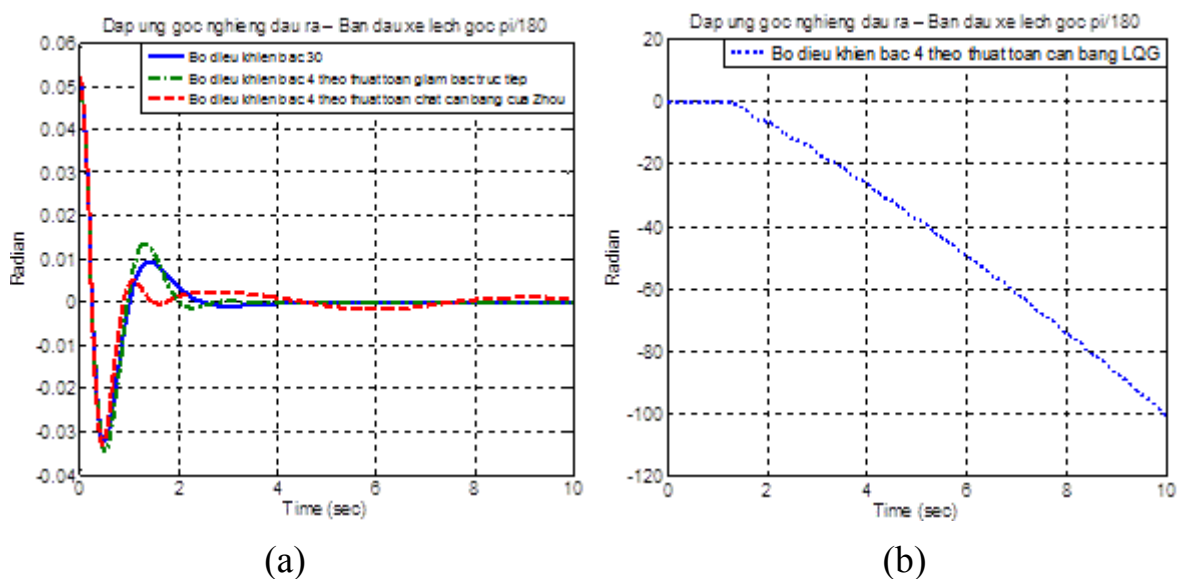


Hình 3.16. Mô hình Simulink hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh

Kết quả mô phỏng:

- Khi các thông số của mô hình xe hai bánh là danh định (bảng 9.1 trong phụ lục 9) và ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\theta = \frac{\pi}{180}(\text{rad})$.

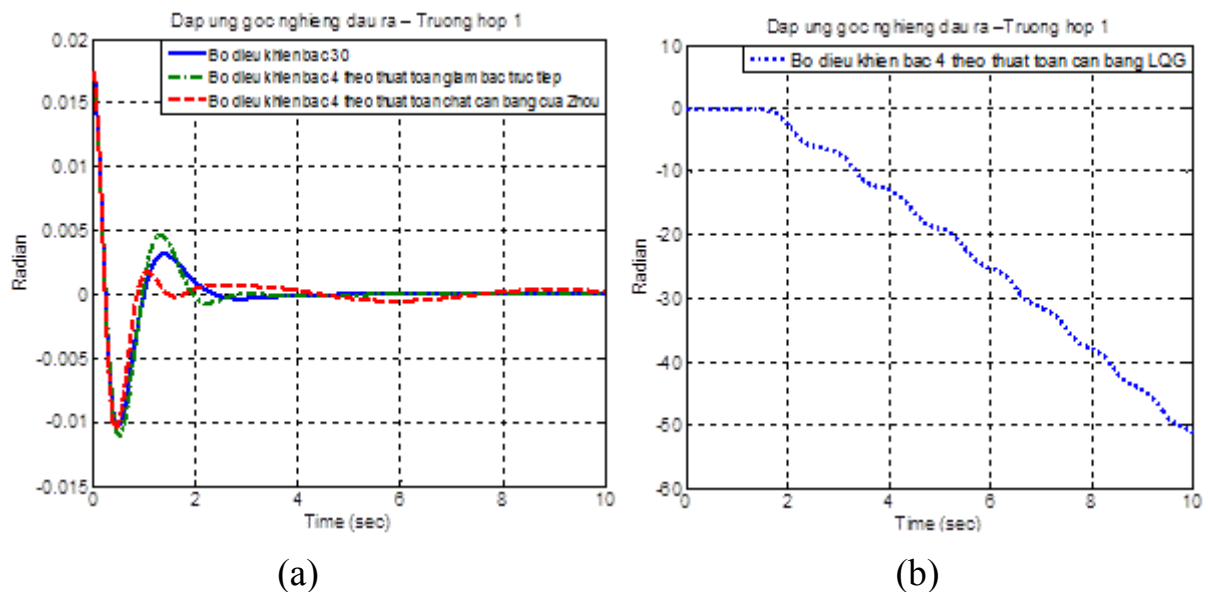
thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe được thể hiện trên hình 3.17a và 3.17b.



Hình 3.17. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển bậc 4

- Khi các thông số của mô hình xe hai bánh thay đổi (bảng 9.2 trong phụ lục 9), ban đầu xe lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\theta = \frac{\pi}{180}(\text{rad})$ thì kết quả mô phỏng hệ thống điều khiển cân bằng xe được thể hiện trên hình 3.18, hình 3.19, hình 3.20 và hình 3.21 như sau:

+ Trường hợp 1:



Hình 3.18. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển giảm bậc 4 trong trường hợp 1

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

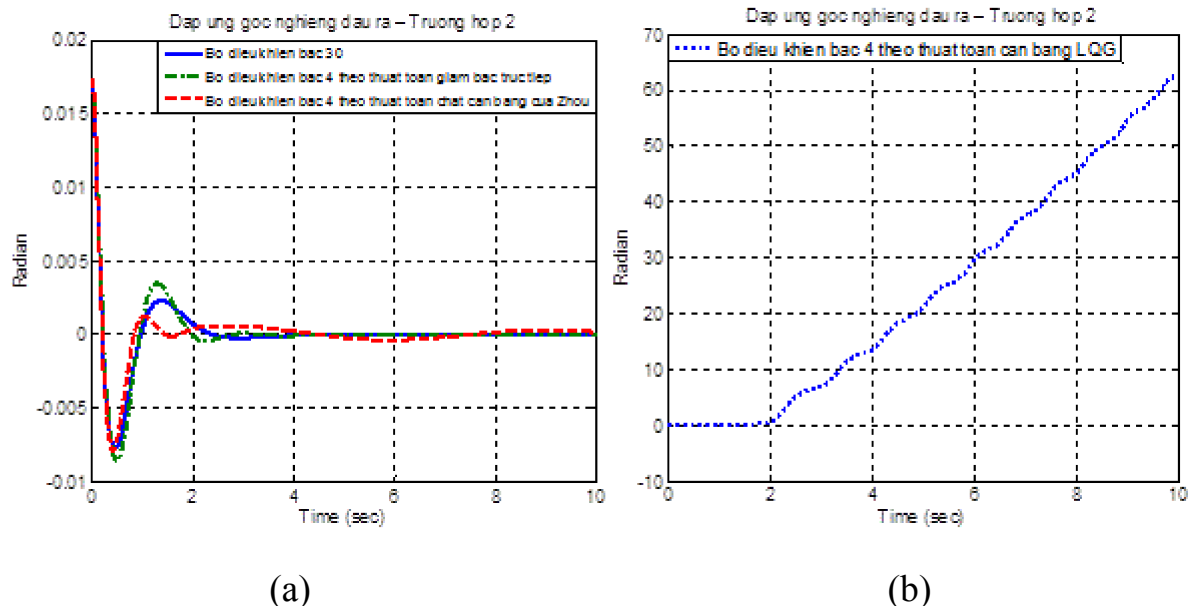
- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.011 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.004625 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.006541 radian
- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian quá độ : 2,6 s
- + Sai lệch tĩnh : 0%

Chất lượng hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou như sau:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.0105 radian

- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.00174 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00019 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 4: + 0.00071 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 5: - 0.0005 radian
- + Số lần dao động: 9
- + Thời gian quá độ: 20 s
- + Sai lệch tĩnh: 0 %

+ Trường hợp 2:



Hình 3.19. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển giảm bậc 4 trong trường hợp 2

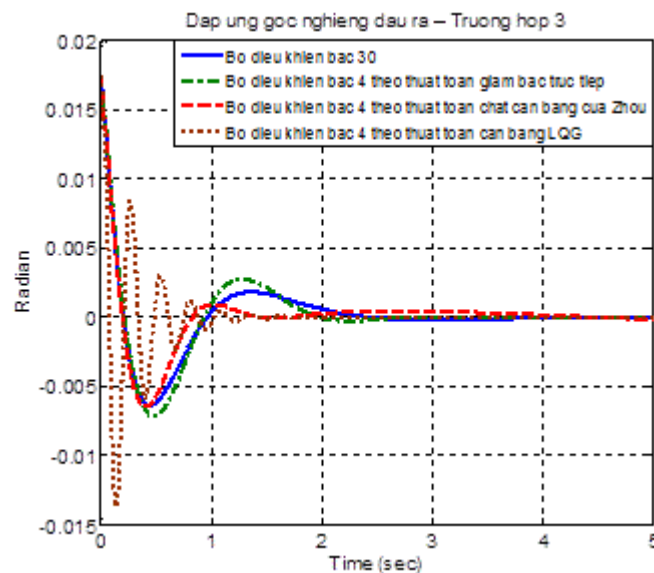
Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.00864 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.00348 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00431 radian
- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian quá độ : 2,6 s

Chất lượng hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou như sau:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.00792 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.00124 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00013 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 4: + 0.0005 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 5: - 0.000365 radian
- + Số lần dao động: 8
- + Thời gian quá độ: 17 s
- + Sai lệch tĩnh: 0 %

+ Trường hợp 3:



Hình 3.20. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển giảm bậc 4 trong trường hợp 3

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.00719 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.00275 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00027 radian
- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian ổn định : 2,6 s

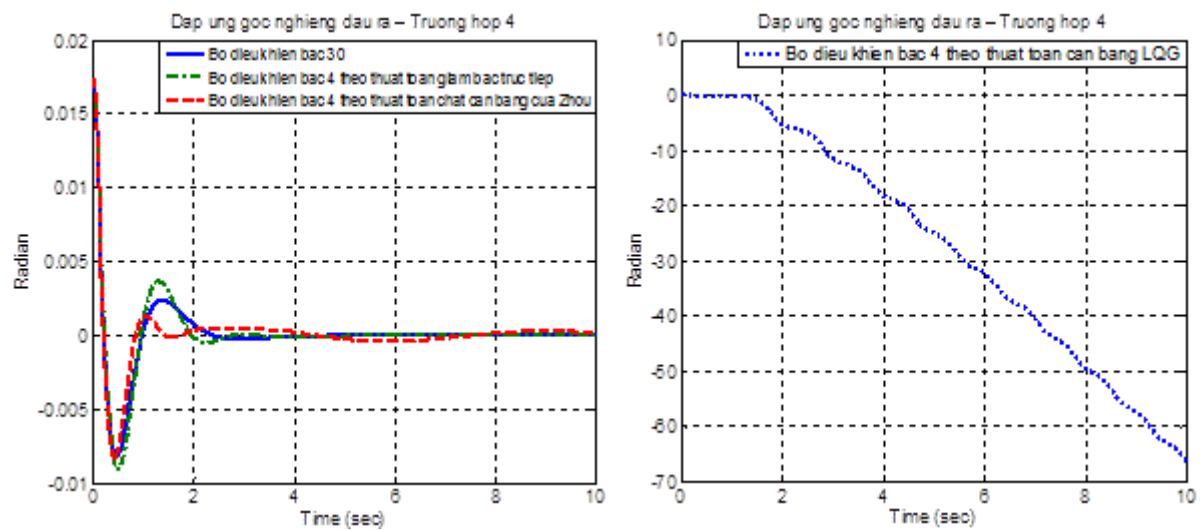
Chất lượng hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou như sau:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.00646 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.000936 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.000087 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 4: + 0.00042 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 5: - 0.0003 radian
- + Số lần dao động: 6
- + Thời gian quá độ: 14.7 s
- + Sai lệch tĩnh: 0 %

Chất lượng hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán cân bằng LQG như sau:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.0137 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.0084 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00584 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 4: + 0.0003 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 5: - 0.00023 radian
- + Số lần dao động: 11
- + Thời gian quá độ: 1.7 s
- + Sai lệch tĩnh: 0 %

+ Trường hợp 4:



(a) (b)
 Hình 3.21. Đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc và các bộ điều khiển giảm bậc 4 trong trường hợp 4

Chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp là:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.0090268 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.00367 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.00431 radian
- + Số lần dao động: 3 lần
- + Thời gian ổn định : 2,6 s

Chất lượng hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou như sau:

- + Biên độ dao động cực đại lần 1: - 0.008333 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 2: + 0.001325 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 3: - 0.000139 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 4: + 0.00054 radian
- + Biên độ dao động cực đại lần 5: - 0.0003855 radian
- + Số lần dao động: 8
- + Thời gian quá độ: 17 s
- + Sai lệch tĩnh: 0 %

Nhận xét: So sánh chất lượng đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng mới với đáp ứng đầu ra của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển giảm bậc 4 theo các thuật toán giảm khác cho thấy:

- + Hệ thống điều khiển cân bằng sử dụng bộ điều khiển giảm bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp có khả năng ổn định được xe khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với thông số mô hình xe danh định và với thông số mô hình xe thay đổi.

- + Hệ thống điều khiển cân bằng sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou có khả năng ổn định được xe khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với mô hình xe danh định và với mô hình xe thay đổi. Hệ thống điều khiển cân bằng sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou có chất lượng đáp ứng kém hơn (số lần dao động lớn hơn, thời gian quá độ lớn hơn) so với chất lượng đáp ứng của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp.

- + Hệ thống điều khiển cân bằng sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán cân bằng LQG không có khả năng ổn định được xe khi xe lệch khỏi phương thẳng đứng với mô hình xe danh định và với mô hình xe thay đổi ở trường hợp 1, 2 và 4. Hệ thống này có khả năng cân bằng được xe khi thông số mô hình thay đổi ở trường hợp 3 nhưng số lần dao động của hệ thống lớn.

Từ các kết quả trên ta thấy bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp hoàn toàn thỏa mãn điều kiện của bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc 30 nên có thể thay thế bộ điều khiển gốc (bậc 30) bằng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán giảm bậc trực tiếp để điều khiển cân bằng xe hai bánh mà chất lượng hệ thống điều khiển cân bằng vẫn được đảm bảo.

3.4. Kết luận chương 3

Trong nội dung chương 3, tác giả đã đạt được một số kết quả sau:

1. Áp dụng các thuật toán giảm bậc đã được đề xuất để giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc 28 của hệ thống ổn định góc tải của máy phát đồng bộ trong tài liệu [3] cho thấy có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 4 thay thế bộ điều khiển gốc bậc 28 mà chất lượng hệ thống điều khiển vẫn được đảm bảo. Mặt khác, các bộ điều khiển giảm bậc theo các thuật toán mới đều có bậc **nhỏ hơn** bậc của bộ điều khiển thu được theo thuật toán chặt cân bằng ngẫu nhiên trong tài liệu [3], bậc bộ điều khiển thấp hơn đem lại hiệu quả là lập trình điều khiển đơn giản hơn, tốc độ đáp ứng của hệ thống tốt hơn, khả năng điều khiển thực tốt hơn, chi phí cho phần cứng hệ thống giảm đi so với kết quả trong [3].

2. Áp dụng thuật toán giảm bậc gián tiếp và trực tiếp mới để giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc 30 của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh cho thấy: Sử dụng bộ điều khiển bậc 5, bậc 4 điều khiển xe hai bánh tự cân bằng (mô hình xe được xây dựng trong phòng thí nghiệm) cho chất lượng đáp ứng đầu ra **tương đương** hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển gốc bậc 30 nên có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 5, bậc 4 thay thế bộ điều khiển gốc bậc 30 để điều khiển cân bằng xe hai bánh mà chất lượng (mô phỏng) hệ thống điều khiển cân bằng vẫn được đảm bảo.

3. So sánh hiệu quả của thuật toán giảm bậc gián tiếp mới với các thuật toán giảm bậc gián tiếp khác trong việc giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc 30 của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh cho thấy: Hệ thống điều khiển xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán mới có thể điều khiển cân bằng xe hai bánh trong khi hệ thống điều khiển sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Moore (**balancmr**) và thuật toán chặt cân bằng Schur (**schumr**) không có khả năng điều khiển cân bằng xe hai bánh.

4. So sánh hiệu quả của thuật toán chặt cân bằng mở rộng với các thuật toán giảm bậc trực tiếp khác trong việc giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc 30 của hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh cho thấy: Sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng mở rộng điều khiển cân bằng xe hai bánh

cho cho chất lượng đáp ứng đầu ra **tốt hơn** hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán cân bằng LQG và hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển bậc 4 theo thuật toán chặt cân bằng của Zhou.

5. Các kết quả mô phỏng cho thấy tính đúng đắn của 2 thuật toán giảm bậc và khả năng áp dụng 2 thuật toán để giảm bậc bộ điều khiển bậc cao trong bài toán điều khiển bền vững.

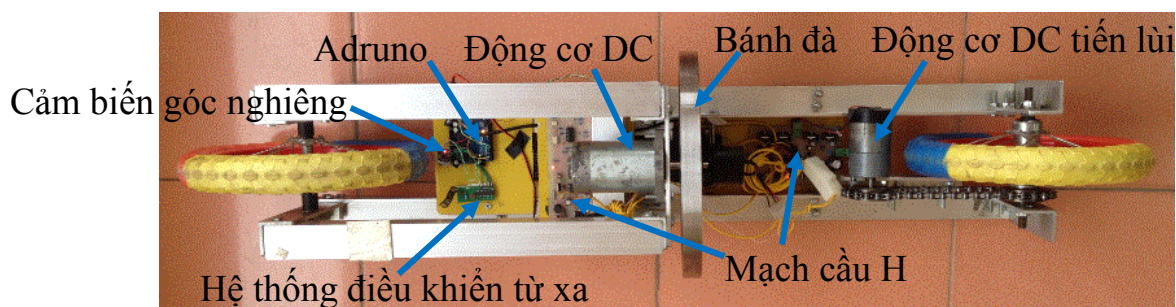
CHƯƠNG 4. THỰC NGHIỆM

Để làm rõ hơn kết quả đã đạt được ở chương 3, trong chương 4 tác giả lựa chọn tiến hành thực nghiệm điều khiển cân bằng xe hai bánh sử dụng bộ điều khiển giảm bậc để kiểm chứng tính đúng đắn của thuật toán giảm bậc đã được đề xuất và khả năng ứng dụng thuật toán giảm bậc trong bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao.

4.1. Hệ thống thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng

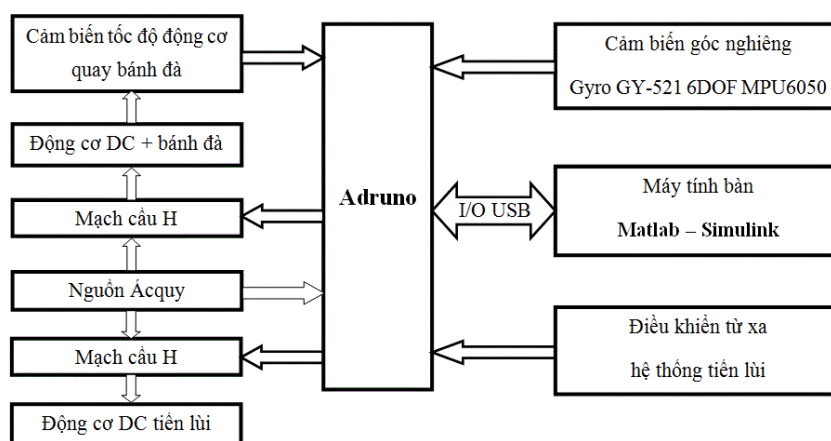
Hệ thống thực nghiệm gồm:

- + Máy tính PC có cài đặt phần mềm từ Matlab – Simulink.
- + Mô hình xe hai bánh tự cân bằng đã được thiết kế ở phần phụ lục 8.



Hình 4.1. Mô hình xe hai bánh tự cân bằng

Để điều khiển cân bằng xe hai bánh, tác giả thực hiện kết nối hệ thống thực nghiệm theo sơ đồ cấu trúc trên hình 4.2 như sau:



Hình 4.2. Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển xe hai bánh tự cân bằng

Bo mạch Arduino sử dụng dòng vi xử lý 8-bit megaAVR của Atmel với hai chip phổ biến nhất là ATmega328 và ATmega2560. Các dòng vi xử lý này cho phép lập trình các ứng dụng điều khiển phức tạp do được trang bị cấu hình mạnh với các loại bộ nhớ ROM, RAM và Flash, các ngõ vào ra digital I/O trong đó có nhiều ngõ có khả năng xuất tín hiệu PWM, các ngõ đọc tín hiệu analog và các chuẩn giao tiếp đa dạng như UART, SPI, TWI (I2C).

Sức mạnh xử lý; Xung nhịp: 16MHz; EEPROM: 1KB (ATmega328) và 4KB (ATmega2560); SRAM: 2KB (Atmega328) và 8KB (Atmega2560); Flash: 32KB (Atmega328) và 256KB (Atmega2560)

Đọc tín hiệu cảm biến ngõ vào:

Digital: Các bo mạch Arduino đều có các cổng digital có thể cấu hình làm ngõ vào hoặc ngõ ra bằng phần mềm. Do đó người dùng có thể linh hoạt quyết định số lượng ngõ vào và ngõ ra. Tổng số lượng cổng digital trên các mạch dùng Atmega328 là 14, và trên Atmega2560 là 54.

Analog: Các bo mạch Arduino đều có trang bị các ngõ vào analog với độ phân giải 10-bit (1024 phân mức, ví dụ với điện áp chuẩn là 5V thì độ phân giải khoảng 0.5mV). Số lượng cổng vào analog là 6 đối với Atmega328, và 16 đối với Atmega2560. Với tính năng đọc analog, người dùng có thể đọc nhiều loại cảm biến như nhiệt độ, áp suất, độ ẩm, ánh sáng, gyro, accelerometer...

Xuất tín hiệu điều khiển ngõ ra:

Digital output: Tương tự như các cổng vào digital, người dùng có thể cấu hình trên phần mềm để quyết định dùng ngõ digital nào là ngõ ra. Tổng số lượng cổng digital trên các mạch dùng Atmega328 là 14, và trên Atmega2560 là 54.

PWM output: Trong số các cổng digital, người dùng có thể chọn một số cổng dùng để xuất tín hiệu điều chế xung PWM. Độ phân giải của các tín hiệu PWM này là 8-bit. Số lượng cổng PWM đối với các bo dùng Atmega328 là 6, và đối với các bo dùng Atmega2560 là 14. PWM có nhiều ứng dụng trong viễn

thông, xử lý âm thanh hoặc điều khiển động cơ mà phổ biến nhất là động cơ servos trong các máy bay mô hình.

Chuẩn giao tiếp:

Serial: Đây là chuẩn giao tiếp nối tiếp được dùng rất phổ biến trên các bo mạch Arduino. Mỗi bo có trang bị một số cổng Serial cứng (việc giao tiếp do phần cứng trong chip thực hiện). Bên cạnh đó, tất cả các cổng digital còn lại đều có thể thực hiện giao tiếp nối tiếp bằng phần mềm (có thư viện chuẩn, người dùng không cần phải viết code). Mức tín hiệu của các cổng này là TTL 5V. Lưu ý cổng nối tiếp RS-232 trên các thiết bị hoặc PC có mức tín hiệu là UART 12V. Để giao tiếp được giữa hai mức tín hiệu, cần phải có bộ chuyển mức, ví dụ như chip MAX232. Số lượng cổng Serial cứng của Atmega328 là 1 và của Atmega2560 là 4. Với tính năng giao tiếp nối tiếp, các bo Arduino có thể giao tiếp được với rất nhiều thiết bị như PC, touchscreen, các game console...

USB: Các bo Arduino tiêu chuẩn đều có trang bị một cổng USB để thực hiện kết nối với máy tính dùng cho việc tải chương trình. Tuy nhiên các chip AVR không có cổng USB, do đó các bo Ardunino phải trang bị thêm phần chuyển đổi từ USB thành tín hiệu UART. Do đó máy tính nhận diện cổng USB này là cổng COM chứ không phải là cổng USB tiêu chuẩn.

SPI: Đây là một chuẩn giao tiếp nối tiếp đồng bộ có bus gồm có 4 dây. Với tính năng này các bo Arduino có thể kết nối với các thiết bị như LCD, bộ điều khiển video game, bộ điều khiển cảm biến các loại, đọc thẻ nhớ SD và MMC...

I2C (TWI): Đây là một chuẩn giao tiếp đồng bộ khác nhưng bus chỉ có hai dây. Với tính năng này, các bo Arduino có thể giao tiếp với một số loại cảm biến như thermostat của CPU, tốc độ quạt, một số màn hình OLED/LCD, đọc real-time clock, chỉnh âm lượng cho một số loại loa...

Để kết nối giữa bo mạch Arduino với máy tính PC tác giả sử dụng cổng I/O USB.

Bộ mạch Arduino có nhiệm vụ:

+ Nhận các tín hiệu cảm biến (cảm biến góc nghiêng và cảm biến tốc độ của động cơ quay bánh đà) sau đó truyền tín hiệu này lên phần mềm Matlab – Simulink trên máy tính PC.

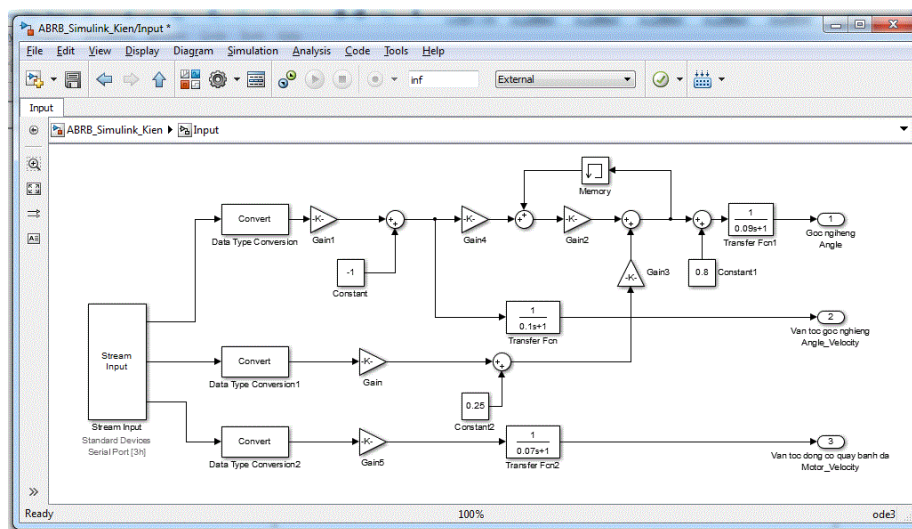
+ Nhận tín hiệu điều khiển từ phần mềm Matlab – Simulink trên máy tính PC để xuất các tín hiệu điều khiển mạch cầu H của động cơ quay bánh đà.

+ Nhận tín hiệu điều khiển từ hệ thống điều khiển từ xa và điều khiển mạch cầu H của động cơ tiến lùi.

Để có thể sử dụng phần mềm Matlab – Simulink thiết kế hệ thống điều khiển và trao đổi dữ liệu với bộ mạch Arduino, tác giả đã thực hiện các bước sau:

- Viết code nạp vào bộ mạch Arduino để Arduino gửi và nhận dữ liệu từ phần mềm Matlab - Simulink trên PC.

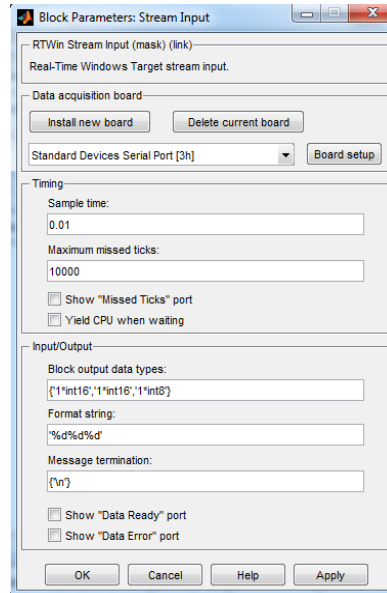
- Xây dựng sơ đồ Matlab - Simulink kết nối dữ liệu với bộ mạch Arduino với hai khối Vào – Ra được thể hiện trên hình 4.3 như sau:



Hình 4.3. Khối xử lý tín hiệu đầu vào (Input) trong Matlab – Simulink

Khối xử lý tín hiệu đầu vào trong Matlab – Simulink có nhiệm vụ:

+ Nhận dữ liệu đo góc nghiêng từ bo mạch Adruno: Khối xử lý tín hiệu góc nghiêng được thể hiện trong hình 4.4 như sau:



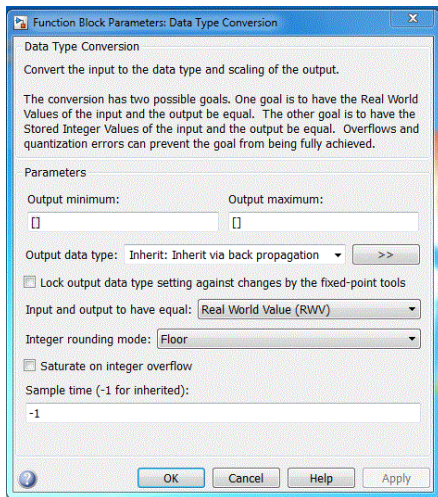
Hình 4.4. Khối nhận tín hiệu của các cảm biến được đưa lên từ bo mạch Adruno

+ Xử lý tín hiệu góc nghiêng. Đây là khâu quan trọng, ảnh hưởng lớn đến chất lượng và khả năng điều khiển hệ thống điều khiển cân bằng xe hai bánh. Qua nghiên cứu module cảm biến GY-521 6DOF MPU-6050 (Degrees of Freedom - bậc tự do) tác giả thấy rằng modul bao gồm hai cảm biến là cảm biến vận tốc góc 3 trục - gyroscope và cảm biến gia tốc góc 3 trục - accelerometer.

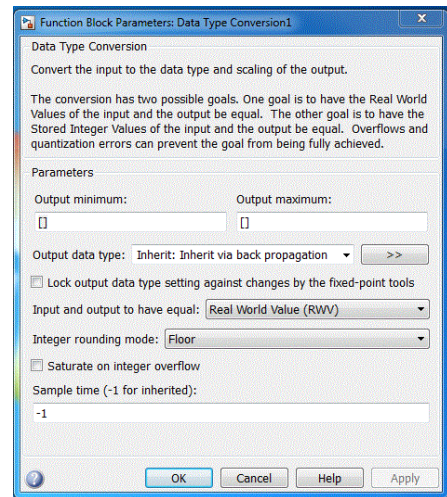
Cảm biến Gyroscopic, cho phép đo vận tốc góc nghiêng (Angular velocity), từ vận tốc góc nghiêng tích phân sẽ ra góc nghiêng, nhưng như thế sẽ có thành phần sai lệch gọi là "drift" là thành phần không mong muốn.

Cảm biến Accelerometer để đo gia tốc góc nghiêng tĩnh (tức gia tốc trọng trường), tuy nhiên cảm biến tác động chậm và bị ảnh hưởng bởi gia tốc động.

Bước đầu tiên của xử lý tín hiệu góc nghiêng là chuyển đổi tín hiệu đo góc nghiêng từ các cảm biến góc nghiêng khi đưa vào phần mềm Matlab – Simulink bằng cách sử dụng khối chuyển đổi tín hiệu đo được thể hiện trong hình 4.5 và 4.6 như sau:

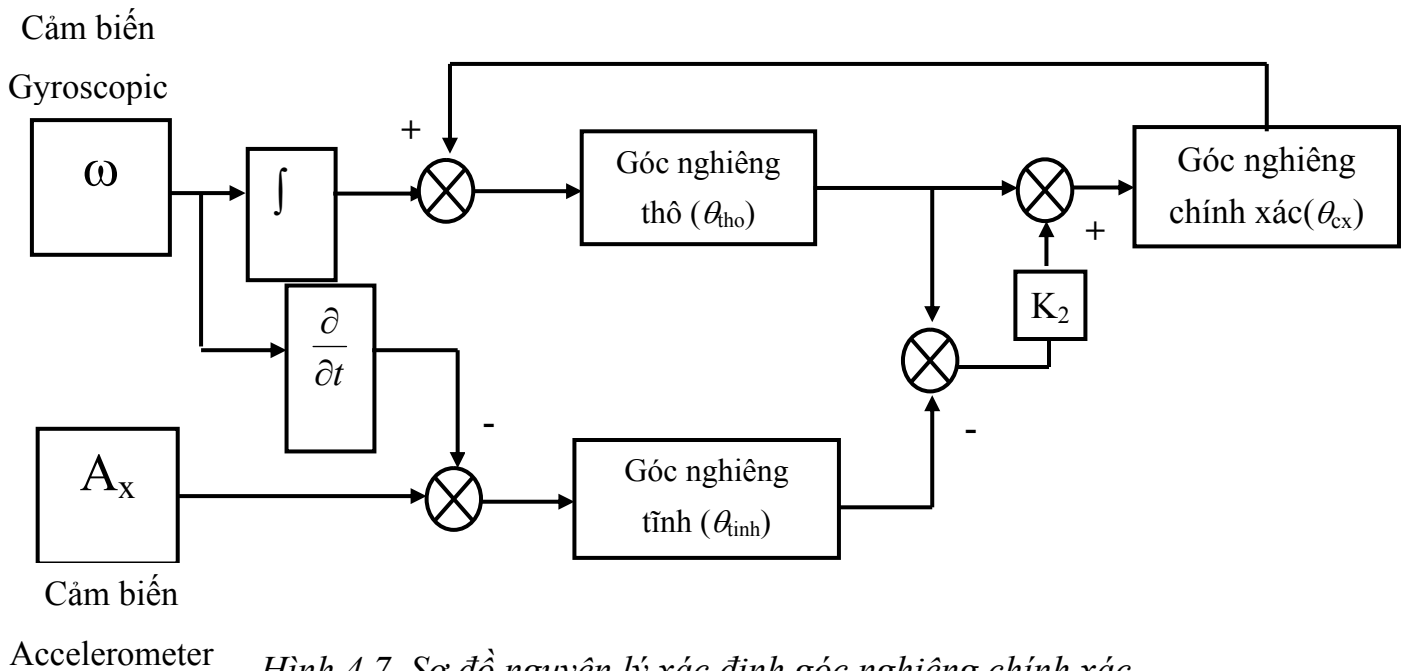


Hình 4.5. Khối chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến Gyroscopic



Hình 4.6. Khối chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến Accelerometer

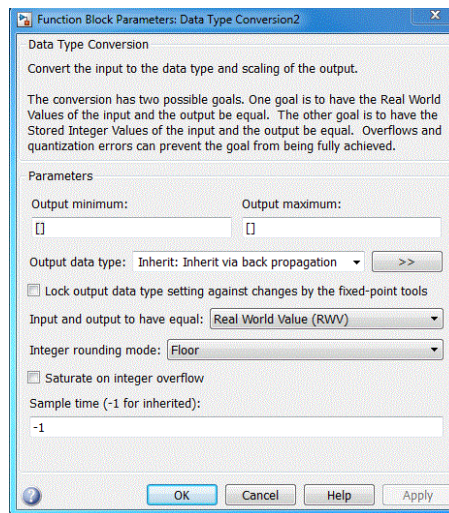
Từ đó, để xác định góc nghiêng chính xác, tác giả thực hiện theo sơ đồ nguyên lý trên hình 4.7 như sau:



$$\theta_{cx} = \theta_{tho} + K_2 (\theta_{tinh} - \theta_{tho})$$

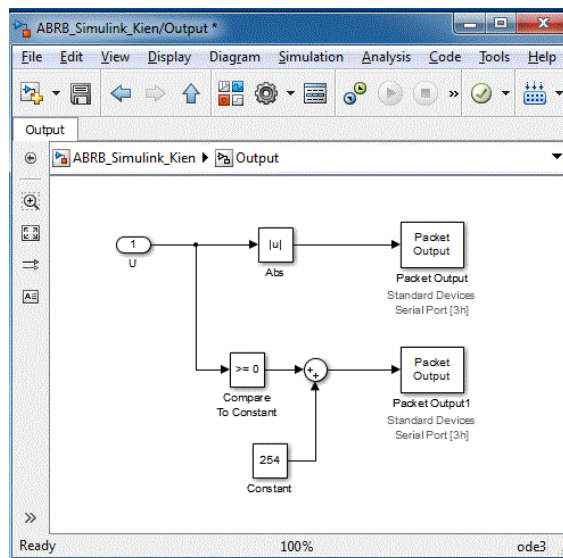
+ Xử lý và lọc để xác định được tín hiệu vận tốc góc nghiêng cung cấp cho bộ điều khiển.

+ Xử lý và lọc để xác định được tín hiệu vận tốc động cơ quay bánh đà cung cấp cho bộ điều khiển. Tín hiệu đo vận tốc động cơ quay bánh đà trước khi được xử lý và lọc được đưa qua khâu chuyển đổi tín hiệu đo được thể hiện trên hình 4.8 như sau:

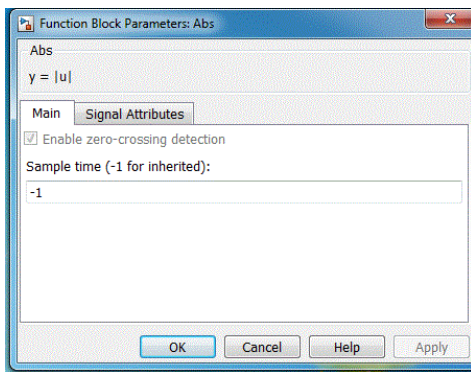


Hình 4.8. Khôi chuyển đổi tín hiệu đo từ cảm biến vận tốc động cơ quay bánh đà

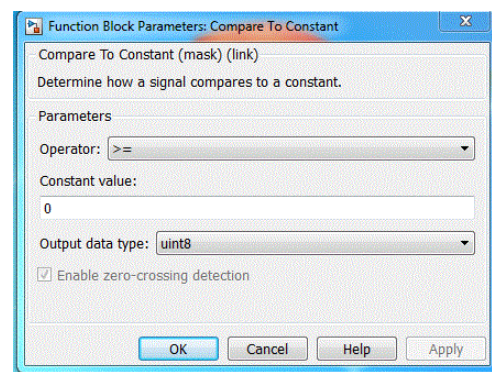
Khối xử lý tín hiệu đầu ra có nhiệm vụ gửi tín hiệu điều khiển của bộ điều khiển đến Aduino để điều khiển động cơ DC quay bánh đà trong đó có hai thông tin quan trọng là chiều quay của động cơ và độ lớn của điện áp đặt vào động cơ và được thể hiện trên hình 4.9, hình 4.10, hình 4.11, hình 4.12 và hình 4.13 như sau:



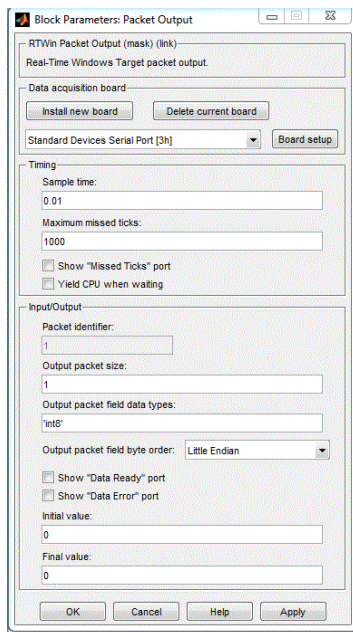
Hình 4.9. Khối xử lý tín hiệu đầu ra (output) trong Matlab – Simulink



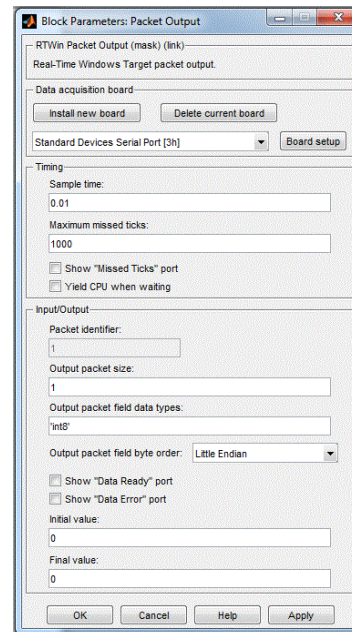
Hình 4.10. Khối xử lý tín chiều quay
động cơ quay bánh đà



Hình 4.11. Khối xử lý độ lớn điện áp
đặt vào động cơ quay bánh đà

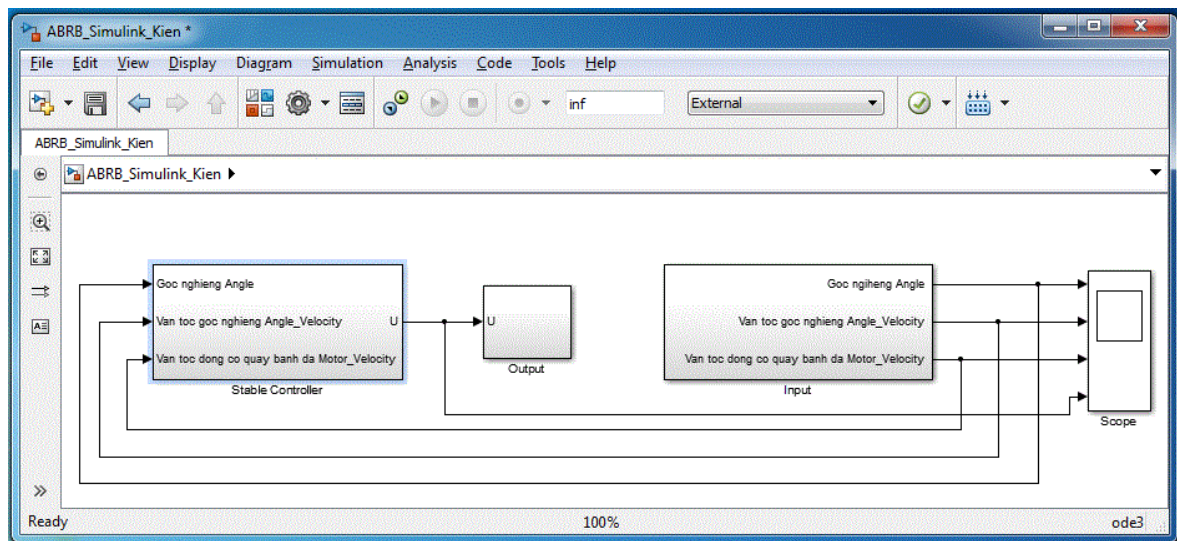


Hình 4.12. Khối gửi tín hiệu chiều
quay động cơ quay bánh đà đến
Adruno

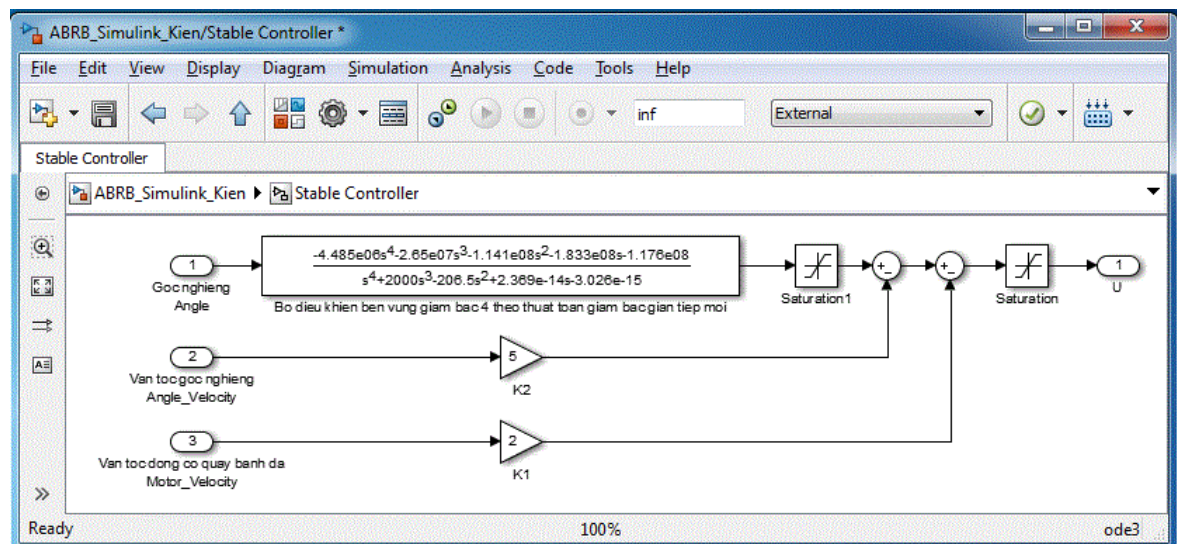


Hình 4.13. Khối gửi tín hiệu độ lớn
điện áp đặt vào động cơ quay bánh đà
đến Adruno

- Thiết kế hệ thống điều khiển xe hai bánh tự cân bằng trên phần mềm Matlab - Simulink: Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển được thể hiện trong hình 4.14, bộ điều khiển xe hai bánh được thể hiện trong hình 4.15.

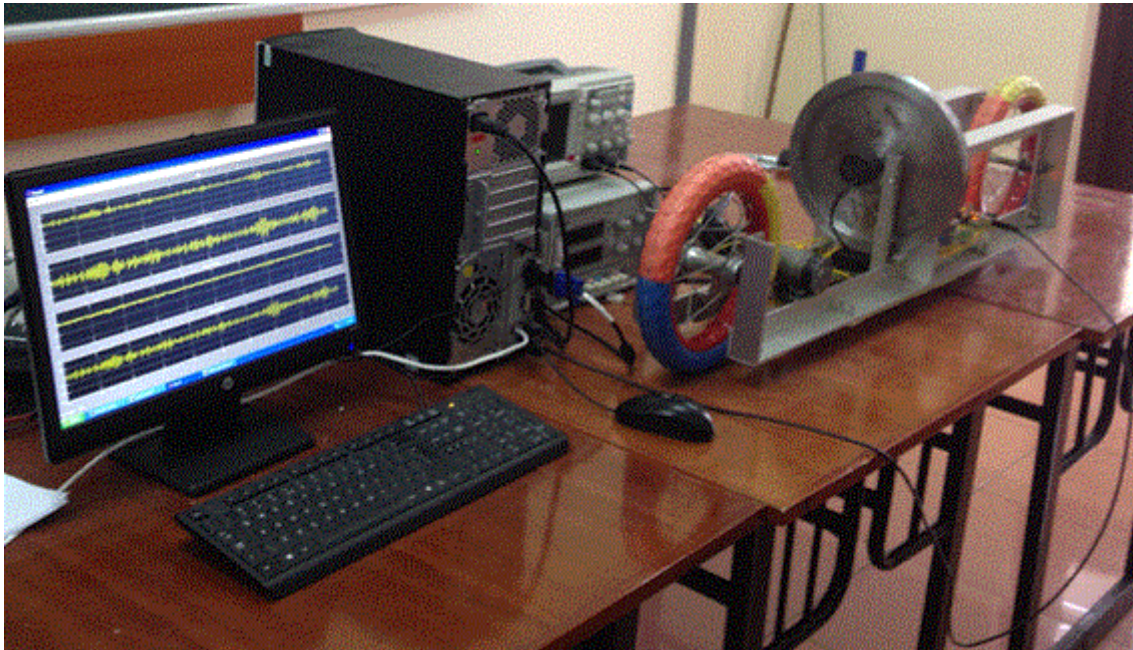


Hình 4.14. Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển trong Matlab – Simulink



Hình 4.15. Bộ điều khiển xe hai bánh tự cân bằng

Hệ thống thực nghiệm điều khiển cân bằng xe hai bánh được thể hiện trên hình 4.16 như sau:



Hình 4.16. Sơ đồ bàn thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng

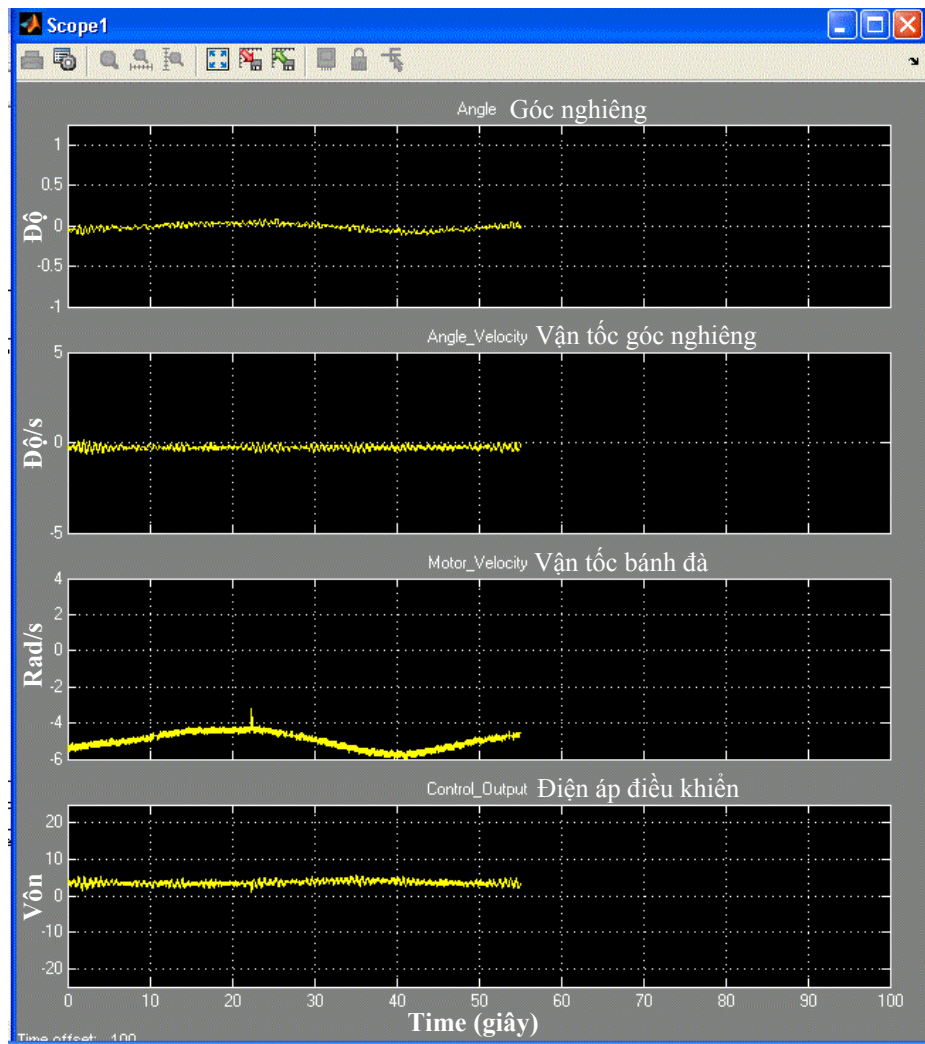
4.2. Kết quả thực nghiệm

Để xác định được kết quả thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng, tác giả thực hiện theo các bước sau:

1. Khởi động máy tính PC + Khởi động chương trình Matlab – Simulink.
2. Mở file Simulink
3. Kết nối bo mạch Aduino trên mô hình xe hai bánh với máy tính qua I/O USB
4. Bật nguồn cung cấp cho mô hình xe hai bánh
5. Build mô hình Simulink, quá trình này sẽ chuyển đổi mô hình Simulink sang dạng sdf (file mô tả hệ thống) và lưu nó trong bộ vi xử lý của bo mạch Aduino.
6. Chạy file Simulink để điều khiển xe hai bánh tự cân bằng.

Kết quả thực nghiệm như sau:

- Hoạt động của xe hai bánh khi không mang tải được thể hiện trong hình 4.17.

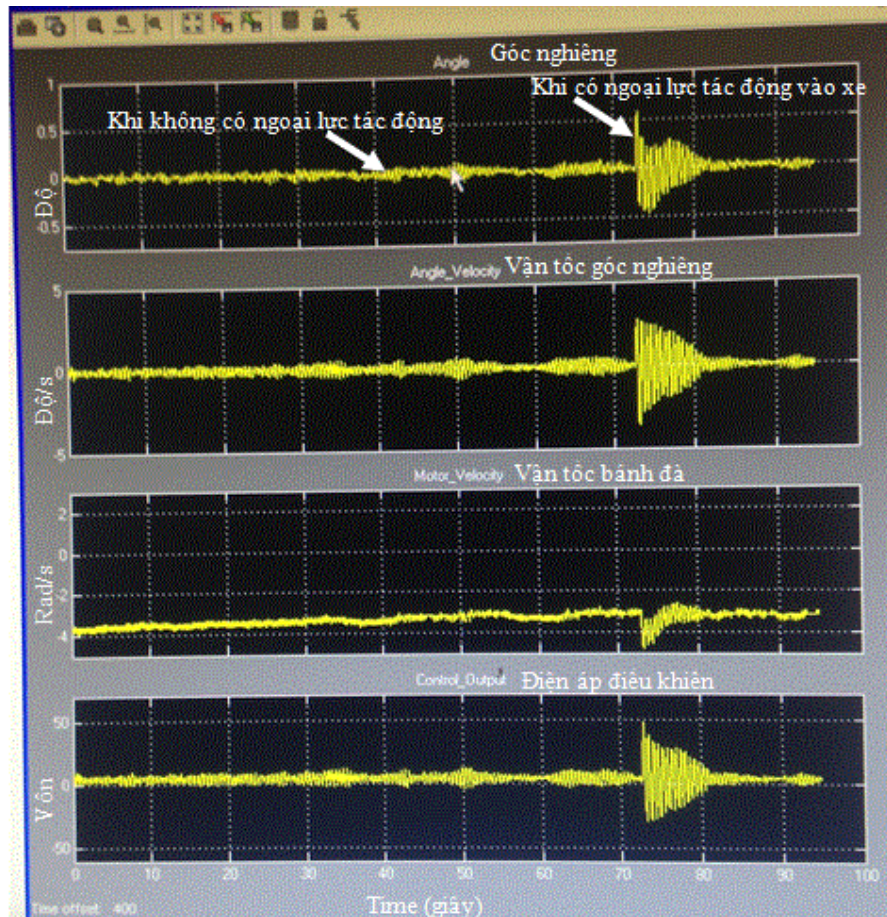


Hình 4.17. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi không mang tải

Nhận xét: Về mặt lý thuyết: khi hệ thống điều khiển đảm bảo góc nghiêng của xe cân bằng quanh góc 0 Độ thì điện áp đặt vào động cơ dao động quanh 0 V, tốc độ bánh đà dao động quanh 0 Rad/s. Tuy nhiên, kết quả điều khiển thực cho thấy: Khi xe không mang tải, hệ thống điều khiển duy trì cho góc nghiêng của xe cân bằng quanh góc 0 Độ (từ $-0,1 \div 0,1$ Độ), nhưng điện áp đặt vào động cơ dao động quanh giá trị >0 V (xấp xỉ 4 V), tốc độ bánh đà dao động quanh giá trị $-4 \div -6$ Rad/s. Kết quả thực nghiệm trên cho thấy mô hình xe hai bánh không có được điều kiện cân bằng về khối lượng giữa hai phía của xe nên khi hoạt động để duy trì góc nghiêng của xe quanh góc 0 Độ thì hệ thống điều khiển phải tự điều chỉnh để đảm bảo xe cân bằng hai phía quanh góc 0 Độ bằng cách cấp điện

cho động cơ quay theo một chiều cố định để sinh ra một mô men cân bằng với mô men trọng lực của xe do xe bị nghiêng về phía có khối lượng lớn gây ra.

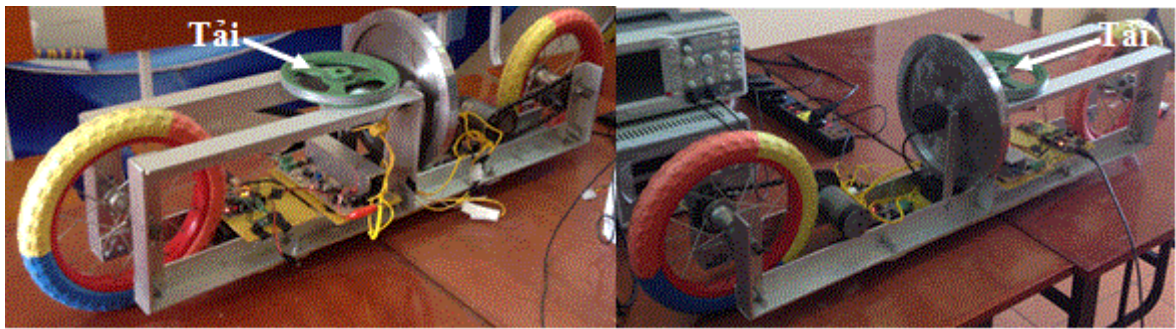
- Hoạt động của xe hai bánh tự cân bằng khi chịu tác động của ngoại lực được thể hiện trong hình 4.18 như sau:



Hình 4.18. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi tác động lực vào xe hai bánh

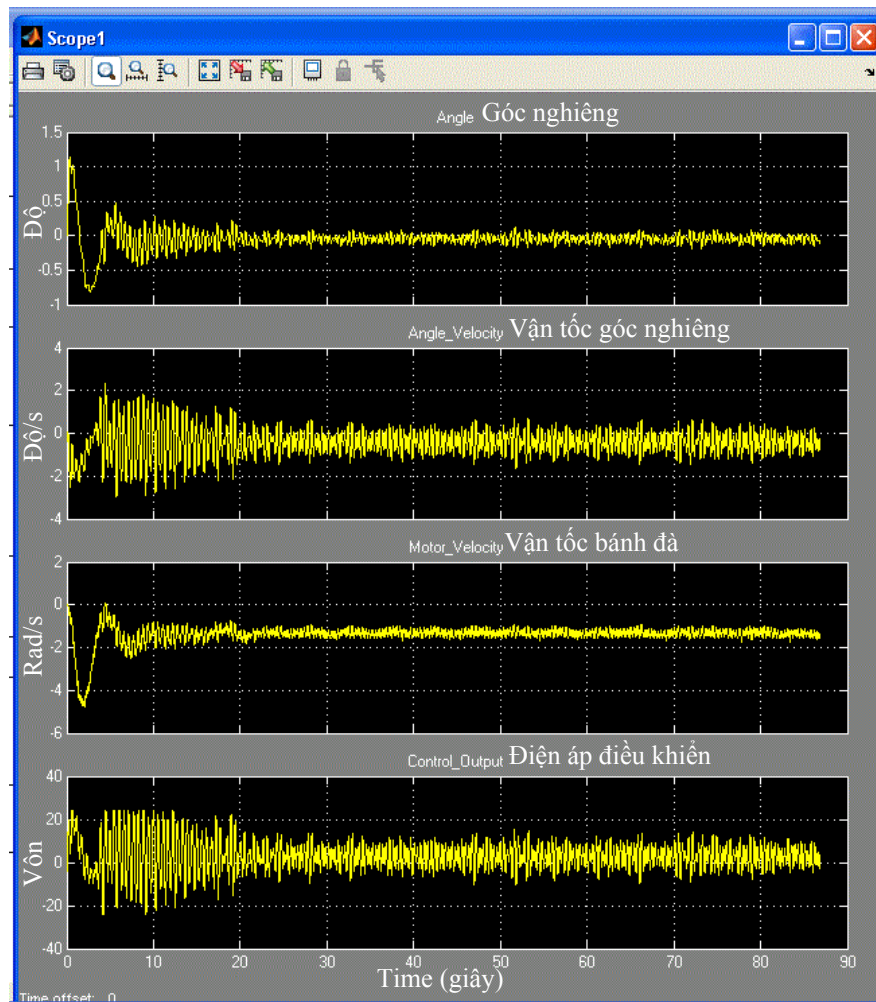
Nhận xét: Khi xe không mang tải và có ngoại lực tác động thì sau thời gian dao động (xấp xỉ 10s) với góc nghiêng xe biến đổi trong khoảng $-0,5 \div 0,5$ Độ, hệ thống điều khiển xe duy trì cho góc nghiêng của xe cân bằng quanh góc 0 Độ.

- Khi xe mang tải với khối lượng tải là $m_t = 1,25\text{Kg}$ đặt ở độ cao 0,25 m (cân bằng hai phía) được thể hiện trong hình 4.19 như sau:



Hình 4.19. Khi xe hai bánh mang tải

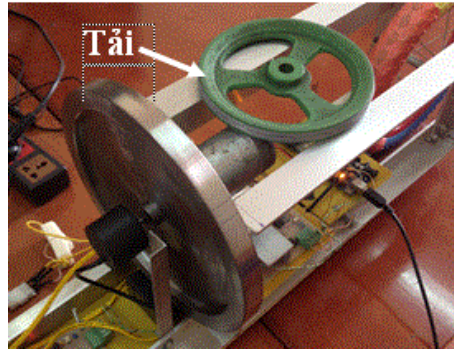
Đáp ứng của xe hai bánh khi mang tải được thể hiện trong hình 4.20 như sau:



Hình 4.20. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi xe mang tải

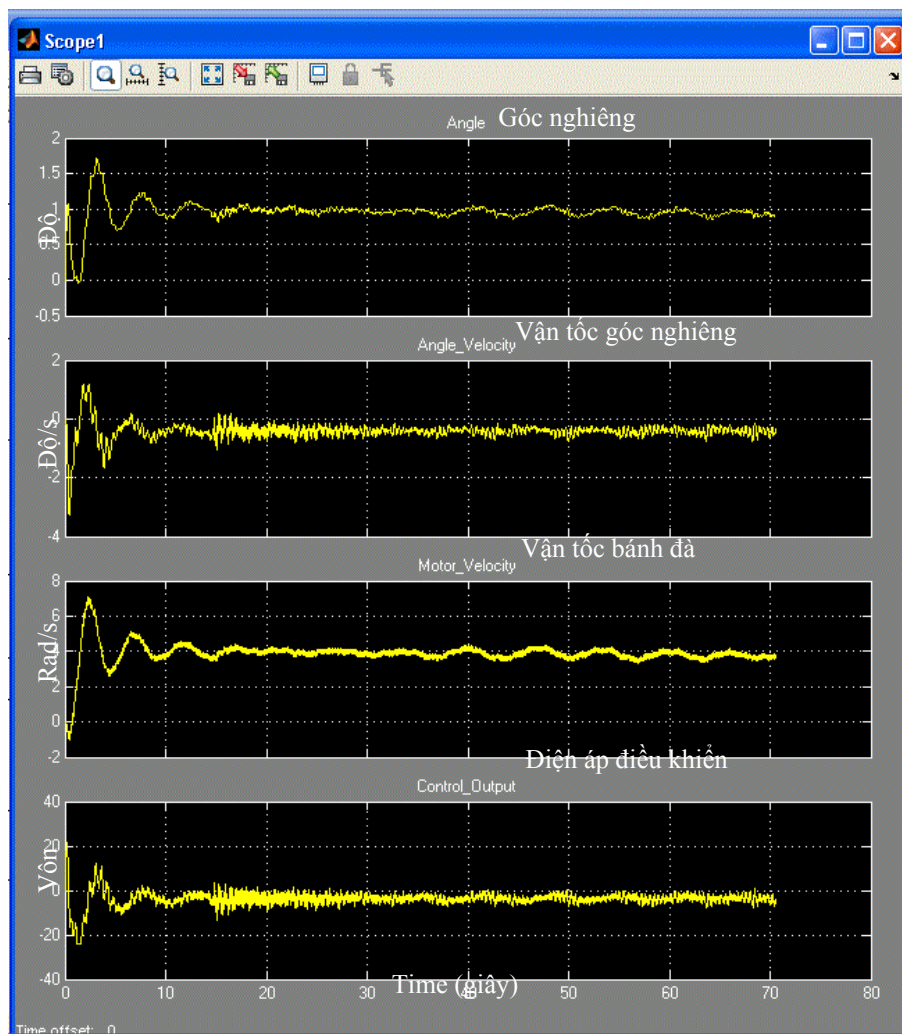
Nhận xét: Khi xe mang tải (cân bằng hai phía) thì sau thời gian ngắn xe dao động (khoảng 10s) với biên độ góc nghiêng trong khoảng $-1,1 \div 0,8$ Độ, hệ thống điều khiển xe duy trì góc nghiêng của xe quanh vị trí góc 0 Độ.

- Khi xe mang tải lệch tâm với khối lượng tải là $m_t = 1,25\text{Kg}$ đặt ở độ cao 0,25 m được thể hiện trong hình 4.21 như sau:



Hình 4.21. Khi xe mang tải lệch tâm

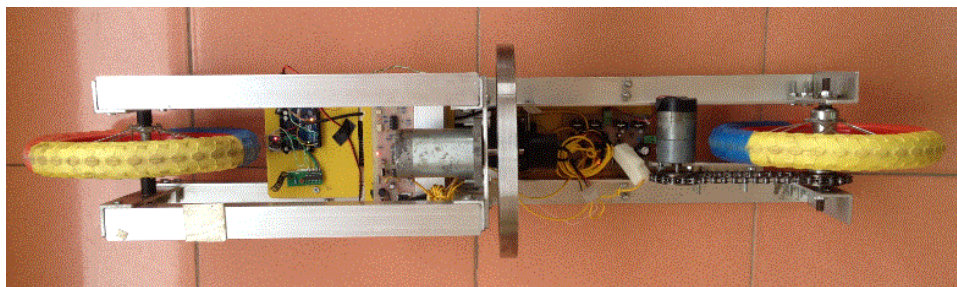
Đáp ứng của xe hai bánh khi mang tải được thể hiện trong hình 4.22 như sau:



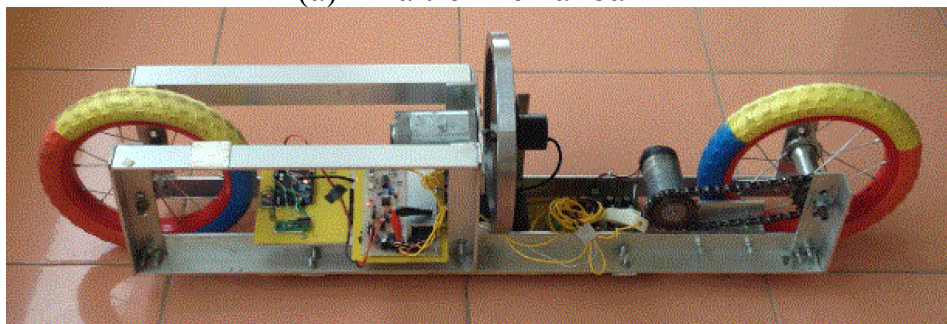
Hình 4.22. Đáp ứng của hệ thống xe hai bánh tự cân bằng khi mang tải lệch tâm

Nhận xét: Khi xe mang tải lệch tâm thì sau thời gian ngắn dao động (khoảng 15s) với biên độ góc nghiêng dao động từ $0 \div 1,5$ Độ, hệ thống điều khiển tự động duy trì cân bằng xe quanh góc nghiêng 1 Độ (từ $1,1 \div 0,8$ Độ). Góc nghiêng cân bằng mới (khác góc 0 Độ) là vị trí đảm bảo xe cân bằng hai phía so với phương thẳng đứng, tương ứng vận tốc bánh đà dao động quanh giá trị 4 Rad/s, điện áp đặt vào động cơ quay bánh đà < 0 V.

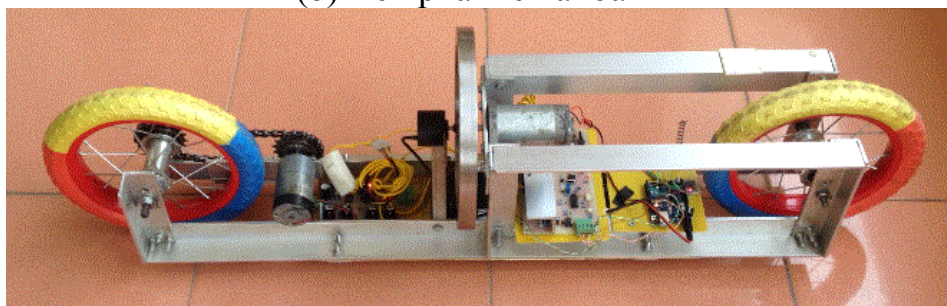
- Sau khi thực nghiệm điều khiển xe hai bánh bằng Matlab – Simulink qua kết nối trực tiếp với bo mạch Adruno, tác giả đã viết Code phần điều khiển và nạp trực tiếp vào Adruno để xe tự hoạt động (Phần phụ lục 12 *ABRB_alone.ino*). Kết quả thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng được thể hiện trong hình 4.23 như sau:



(a) Phía trên xe hai bánh



(b) Bên phải xe hai bánh



(c) Bên trái xe hai bánh

Hình 4.23. Hình ảnh xe hai bánh tự cân bằng khi không mang tải

Nhận xét: Kết quả thực nghiệm khi nạp chương trình điều khiển vào Adruno để xe hoạt động độc lập cho thấy xe hai bánh có khả năng cân bằng ổn định khi xe đứng yên, khi xe chuyển động thẳng.

4.3. Kết luận chương 4

Trong nội dung chương 4 tác giả đã đạt được một số nội dung sau

1. Xây dựng hệ thống thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng sử dụng phần mềm Matlab – Simulink.
2. Thực nghiệm điều khiển xe hai bánh tự cân bằng (mô hình xe được xây dựng trong phòng thí nghiệm) bằng Matlab – Simulink sử dụng bộ điều khiển bền vững giảm bậc cho thấy xe có khả năng cân bằng khi xe không mang tải, khi xe chịu tác động của ngoại lực, khi xe mang tải (cân bằng hai phía) và khi xe mang tải lệch tâm. Thực nghiệm khi nạp mã chương trình vào Adruno cho thấy xe hai bánh tự cân bằng có thể hoạt động độc lập (không kết nối với phần mềm Matlab – Simulink) và đảm bảo cân bằng ổn định.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Với mục tiêu nghiên cứu thuật toán giảm bậc mô hình và ứng dụng cho bài toán điều khiển, kết quả nghiên cứu của luận án đã có một số kết quả mới như sau:

1. Xây dựng một thuật toán giảm bậc mới có khả năng giảm bậc được hệ tuyến tính ổn định. Trong đó, tác giả đã đưa ra 3 tiêu chuẩn đánh giá (đo) tính quan trọng (tính trội) của các điểm cực và xây dựng thuật toán giảm bậc mới cho hệ ổn định bằng cách chuyển ma trận A của hệ gốc về dạng tam giác trên đồng thời đánh giá và sắp xếp các điểm cực theo tính quan trọng (tính trội) giảm dần trên đường chéo chính của ma trận A dựa trên 3 tiêu chuẩn đánh giá điểm cực, bằng cách này, tác giả có thể bảo toàn được các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc đồng thời thu được sai số giảm bậc nhỏ. Thuật toán mới này cũng được mở rộng áp dụng giảm bậc cho hệ không ổn định theo phương pháp gián tiếp. Song song với đó, tác giả cũng đưa ra được một định lý mới xác định công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc, 5 bổ đề mới và các ví dụ minh họa (giảm bậc bộ lọc số, mô hình CD player và mô hình tuyến tính bậc cao không ổn định) để minh chứng tính đúng đắn và hiệu quả của thuật toán mới.

2. Xác định công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc cho thuật toán chặt cân bằng mở rộng trong tài liệu [90] để giảm bậc hệ không ổn định giúp việc đánh giá sai số giảm bậc dễ dàng hơn cũng như giúp thuật toán có thể thực hiện giảm bậc tự động dựa vào công thức tính chặn trên của sai số giảm bậc. Đồng thời, tác giả cũng đưa ra được 2 định lý mới và một ví dụ giảm bậc mô hình tuyến tính không ổn định để chứng minh tính đúng đắn và hiệu quả của thuật toán.

3. Áp dụng hai thuật toán giảm bậc vào bài toán giảm bậc bộ điều khiển bậc cao cho kết quả:

+ Với bài toán thứ nhất: Giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao trong bài toán điều khiển bền vững góc tải của máy phát đồng bộ trong hệ thống điện (tài liệu [3]) cho thấy có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 4 thay thế bộ điều khiển gốc bậc 28 mà chất lượng hệ thống điều khiển vẫn được đảm bảo, đồng thời bộ điều khiển bậc 4 theo các thuật toán mới đều có bậc **nhỏ hơn** bậc của bộ điều khiển giảm bậc (bậc 6) thu được trong tài liệu [3]. Các kết quả đã được kiểm chứng qua mô phỏng trên máy tính.

+ Với bài toán thứ hai là: Giảm bậc bộ điều khiển bền vững bậc cao trong bài toán điều khiển bền vững xe hai bánh tự cân bằng (mô hình xe hai bánh được xây dựng trong phòng thí nghiệm) cho thấy có thể sử dụng bộ điều khiển bậc 5, bậc 4 thay thế bộ điều khiển bền vững bậc cao (bậc 30) mà chất lượng hệ thống điều khiển vẫn đảm bảo được yêu cầu ổn định bền vững của hệ thống đồng thời sử dụng bộ điều khiển bậc 4, bậc 5 sẽ giúp mã lập trình điều khiển đơn giản hơn, tăng tốc độ đáp ứng của hệ thống và đảm bảo được yêu cầu điều khiển thời gian thực. Các kết quả đã được kiểm chứng qua mô phỏng trên máy tính và thực nghiệm trên mô hình xe hai bánh.

2. Kiến nghị

1. Nghiên cứu ứng dụng hai thuật toán giảm bậc mô hình mới để giải quyết các bài toán giảm bậc mô hình khác trong lĩnh vực điều khiển như giảm bậc mô hình đối tượng bậc cao, ...

2. Xây dựng toolbox của hai thuật toán giảm bậc trong Matlab – Simulink.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

1. Cong Huu Nguyen, Kien Ngoc Vu, Hai Trung Do (2015), “Model reduction based on triangle realization with pole retention”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, 2015, No. 44, pp. 2187-2196, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.5290>
2. Vũ Ngọc Kiên, Đào Huy Du, Nguyễn Hữu Công (2014), “Model reduction in Schur basis with pole retention”, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ Đại học Thái Nguyên*, tập 127, số 13, tr. 101 – 106.
3. Cong Nguyen Huu, Kien Vu Ngoc, Du Dao Huy (2013), “Applying order reduction model algorithm for balancing control problems of two-wheeled mobile robot”, *Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2013 8th IEEE Conference on*, pp. 1302 – 1307.
4. Cong Nguyen Huu, Kien Vu Ngoc, Du Dao Huy, Thanh Bui Trung (2013), “Researching model order reduction based on Schur analysis”, *Cybernetics and Intelligent Systems (CIS), IEEE Conference on*, pp. 60 – 65.
5. Cong Nguyen Huu, Kien Vu Ngoc, Du Dao Huy (2013), “Research to Improve the Model Order Reduction Algorithm”, *Tạp chí Khoa học Công nghệ các trường Đại học Kỹ thuật*, số 97, tr. 1-7.

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

1. Chủ nhiệm đề tài: Nghiên cứu thuật toán giảm bậc mô hình và ứng dụng trong lĩnh vực điều khiển, cấp Đại học Thái Nguyên, mã số ĐH2013- TN02-04, 2013 – 2014. Đang thực hiện.
2. Thành viên tham gia đề tài: Nghiên cứu xây dựng mô hình điều khiển cân bằng cho Robot bằng phương pháp giảm bậc, cấp Đại học, mã số ĐH2012- TN02-14, Nghiệm thu năm 2014, Xếp loại: Khá.

3. Thành viên tham gia đề tài: Thiết kế và chế tạo mô hình phương tiện giao thông hai bánh tự cân bằng sử dụng thuật toán điều khiển tiến tiến, cấp Bộ, mã số B2014-TN01-01, 2014 – 2015. Đang thực hiện

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Đào Huy Du (2012), *Giảm bậc hệ thống xử lý tín hiệu số và ứng dụng trong viễn thông*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Hà Nội.
2. Nguyễn Doãn Phước (2009), *Lý thuyết điều khiển nâng cao*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
3. Nguyễn Hiền Trung (2012), *Ứng dụng lý thuyết điều khiển tối ưu RH_∞ để nâng cao chất lượng của hệ điều khiển ổn định hệ thống điện PSS*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, Đại học Thái Nguyên.
4. Nguyễn Ngọc San (2006), *Nhận dạng các hệ thống tuyến tính liên tục*, NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội.

Tiếng Anh

5. Aamer Almujaheed, Jason Dewese, Linh Duong, and Joel Potter (2009), *Auto-Balanced Robotic Bicycle (ABRB)*,
https://ece.gmu.edu/sites/ece/files/S-09-ABRB_0.pdf, date 11/11/2014.
6. Antoulas A. C. (2005), *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia: SIAM.
7. Antoulas A. C., Sorensen D. C., Gugercin S. (2001), “A Survey of Model Reduction Methods for Large-scale Systems”, *Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering, AMS 2001*, pp. 193 – 219.
8. Aoki M. (1968), “Control of large scale dynamic system by aggregation”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-13, pp. 246-235.
9. Bai Zhaojun, Demmel J. W. (1993), “On swapping diagonal blocks in real Schur form”, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 186, pp. 75 – 95.

10. Bartels R. H., Stewart G. W. (1972), "Solution of the Matrix Equation $AX + XB = C$ ", *Comm. of the ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 820 – 826.
11. Benner P., Hinze M., Maten E. J. W. (2011), "Model Reduction for Circuit Simulation", *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Vol. 74, Springer, Dordrecht, Germany, pp. 81 – 104.
12. Benner P., Mehrmann V., Sorensen D. C. (2005), "Dimension Reduction of Large-scale Systems", *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 45, Springer, Berlin, Germany, pp. 5–48.
13. Besselink B., Tabak U., Lutowska A., van de Wouw N., Nijmeijer H., Rixen D. J., Hochstenbach M. E., Schilders W. H. A., (2013), "A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control", *Journal of Sound and Vibration* 332, pp. 4403–4422.
14. Beznos A. V., Formalsky A. M., et al (1998), "Control of autonomous motion of two-wheel bicycle with gyroscopic stabilization", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2670 – 2675.
15. Bistritz Y. and Lanholz G. (1979), "Model reduction by Chebyshev polynomial techniques", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-24, pp. 741 – 747.
16. Biswal Soumit Kumar (2009), *Development of a self-balanced robot & its controller*, Bachelor of Technology in Mechanical Engineering, National Institute of Technology Rourkela, India.
17. Boess C., Nichols N. K., Bunse-Gerstner (2010), Model reduction for discrete unstable control systems using a balanced truncation approach, https://www.reading.ac.uk/web/FILES/maths/Preprint_10_06_Nichols.pdf
date 11/11/2014

18. Chiprout E. and Nakhla M. S. (1994), “Asymptotic Waveform Evaluation and Moment Matching for Interconnect Analysis”, *The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science*, Vol. 252, pp. 15 – 39.
19. Cohn S. E. (1997), “An introduction to estimation theory”, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, Vol. 75, pp. 257–288.
20. Commault C. (1981), “Optimal choice of model for aggregation”, *Automatica*, 17, pp. 397 – 399.
21. Desai U. B., Pal D. (1984), “A Transformation Approach to Stochastic Model Reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29, No. 12, pp. 1097 – 1100.
22. Đukić S. D., Sarić A. T. (2012), “Dynamic Model Reduction: An Overview of Available Techniques with Application to Power Systems”, *Serbian Journal of Electrical Engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 131 – 169.
23. Faßbender H. and Benner P. (2006), “Passivity Preserving Model Reduction via a Structured Lanczos Method”, *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design Munich, Germany*, pp. 8 – 13.
24. Fatmawati Saragih R., Bambang R. and Soeharyadi Y. (2011), “Balanced truncation for unstable infinite dimensional systems using reciprocal transformation”, *Int. Journal of Control Automation and Systems*, Vol. 9, pp. 249 – 257.
25. Fernando K. V. and Nicholson H. (1982), “Singular perturbational model reduction of balanced system”, *IEEE Trans. Auto. Contr*, AC-27, pp. 466 – 468.
26. Gallaspy J. M. (1999), *Gyroscopic stabilization of an unmanned bicycle*, M.Sc Thesis, Auburn University, American.

27. Gawronski W., Juang J. N. (1990), "Model Reduction in Limited Time and Frequency Intervals", *International Journal of Systems Science*, Vol. 21, No. 2, pp. 349 – 376.
28. Getz N. H., Marsden J. E. (1995), "Control for an autonomous bicycle", In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1397 – 1402.
29. Glover K. (1984), "All optimal Hankel norm approximation of linear multivariable system and their L_2 error bounds", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-29, pp. 1105 – 1113.
30. Golub G., Loan C. V. (1996), *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Press Ltd, London.
31. Green M. (1988), "A Relative Error Bound for Balanced Stochastic Truncation", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. 33, No. 10, pp. 961 – 965.
32. Grimme E. J. (1997), *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, USA.
33. Hammarling S. J. (1982), "Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation", *IMA J. Num. Anal.*, Vol. 2, pp. 303 – 325.
34. Ham W., Choi H. (2006), "Autonomous tracking control and inverse kinematics of unmanned electric bicycle system", *SICE-ICASE International Joint Conference*, pp. 336 – 339.
35. Henrik K., Olsson A. (2005), *Model Order Reduction with Rational Krylov Methods*, Doctoral Thesis in Numerical Analysis Stockholm, Sweden.
36. Hickin J. D., Sinha N. K. (1980), "Model reduction for linear multivariable systems", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-25, pp. 1121 – 1127.

37. Ishizaki T., Sandberg H., Johansson K. H., Kashima K., Imura J., Aihara K. (2013), “Singular Perturbation Approximation of Semistable Linear Systems”, *Proc. of 2013 European Control Conference*, pp. 4508 – 4513.
38. Jonckheere E. A., Silverman L. M. (1983), “A New Set of Invariants for Linear System – Application to Reduced Order Compensator Design”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC- 28, No. 10, pp. 953 – 964.
39. Keo L., Masaki Y. (2008), “Trajectory control for an autonomous bicycle with balancer”, *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2008) IEEE/ASME International Conference on*, pp. 676 – 681.
40. Kokotovic P. V., O’Malley R. E., Sannuti P. (1976), “Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory - An Overview”, *Automatica*, Vol. 12, No. 2, pp. 123 – 132.
41. Kressner D. (2006), “Block algorithms for reordering standard and generalized Schur forms”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 32, No. 4, pp. 521 – 532.
42. Kumar D., Tiwarij P., Nagar S. K. (2011), “Reduction of large scale systems by extenned balanced truncation approch” , *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, Vol. 3, No. 4, pp. 2746 – 2752.
43. Lam Pom Yuan (2013), *Design and Development of a Self-Balancing Bicycle Using Control Moment Gyro*, Master thesis of engineering, National University of Singapore, Singapore.
44. Lastman G. J., Sinha N. K. , Rózsa P. (1984), “On the Selection of States to be Retained in a Reducedorder Model”, *IEE Proceedings Part D on Control Theory and Applications*, Vol. 131, No. 1, pp. 15 – 22.
45. Laub A. J., Heath M. T., Paige C. C., Ward R. C. (1987), "Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous

- Diagonalization Algorithms" *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-32, pp. 115 – 122.
46. Laub A. J. (1980), "Computation of Balancing Transformations", *Proc. ACC*, San Francisco, Vol. 1, pp. 8 – 15.
 47. Lee S., Ham W. (2002), "Self-stabilizing strategy in tracking control of unmanned electric bicycle with mass balance", In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2200 – 2205.
 48. Li J. R., White J. (2001), "Reduction of large circuit models via low rank approximate Gramians", *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.*, 11(5), pp. 1151– 1171.
 49. Li J. R., White J. (2002), "Low Rank Solution of Lyapunov Equations", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 24, No. 1, pp. 260 – 280.
 50. LITMOTOR, <http://litmotors.com/c-1/>, date 11/11/2014.
 51. Liu Y., Anderson D. O. (1989), "Singular perturbation approximation of balanced systems", *Int. J. Control*, Vol. 50, pp. 1379 – 1405.
 52. Lucas T. N. (1985), "Linear system reduction by impulse energy approximation", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-30 (8), pp. 784 – 786.
 53. Magruder C., Beattie C., Gugercin S. (2009), "Rational Krylov methods for optimal $\mathcal{L}_2$ model reduction", *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 6797 – 6802.
 54. McFarlane D., Glover K. (1992) "A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis", *IEEE Trans Automat Contr*, Vol. 37, No. 6, pp. 759 – 769.
 55. Meijaard J., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. (2007), "Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 463, pp. 1955 – 1982.

56. Minh H. B. (2009), *Model reduction in a Behavioral Framework*, Doctoral thesis, University of Groningen, Netherlands.
57. Moore B. C. (1981), "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-26, pp 17 – 32.
58. Mukherjee T., Fedder G., Ramaswamy D. and White J. (2000), "Emerging simulation approaches for micromachined devices", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 19(12), pp. 1572 – 1589.
59. Musafa D., Glover K. (1991), "Controller reduction by H_∞ Balanced truncation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36, pp. 668 – 682.
60. Musafa (1989), " H_∞ - characteristic values", *Proceedings of the Conference on Decision and Control, 1989*, Vol. 2, pp. 1483 – 1487.
61. Opdenacker P. C., Jonckheere E. A. (1988), "A Contraction Mapping Preserving Balanced Reduction Scheme and its Infinity Norm Error Bounds", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 35, No. 2, pp. 184 – 189.
62. Panda S., Yadav J. S., Patidar N. P., Ardil C. (2009), "Evolutionary Techniques for Model Order Reduction of Large Scale Linear Systems", *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 5, No. 1, pp. 22 – 28.
63. Penzl T. (1998), "Numerical solution of generalized Lyapunov equations", *Advances in Comp. Math.*, Vol. 8, pp. 33 – 48.
64. Penzl T. (1999), "A Cyclic Low-rank Smith Method for Large Sparse Lyapunov Equations", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 21, No. 4, pp. 1401 – 1418.

65. Perenbo I., Silverman L. M. (1982), “Model reduction via balanced state space representation”, *IEEE Trans. Auto, contr.*, AC-27, pp. 328 – 387.
66. Prakash R., Rao S. V. (1989), “Model reduction by low-frequency approximation of internally balanced representation”, *Proc. IEEE Conf. Decision, Contr.*, Tampa, Florida, USA, pp. 143 – 150.
67. Rommes J. (2007), Methods for eigenvalue problems with applications in model order reduction, *PhD thesis*, Utrecht University.
68. Rommes J., Sleijpen G. L. G. (2008), “Convergence of the dominant pole algorithm and Rayleigh quotient iteration”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 30, Issue 1, pp. 346 – 363.
69. Rudnyi E. B., Korvink J. G. (2002), “Review: Automatic Model Reduction for Transient Simulation of MEMS-based Devices”, *Sensors Update*, Vol. 11, pp. 3 – 33.
70. Safonov M. G., Chiang R. Y. (1989), “A Schur Method for Balanced-truncation Model Reduction”, *IEEE Transactions on AutomaticControl*, Vol. 34, No. 7, pp. 729 – 733.
71. Saksena V. R., O'Reilly J., Kokotovic P. V. (1984), “Singular perturbation and time – scale methods in control theory: Survey 1976 - 1983”, *Automatica*, Vol. 20, No. 3, pp. 273 – 293.
72. Sanash Y. (1969), “Stable reduced-order models using Pade-type approximations”, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-14, pp. 27 – 32.
73. Sannuti P., Kokotovic S. (1969), “Near optimum design of linear systems using singular perturbation method”, *IEEE Trans, Auto. Contr.*, AC-14, pp. 15 – 21.
74. Saragih R., Dewanti F. I. (2012), “Model Reduction of Bilinear System Using Balanced Singular Perturbation”, *Computer Applications for Security*,

Control and System Engineering Communications in Computer and Information Science, Vol. 339, pp. 198 – 204.

75. Skelton R. E., Yousuff R. (1983), “Compoment cost analysis of large systems”, *Int. J. Contr.*, 35, pp. 285 – 297.
76. Stykel T. (2004), “Gramian-based Model Reduction for Descriptor Systems”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 16, No. 4, pp. 297 – 319.
77. Suprpto S. (2006), *Development of a gyroscopic unmanned bicycle*, M. Eng Thesis, Asian Institute of Technology, Thailand.
78. Thanh Bui Trung , Parnichkun Manukid (2008), “Balancing control of Bycirobo by PSO-based structure-specified mixed H_2/H_∞ control”, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 5(4), pp. 395 – 402.
79. Thanh Bui Trung, Parnichkun Manukid, Hieu Le Chi (2009), “Structure-specified H_∞ loop shaping control for balancing of bicycle robots: A particle swarm optimization approach”, *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 224, No. 7, pp. 857 – 867.
80. Toiserka Kamran Ghaffari (2008), Motor – Bike Robot, <http://www.youtube.com/watch?v=0312BNqIBFI> , date 11/11/2014.
81. Varga A., Anderson D. O. (2003), “Accuracy-enhancing methods for balancing-related frequency-weighted model and controller reduction”, *Automatica*, Vol. 39, pp. 919 – 927.
82. Varga A. (1993), “Coprime factors model reduction based on accuracy enhancing techniques”, *Systems Analysis Modelling and Simulation*, Vol. 11, pp. 303–311.
83. Varga A. (1993), “A Schur method for computing coprime factorizations with inner denominators and applications in model reduction”, *Proc. ACC’93, San Francisco, CA*, pp. 2130–2131.

84. Varga A. (2001), “Model reduction software in the SLICOT library”, *Applied and Computational Control, Signals and Circuits*, Vol. 629, pp. 239 – 282.
85. Willcox K., Peraire J. (2002), “Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition”, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 11, pp. 2323 – 2330.
86. Yamakita M., Utano A., Sekiguchi K. (2006), “Experimental study of automatic control of bicycle with balancer”, *Proceedings of the International Conference of Intelligent Robots and Systems (2006)*, pp. 5606 – 5611.
87. Zhang J., Chai L., Zhang C., Mosca E. (2008), “Hankel-Norm Approximation of IIR by FIR Models: A Constructive Method”, *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, Vol. 55, Issue. 2, pp. 586 – 598.
88. Zhou K., Salomon G., Wu E. (1999), “Balanced realization and model reduction method for unstable systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 9, No. 3, pp. 183 – 198.
89. Zhou K., Doyle J. C. (1998), *Essentials of Robust Control*, Prentical – Hall, Inc, Upper Saddle River, New Jersey.
90. Zilochian A. (1991), “Balanced Structures and Model Reduction of Unstable Systems”, *IEEE Proceedings of Southeastcon '91*, Vol 2, pp. 1198 – 1201.

PHỤ LỤC

Phụ lục 1. Lập trình thuật toán chặt cân bằng của Zhou

Core file 'balance_Zhou.m'

```
function [Gm,T] = balance_Zhou(G)
[A,B,C,D]=ssdata(G);
n=length(A);
H=eye(n,n);
X=are(A,B*B',H);
Y=are(A',C'*C,H);
F=-B'*X;
L=-Y*C';
P=lyap(A+B*F,B*B');
Q=lyap((A+L*C)',C'*C);
R=chol(P);
[U,LL]=svd(R*Q*R');
L=sqrt(LL);
T=inv(R'*U*inv(sqrt(L)));
% He can bang moi
Am=T*A*inv(T);
Bm=T*B;
Cm=C*inv(T);
Dm=D;
Gm=ss(Am,Bm,Cm,Dm);
end
```

Phụ lục 2. Lập trình thuật toán giảm bậc cân bằng LQG

Core file 'balance_lqg.m' -

```
function [Glqg,T] = balance_lqg(G)
[A,B,C,D]=ssdata(G);
[Q]=are(A,B*B',C'*C);
[P]=are(A',C'*C,B*B');
Rr=chol(P);
```

```

[U,LL]=svd(Rr*Q*Rr');
L=sqrt(LL);
T=inv(Rr'*U*inv(sqrt(L)));
Alqg=T*A*inv(T);
Blqg=T*B;
Clqg=C*inv(T);
Dlqg=D;
Glqg=ss(Alqg,Blqg,Clqg,Dlqg);
end

```

Phụ lục 3. Lập trình thuật toán giảm bậc mới theo chỉ số trội H_∞

Core file 'hinf_MK'

```

function [Ac,Bc,Cc,Dc]=hinf_MK(Gb)
[A,B,C,D] = ssdata(Gb);
[U,Delta]=schur(full(A),'real');
L=lyapchol(Delta',U'*C');
T=U*inv(L);
% -----
Ac=inv(T)*A*T;
Bc=inv(T)*B;
Cc=C*T;
count=0;
n=size(Ac,1);
while (count<n),
    order=count;
    AcR=Ac(order+1:n,order+1:n);
    BcR=Bc(order+1:n,:);
    CcR=Cc(:,order+1:n);
    nr=size(AcR,1);
    lambda=diag(AcR) ;
    Ur=eye(nr);
    Tr=AcR;

```

```

for i=1:nr
    for j=i+2:nr
        Tr(j,i)=0;
    end
end

% Sap xep tinh chat quan trong cua diem cuc
eigT=eig(Tr);
K=zeros(nr,1);
Dem=1;
while (Dem <= nr),
    if abs(Tr(Dem,Dem)-eigT(Dem,1))<10^(-8)
        if Dem<nr
            Tr(Dem+1,Dem)=0;
        end
        K(Dem)= abs(BcR(Dem,:)*CcR(:,Dem))/abs(real(lambda(Dem)));
        Dem=Dem+1;
    else
sysr=ss(AcR(Dem:Dem+1,Dem:Dem+1),BcR(Dem:Dem+1,:),CcR(:,Dem:Dem
+1),0);
        K(Dem)=norm(sysr,inf);
        K(Dem+1)=K(Dem);
        if Dem < nr-2
            Tr(Dem+2,Dem+1)=0;
        end
        Dem=Dem+2;
    end
end
[H,id]=sort(K,'descend');
select=zeros(nr,1);
for j=1:nr
    if abs(H(j)-H(1))<10^(-5)

```

```

        select(id(j))=1;
        count=count+1;
    end
end
[Ur,Tr]=ordschur(Ur,Tr,select);
I=eye(order);
Z=zeros(order,n-order);
U=[I,Z;Z',Ur];
Ac=U'*Ac*U;
Bc=U'*Bc;
Cc=Cc*U;
Dc=D;
end
end

```

Phụ lục 4. Lập trình thuật toán giảm bậc mới theo chỉ số trội H_2

Core file 'htwo_MK.m'

```

function [Ac,Bc,Cc,Dc]=htwo_MK(Gb)
[A,B,C,D] = ssdata(Gb);
[U,Delta]=schur(full(A),'real');
L=lyapchol(Delta,U'*C');
T=U*inv(L);
% -----
Ac=inv(T)*A*T;
Bc=inv(T)*B;
Cc=C*T;
count=0;
n=size(Ac,1);
while (count<n),
    order=count;
    AcR=Ac(order+1:n,order+1:n);
    BcR=Bc(order+1:n,:);

```

```

CcR=Cc(:,order+1:n);
nr=size(AcR,1);
lambda=diag(AcR) ;
Ur=eye(nr);
Tr=AcR;
for i=1:nr
    for j=i+2:nr
        Tr(j,i)=0;
    end
end
end
%Sap xep tinh chat quan trong cua diem cuc
eigT=eig(Tr);
K=zeros(nr,1);
Dem=1;
while (Dem <= nr),
    if abs(Tr(Dem,Dem)-eigT(Dem,1))<10^(-8)
        if Dem<nr
            Tr(Dem+1,Dem)=0
        end
        sysr=ss(AcR(Dem,Dem),BcR(Dem,:),CcR(:,Dem),0);
        K(Dem)=norm(sysr,2);
        Dem=Dem+1;
    else
        sysr=ss(AcR(Dem:Dem+1,Dem:Dem+1),BcR(Dem:Dem+1,:),CcR(:,Dem:Dem
+1),0);
        K(Dem)=norm(sysr,2);
        K(Dem+1)=K(Dem);
        if Dem < nr-2
            Tr(Dem+2,Dem+1)=0
        end
        Dem=Dem+2;
    end
end

```

```

    end
end
[H,id]=sort(K,'descend');
select=zeros(nr,1);
%   Xác định điểm cực cần dịch chuyển
for j=1:nr
    if abs(H(j)-H(1))<10^(-5)
        select(id(j))=1;
        count=count+1;
    end
end
[Ur,Tr]=ordschur(Ur,Tr,select);
I=eye(order);
Z=zeros(order,n-order);
U=[I,Z;Z',Ur];
Ac=U'*Ac*U;
Bc=U'*Bc;
Cc=Cc*U;
Dc=D;
end
end

```

Phụ lục 5. Lập trình thuật toán giảm bậc theo chỉ số trội hỗn hợp H_∞/H_2

Core file ‘mixed2_MK.m’

```

[Ac,Bc,Cc,Dc]=mixed2_MK(Gb)
[A,B,C,D] = ssdata(Gb);
[U,Delta]=schur(full(A),'real');
L=lyapchol(Delta',U'*C');
T=U*inv(L);
Ac=inv(T)*A*T;
Bc=inv(T)*B;
Cc=C*T;

```

```

count=0;
n=size(Ac,1);
while (count<n),
    order=count;
    AcR=Ac(order+1:n,order+1:n);
    BcR=Bc(order+1:n,:);
    CcR=Cc(:,order+1:n);
    nr=size(AcR,1);
    lambda=diag(AcR) ;
    Ur=eye(nr);
    Tr=AcR;
    for i=1:nr
        for j=i+2:nr
            Tr(j,i)=0;
        end
    end
%   Sap xep tinh chat quan trong cua diem cuc
    eigT=eig(Tr);
    K=zeros(nr,1);
    K2=zeros(nr,1);
    K8=zeros(nr,1);
    Dem=1;
    while (Dem <= nr),
        if abs(Tr(Dem,Dem)-eigT(Dem,1))<10^(-8)
            if Dem<nr
                Tr(Dem+1,Dem)=0;
            end
            sysr=ss(AcR(Dem,Dem),BcR(Dem,:),CcR(:,Dem),0);
%           Hinf- Hinf-dominat index
            K8(Dem)=norm(sysr,inf);
%           H2-dominant index

```

```

        K2(Dem)=norm(sysr,2);
        Dem=Dem+1;
    else
        sysr=ss(AcR(Dem:Dem+1, Dem:Dem+1), BcR(Dem:Dem+1,:), CcR(:, Dem:Dem+1), 0);
    %      Hinf- Hinf-dominat index
        K8(Dem)=norm(sysr,inf);
        K8(Dem+1)=K8(Dem);
    %      H2-dominant index
        K2(Dem)=norm(sysr,2);
        K2(Dem+1)=K2(Dem);
        if Dem < nr-2
            Tr(Dem+2, Dem+1)=0;
        end
        Dem=Dem+2;
    end
end
w8=0.95;
w2=0.15;
for i=1:nr
    K(i)=w8*K8(i)+w2*K2(i);
end
[H,id]=sort(K,'descend');
select=zeros(nr,1);
%      Xac dinh diem cuc can dich chuyen
for j=1:nr
    if abs(H(j)-H(1))<10^(-5)
        select(id(j))=1;
        count=count+1;
    end
end
end

```

```

[Ur,Tr]=ordschur(Ur,Tr,select);
I=eye(order);
Z=zeros(order,n-order);
U=[I,Z;Z',Ur];
Ac=U'*Ac*U;
Bc=U'*Bc;
Cc=Cc*U;
Dc=D;
end
end

```

Phụ lục 6. Lập trình thuật toán giảm bậc gián tiếp hệ không ổn định
Core file ‘Re_Unstable_TT.m’

```

function [Gr1,Gr2,Gr3]=Re_Unstable_TT(G)
[ac,bc,cc,dc]=ssdata(G);
n=length(ac)
disp('CHON BAC BO DIEU KHIEN GIAM BAC r <= n')
r = input('r = ');
[Gb,Gkb]=stabsep(G);
[a,b,c,d]=ssdata(Gb);
n1=length(a);
n2=n-n1;
    if r>n2
        Gb=balreal(Gb);
%   Giam bac theo diem cuc troi chuan Hinf
        [Ac,Bc,Cc,Dc]=hinf_MK(Gb);
        Acr1=Ac(1:r-n2,1:r-n2);
        Bcr1=Bc(1:r-n2,:);
        Ccr1=Cc(:,1:r-n2);
        Dcr1=Dc;
        Gcr1=ss(Acr1,Bcr1,Ccr1,Dcr1);
        Gr1=Gcr1+Gkb;
    end
end

```

```

    norm(R-Gr1,inf)
%   Giam bac theo diem cuc troi chuan H2
    [Ac,Bc,Cc,Dc]=htwo_MK(Gb);
    Acr2=Ac(1:r-n2,1:r-n2);
    Bcr2=Bc(1:r-n2,:);
    Ccr2=Cc(:,1:r-n2);
    Dcr2=Dc;
    Gcr2=ss(Acr2,Bcr2,Ccr2,Dcr2);
    Gr2=Gcr2+Gkb;
%   Giam bac theo diem cuc troi chuan hon hop H2 va Hinf
    [Ac,Bc,Cc,Dc]=mixed2_MK(Gb);
    Acr3=Ac(1:r-n2,1:r-n2);
    Bcr3=Bc(1:r-n2,:);
    Ccr3=Cc(:,1:r-n2);
    Dcr3=Dc;
    Gcr3=ss(Acr3,Bcr3,Ccr3,Dcr3);
    Gr3=Gcr3+Gkb;
end
end

```

Phụ lục 7. Lập trình thuật toán chặt cân bằng mở rộng

Core file 'balance_new.m'

```

function [Gr]=balace_new (G)
[Ac,Bc,Cc,Dc]=ssdata(R);
n=length(Ac)
disp('CHON BAC BO DIEU KHIEN GIAM BAC r <= n')
r = input('r = ');
In=eye(n);
Ir=eye(r);
%%%%%% Tìm diem cuc khong on dinh lon nhat
beta=max(real(eig(R)))+0.01;
%%%%%% Chuyen sang he on dinh - beta

```

```

A=Ac-beta*In;
Gbeta=ss(A,Bc,Cc,Dc);
%%%% Chuyen he ve dang can bang
nx0 = size(Gbeta.a,1);
[isProper,R] = isproper(Gbeta,true);
if ~isProper
    ctrlMsgUtils.error('Control:general:NotSupportedImproperSys','balreal')
elseif nargout>2 && order(Gbeta)<nx0
    ctrlMsgUtils.error('Control:transformation:balreal1')
end
[Ds,Dns,~,T,Ti] = stabsep(Gbeta);
Rr = lyapchol(Ds.a,Ds.b,[],'noscale');
Ro = lyapchol(Ds.a',Ds.c',[],'noscale');
[u,s,v] = svd(Ro*Rr');
g = diag(s);
ns = length(g);
ZeroTol = 10*eps;
ZeroHSV = (g<=ZeroTol*max(g));
if all(ZeroHSV)
    Ts = eye(ns);
elseif ~any(ZeroHSV)
    sgi = 1./sqrt(g);
    Ts = repmat(sgi,[1 ns]) .* (u'*Ro);
    Tsi = (Rr'*v) .* repmat(sgi',[ns 1]);
else
    nz = sum(ZeroHSV);
    nnz = ns-nz;
    sgi = 1./sqrt(g(1:nnz));
    Ts1 = lrscale(u(:,1:nnz)'*Ro,sgi,[]);
    Tsi1 = lrscale(Rr'*v(:,1:nnz),[],sgi);
    [q,junk] = qr(Tsi1);

```

```

Ts2 = q(:,nnz+1:ns)';
[q,junk] = qr(Ts1');
Tsi2 = q(:,nnz+1:ns);
[u,s,v] = svd(Ts2*Tsi2);
sgi = 1./sqrt(diag(s(1:nz,1:nz)));
Ts2 = lrscale(u(:,1:nz)'*Ts2,sgi,[]);
Tsi2 = lrscale(Tsi2*v(:,1:nz),[],sgi);
Ts = [Ts1;Ts2];
Tsi = [Tsi1,Tsi2];
end
[aNs,bNs,cNs] = ssdata(Dns);
[as,bs,cs] = ssdata(Ds);
nns = size(aNs,1);
T = blkdiag(eye(nns),Ts) * T;
% He can bang moi
Am=T*A*inv(T);
Bm=T*Bc;
Cm=Cc*inv(T);
Dm=Dc;
Abr=Am(1:r,1:r);
Bbr=Bm(1:r,:);
Cbr=Cm(:,1:r);
Gbr=ss(Abr,Bbr,Cbr,Dc);
%%%%%% Chuyen ve dang ban dau
Ar=Abr+beta*Ir;
Gr=ss(Ar,Bbr,Cbr,Dc);
end

```

Phụ lục 8. Thiết kế mô hình xe hai bánh tự cân bằng

Qua tìm hiểu của tác giả thì có ba phương pháp điều khiển cân bằng cho xe hai bánh như sau:

(i) điều khiển cân bằng sử dụng lực ly tâm, được mô tả trong các tài liệu tham khảo [28], [34].

(ii) điều khiển cân bằng bằng cách thay đổi tâm trọng lực, được chỉ ra trong tài liệu [39], [47] và [86].

(iii) điều khiển cân bằng bằng bánh đà được chỉ ra trong các nghiên cứu [26], [43], [78], [79], [80].

Trong nghiên cứu này tác giả lựa chọn phương pháp điều khiển cân bằng xe hai bánh bằng bánh đà giúp xe có thể cân bằng được cả khi đứng yên và khi chịu tác động của ngoại lực.

Trong các mô hình xe hai bánh điều khiển bằng bánh đà, mô hình xe hai bánh sử dụng bánh đà theo nguyên lý con quay hồi chuyển [26], [43], [50], [78], [79] để tạo ra mômen cân bằng cho xe thì bánh đà thường phải quay với tốc độ lớn, do vậy bánh đà tiêu tán một lượng năng lượng lớn, điều này sẽ gây khó khăn về mặt năng lượng hoạt động của xe khi xe chỉ được cấp nguồn bởi một ắc quy có dung lượng giới hạn.

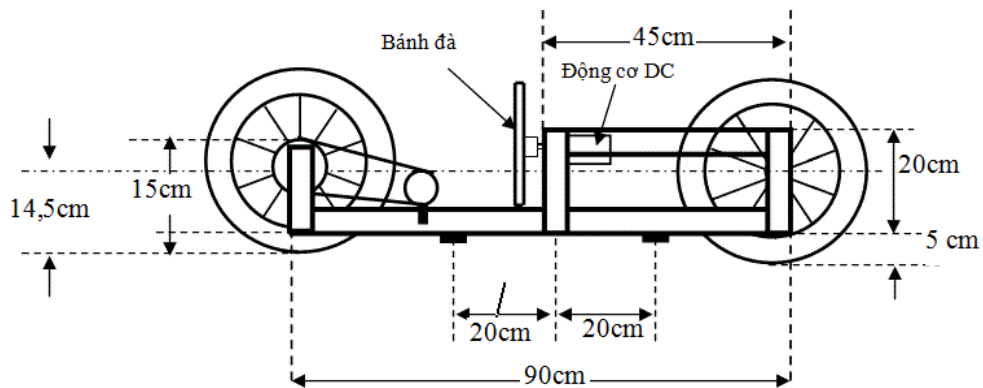
Ngược lại mô hình xe hai bánh sử dụng bánh đà theo nguyên lý con lắc ngược [16], [80], để tạo ra mômen cân bằng cho xe thì bánh đà thường chỉ quay với vận tốc rất nhỏ do đó năng lượng tiêu tán của bánh đà thấp do đó mô hình này phù hợp về mặt tiết kiệm năng lượng cho xe. Do vậy, tác giả lựa chọn xây dựng mô hình xe hai bánh tự cân bằng sử dụng bánh đà theo nguyên lý con lắc ngược.

8.1. Thiết kế phần cơ khí xe hai bánh tự cân bằng

Nguyên lý cân bằng xe hai bánh sử dụng bánh đà: Xe hai bánh tự cân bằng sẽ được trang bị một bánh đà và một động cơ một chiều có tác dụng tạo ra mô men xoắn cho bánh đà. Khi xe bị nghiêng khỏi vị trí cân bằng thì mô men trọng lượng của xe có xu hướng kéo xe đổ xuống, khi đó động cơ sẽ quay bánh đà và gây ra một mô men xoắn tương ứng tác động lên xe theo chiều ngược chiều nghiêng của xe (chống lại mômen trọng lượng) có tác dụng kéo xe trở lại vị trí cân bằng.

Phần bánh của xe sử dụng bánh xe đạp trẻ em. Phần khung xe được xây dựng bằng vật liệu nhôm. ***Bánh xe phía trước của xe được gắn cố định nên xe chỉ có thể đi thẳng, để tác giả chỉ tập trung cho bài toán điều khiển cân bằng xe khi xe chuyển động thẳng và khi xe chịu tác động của ngoại lực.***

Kích thước xe được thể hiện trong hình 8.1 như sau:



Hình 8.1 Kích thước xe hai bánh tự cân bằng

a. Cơ cấu cân bằng

Tác giả thiết kế cơ cấu cân bằng bao gồm: Động cơ một chiều tạo mô men cho hệ thống, bánh đà với mô men quán tính lớn. Động cơ truyền mô men qua bánh đà thông qua một bạc nối với tỉ số chuyển $a = 1$. Động cơ được gắn cứng vào khung của xe hai bánh thông qua hệ thống vít đỡ.

Kích thước của bánh đà: Đường kính ngoài $D_n = 0.26 \text{ m}$; Đường kính trong $D_t = 0.22 \text{ m}$; Bề dày vành bánh đà $t_n = 0.021 \text{ m}$; Bề dày phần trong bánh đà $t_t = 0.005 \text{ m}$

Mômen quán tính của bánh đà

Bánh đà được làm bằng thép có khối lượng riêng $\rho = 7850 \text{ Kg} / \text{m}^3$.

- Khối lượng vành ngoài bánh đà $m_n = \pi t_n \frac{(D_n^2 - D_t^2)}{4} \rho = 2,485 \text{ kg}$.

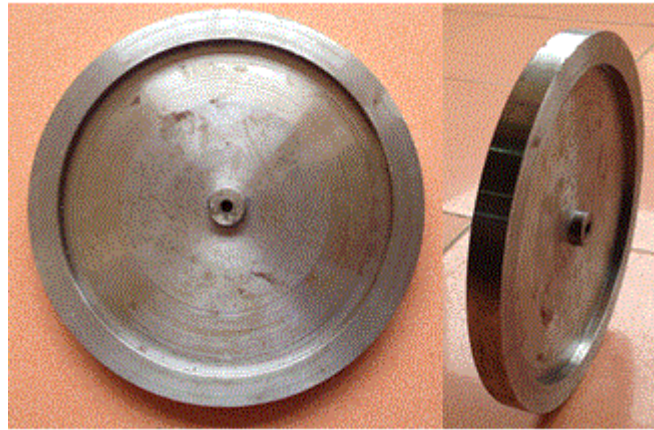
- Khối lượng vành trong bánh đà $m_t = \pi t_t \frac{(D_t^2)}{4} \rho = 1,491 \text{ kg}$.

- Tổng khối lượng bánh đà: $m_b = m_n + m_t = 3,976 \text{ kg}$.

- Mômen quán tính của bánh đà là:

$$I = \frac{1}{2} m_n \frac{(D_n^2 - D_t^2)}{4} + \frac{1}{2} m_t \frac{D_t^2}{4} = 0,03289 \text{ kg.m}^2$$

Hình dạng thực tế của bánh đà được thể hiện trong hình 8.2 như sau:



Hình 8.2. Hình dạng thực tế của bánh đà

Lựa chọn động cơ một chiều DC: Hình dạng của động cơ điện một chiều được thể hiện trong hình 8.3 như sau:



Hình 8.3. Động cơ một chiều DC

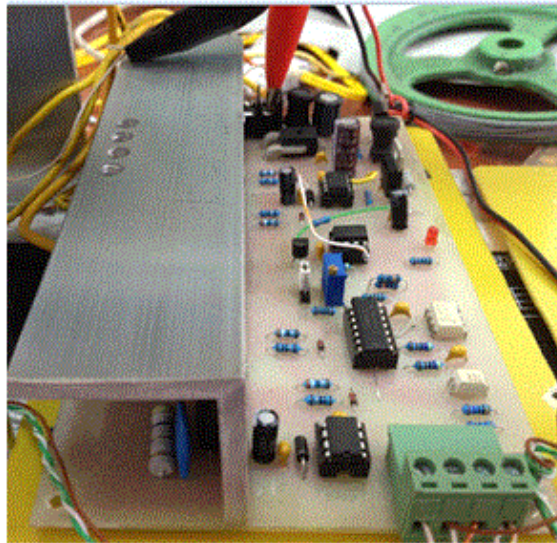
Động cơ một chiều có thông số như sau:

Bảng 8.1. Thông số động cơ một chiều

STT	Thông số	Giá trị	Đơn vị
1	P	100	W
2	U_{dm}	15	V
5	R	0,52	Ω
6	Tỷ số truyền	1:1	
7	K_e	0,045	V.s/rad
8	K_m	0,045	N.m/A
9	ω	355.86	Rad/s

b. Hệ thống điều khiển tiến lùi

Hệ thống sử dụng động cơ DC. Động cơ này sẽ kéo xe chuyển động tiến lùi qua hệ thống truyền động xích có tỷ số truyền là 1:1. Hệ thống điều khiển tiến lùi được thể hiện trong hình 8.4 như sau:

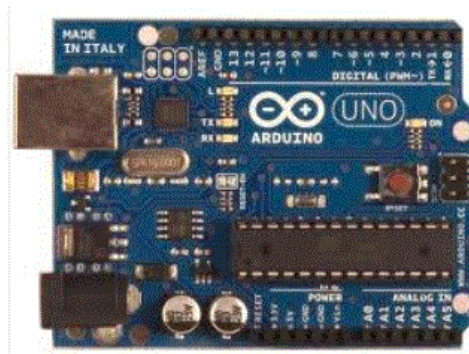


Hình 8.4. Hệ thống điều khiển tiến lùi của xe hai bánh

8.2. Thiết kế phần điện điều khiển cân bằng xe hai bánh

Hệ thống điều khiển cân bằng cho xe hai bánh tự cân bằng: Có chức năng duy trì xe cân bằng: là hệ thống có 2 đầu vào là đầu vào lấy từ cảm biến góc nghiêng (gồm góc nghiêng và vận tốc góc nghiêng của xe) và đầu vào lấy từ cảm biến tốc độ gắn với động cơ quay bánh đà. Đầu ra của hệ thống là duy trì góc nghiêng của bánh đà bằng 0.

a. Vi mạch điều khiển



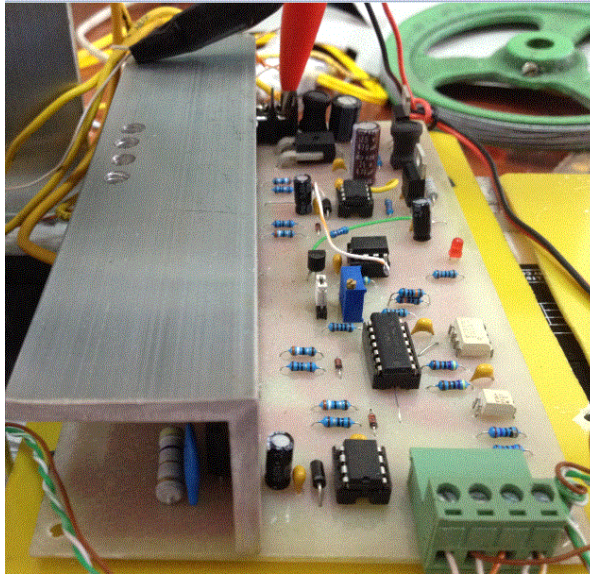
Hình 8.5. Mạch Arduino

Tác giả lựa chọn bo mạch Arduino sử dụng dòng vi xử lý 8-bit megaAVR của Atmel với hình dạng bo mạch được thể hiện trong hình 8.5. Các dòng vi xử lý này (với hai chip phổ biến nhất là ATmega328 và ATmega2560) cho phép lập trình các ứng dụng điều khiển phức tạp do được trang bị cấu hình mạnh với các loại bộ nhớ ROM, RAM và Flash, các ngõ vào ra digital I/O trong đó có nhiều ngõ có khả năng xuất tín hiệu PWM, các ngõ đọc tín hiệu analog và các chuẩn giao tiếp đa dạng như UART, SPI, TWI (I2C).

Sức mạnh xử lý; Xung nhịp: 16MHz; EEPROM: 1KB (ATmega328) và 4KB (ATmega2560); SRAM: 2KB (Atmega328) và 8KB (Atmega2560); Flash: 32KB (Atmega328) và 256KB (Atmega2560)

b. Mạch cầu H

Để điều khiển nguồn cấp cho động cơ điện một chiều quay bánh đà, tác giả sử dụng mạch cầu H được thể hiện trong hình 8.6 như sau:



Hình 8.6. Mạch cầu H điều khiển động cơ quay bánh đà

c. Nguồn cấp

Hệ thống nguồn cấp phải đủ năng lượng và điện áp để duy trì cho xe hoạt động trong thời gian dài tuy nhiên khối lượng của hệ thống nguồn cấp cần phải nhỏ để không ảnh hưởng đến khối lượng của xe. Do đó tác giả lựa chọn hệ thống nguồn gồm 2 Acquy 12V 2,2Ah mắc nối tiếp nhau để thu được nguồn 24V 4,4Ah. Hệ thống nguồn này cũng đồng thời cấp điện của cả hệ thống điều khiển tiến lùi của xe. Hình dạng thực tế của khối nguồn được thể hiện trong hình 8.7 như sau:



Hình 8.7. Khối nguồn của xe

d. Cảm biến góc nghiêng

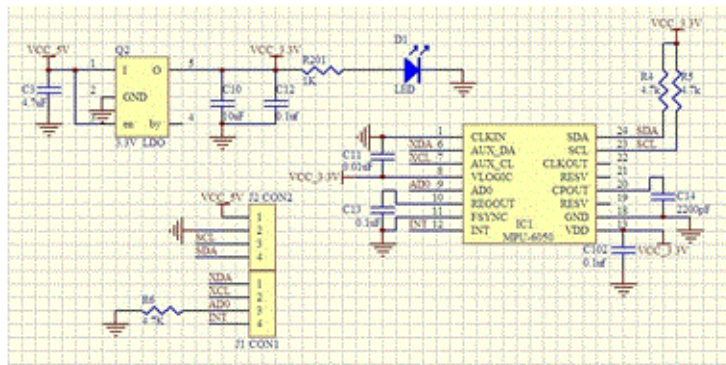
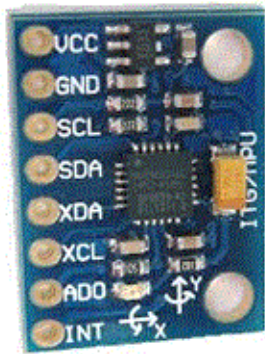
Tác giả sử dụng cảm biến góc gia tốc GY-521 6DOF MPU-6050 có thông số kỹ thuật như sau: MPU-6050 module (3 trục góc + 3 trục gia tốc); Chip: MPU-6050; Nguồn cấp: 3-5V; Chuẩn giao tiếp: I2C; Chip 16bit AD converter, 16-bit data Output.

Độ phân giải vận tốc góc (ω): $\pm 250, 500, 1000, 2000$ $^{\circ}/s$ tương đương $1^{\circ}/s = 1.3, 14/180$ rad/s.

Độ phân giải gia tốc góc: $\pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16g$ ($g = 9,81$ m/s^2 là gia tốc trọng trường).

Chuẩn giắc cắm 2.54mm.

Hình dạng và sơ đồ mạch cảm biến gia tốc Gyro GY-521 6DOF MPU6050 được thể hiện trong hình 8.8 như sau:



a. Hình dạng cảm biến

b. Sơ đồ mạch cảm biến

Hình 8.8. Cảm biến gia tốc Gyro GY-521 6DOF MPU6050

e. Cảm biến tốc độ

Để xác định tốc độ quay của bánh đà, tác giả sử dụng Encoder Sharp có thông số kỹ thuật như sau: Encoder Sharp 100 xung; Khối lượng 100g; Nguồn 5VDC, hai pha A, B; Đường kính trục 6mm. Đường kính vỏ ngoài 45mm; Tốc độ 5.000.000 xung/phút. Hình dạng Encoder Sharp được thể hiện trong hình 9.9 như sau:



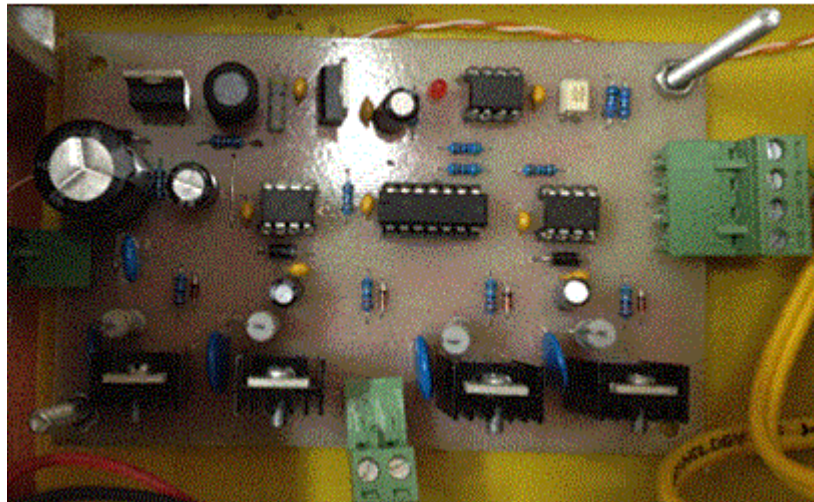
Hình 8.9. Cảm biến tốc độ

8.3. Thiết kế hệ thống điều khiển tiến lùi

Hệ thống điều khiển xe chạy tiến lùi: Có chức năng điều khiển xe hai bánh chạy tiến lùi.

a. Mạch cầu H điều khiển động cơ tiến lùi

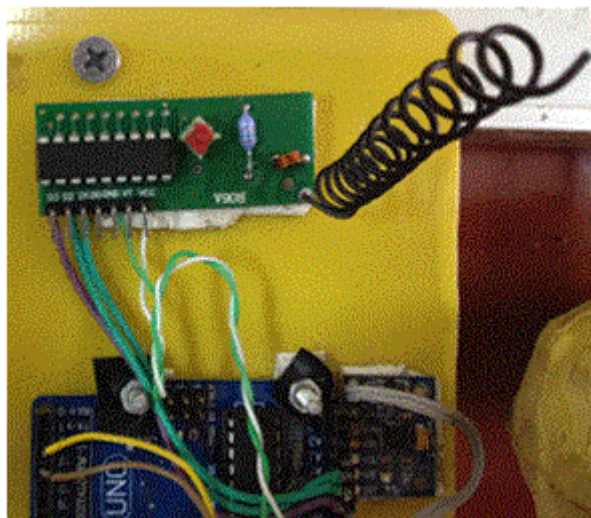
Để điều khiển nguồn cấp cho động cơ điện một chiều tiến lùi, tác giả sử dụng mạch cầu H được thể hiện trong hình 8.10 như sau:



Hình 8.10. Mạch cầu H điều khiển động cơ tiến lùi

b. Hệ thống điều khiển tiến lùi từ xa

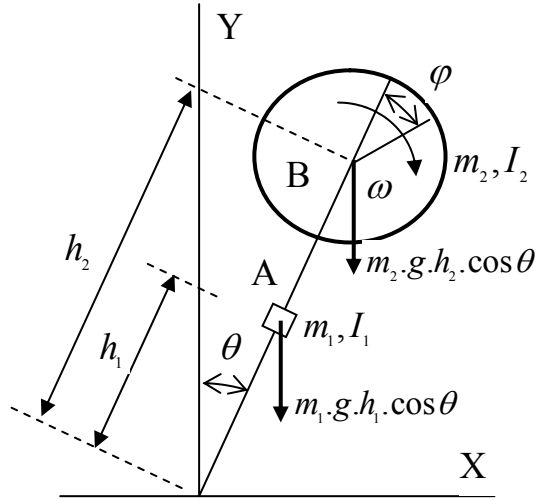
Để điều khiển xe tiến lùi, tác giả sử dụng môđul điều khiển từ xa được thể hiện trong hình 8.11 như sau:



Hình 8.11. Hệ thống điều khiển từ xa kết nối với Arduino

Phụ lục 9. Xây dựng mô hình danh định của xe hai bánh tự cân bằng

Xét mô hình xe hai bánh được thể hiện trong hình 9.1 như sau:



Hình 9.1. Mô hình xe hai bánh từ cân bằng

Với: m_1 là trọng lượng của xe (bao gồm cả động cơ)

m_2 là trọng lượng của bánh đà

h_1 là chiều cao của tâm trọng lực của xe (không kể bánh đà)

h_2 là chiều cao của tâm trọng lực của bánh đà

I_1 là mô men quán tính của xe

I_2 là mô men quán tính của bánh đà

θ là góc nghiêng của xe so với phương thẳng đứng

φ là góc quay của bánh đà

Ta có:

Vận tốc góc của xe quanh vị trí thẳng đứng là $\dot{\theta}$

Vận tốc góc của bánh đà quanh trục quay là $\dot{\varphi}$

Vận tốc tuyệt đối của điểm A là $|v_A| = h_1 \dot{\theta}$

Vận tốc tuyệt đối của điểm B là $|v_B| = h_2 \dot{\theta}$

Để xây dựng mô hình động học của hệ, trong nghiên cứu [26], tác giả sử dụng phương trình Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (9.1)$$

Trong đó T tổng động năng của hệ, V là tổng thế năng của hệ, Q_i là lực ngoài, q_i hệ tọa độ tổng quát.

Tổng động năng của hệ được xác định như sau:

$$T = T_1 + T_2$$

T_1 là động năng của xe hai bánh và được xác định bởi công thức sau:

$$T_1 = T_{11} + T_{12}$$

Với T_{11} là động năng chuyển động thẳng của điểm A và được xác định bởi công thức $T_{11} = \frac{1}{2} m_2 |v_B|^2$. T_{12} là động năng chuyển động quay của xe hai bánh và được xác định bởi công thức $T_{12} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2$.

T_2 là động năng của bánh đà và được xác định bởi công thức sau:

$$T_2 = T_{21} + T_{22} = \frac{1}{2} m_2 |v_B|^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2$$

Từ đây ta có:

$$T = \frac{1}{2} m_1 |v_A|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_B|^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 + I_2 \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (9.2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 + I_2 \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (9.3)$$

Tổng thế năng của hệ là:

$$V = g \cdot \cos \theta \cdot (m_1 h_1 + m_2 h_2) \quad (9.4)$$

Với $q_i = \theta$, phương trình Lagrange trở thành:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right\} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (9.5)$$

Từ (9.3) ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta} + I_2 \dot{\phi} \quad (9.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\phi} \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (9.8)$$

$$\text{Từ (9.4) ta có: } \frac{\partial V}{\partial \theta} = -g \cdot \sin \theta \cdot (m_1 h_1 + m_2 h_2) \quad (9.9)$$

$$Q_\theta = 0 \quad (9.10)$$

Thay công thức (9.6 – 9.10) vào (9.5) ta được như sau:

$$(m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\phi} - g \cdot \sin \theta \cdot (m_1 h_1 + m_2 h_2) = 0 \quad (9.11)$$

Với $q_i = \varphi$, phương trình Lagrange trở thành

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right\} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (9.12)$$

Từ (9.3) ta có:
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_2 \dot{\phi} + I_2 \dot{\theta} \quad (9.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_2 \ddot{\phi} + I_2 \ddot{\theta} \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (9.15)$$

Từ (9.5) ta có:
$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (9.16)$$

$$Q_\varphi = T_m \quad (9.17)$$

Với T_m là mô men xoắn của trục động cơ.

Thay phương trình (9.13 – 9.17) vào phương trình (9.5) ta thu được phương trình sau:
$$I_2 \ddot{\phi} + I_2 \ddot{\theta} = T_m. \quad (9.18)$$

Xét một động cơ điện một chiều có tỷ số truyền là a:1, thì mô men xoắn của động cơ DC truyền động cho bánh đà như sau:

$$T_m = a K_m \left[\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right], \quad (9.19)$$

Với K_m là hằng số mômen của động cơ,

K_e là hằng số sức điện động của động cơ;

R là điện trở của động cơ.

Thay (9.19) vào (9.18) ta có:

$$I_2 \ddot{\phi} + I_2 \ddot{\theta} = T_m = a K_m \left[\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right]. \quad (9.20)$$

Phương trình (9.11) và (9.20) chính là hệ phương trình động học của hệ. Rõ ràng với các phương trình động lực học trên thì **hệ là phi tuyến**.

Tuyến tính hóa mô hình và chuyển về dạng mô hình không gian trạng thái

Giả thiết rằng khi xe hoạt động thì góc nghiêng của xe rất nhỏ ($\theta < 10^\circ$), ta tuyến tính hóa phương trình (9.11) quanh điểm cân bằng ($\theta = \varphi = 0$, $\sin \theta = \theta$) thu được hệ phương trình sau:

$$(m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\phi} - g \theta (m_1 h_1 + m_2 h_2) = 0 \quad (9.21)$$

$$I_2 \ddot{\phi} + I_2 \ddot{\theta} = T_m = a K_m \left[\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right] \quad (9.22)$$

$$\text{Đặt } A_1 = (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2); \quad B_1 = (m_1 h_1 + m_2 h_2)$$

$$\text{Đặt } x = \begin{bmatrix} \theta = x_1 \\ \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{\phi} = x_3 \end{bmatrix}, \text{ là biến trạng thái, } y = \theta, \quad u = U$$

$$\text{Ta có: } \dot{x}_1 = x_2$$

$$\text{Từ (9.22) ta có: } \ddot{\phi} = \frac{a K_m}{I_2} \left(\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right) - \ddot{\theta} \quad (9.23)$$

Thay (9.23) vào (9.21) ta thu được:

$$\begin{aligned} & A_1 \ddot{\theta} + I_2 \left(\frac{a K_m}{I_2} \left(\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right) - \ddot{\theta} \right) - B_1 g \theta = 0 \\ \Rightarrow & (A_1 - I_2) \ddot{\theta} = B_1 g \theta + \frac{a K_m K_e}{R} \dot{\phi} - \frac{a K_m}{R} U \\ \Rightarrow & \ddot{\theta} = \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} \theta + \frac{a K_m K_e}{R(A_1 - I_2)} \dot{\phi} - \frac{a K_m}{R(A_1 - I_2)} U \end{aligned} \quad (9.24)$$

$$\text{hay } \dot{x}_2 = \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} x_1 + \frac{a K_m K_e}{R(A_1 - I_2)} x_3 - \frac{a K_m}{R(A_1 - I_2)} u$$

Thay (9.24) vào (9.23) ta có

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{a K_m}{I_2} \left(\frac{U - K_e \dot{\phi}}{R} \right) - \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} \theta - \frac{a K_m K_e}{R(A_1 - I_2)} \dot{\phi} + \frac{a K_m}{R(A_1 - I_2)} U \\ \Rightarrow & \ddot{\phi} = -\frac{B_1 g}{A_1 - I_2} \theta - a K_m K_e \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \dot{\phi} + a K_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} U \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\text{hay } \dot{x}_3 = -\frac{B_1 g}{A_1 - I_2} x_1 - a K_m K_e \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} x_3 + a K_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} u$$

Mà ta có $y = x_1$

Từ đây ta có hệ phương trình trạng thái mô tả hệ như sau:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u\end{aligned}\quad (9.26)$$

Với thông số của hệ như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} & 0 & \frac{aK_m K_e}{R(A_1 - I_2)} \\ -\frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} & 0 & -aK_m K_e \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{aK_m}{R(A_1 - I_2)} \\ aK_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]; \mathbf{D} = [0]$$

Các thông số danh định của xe hai bánh được thể hiện trong bảng 9.1 như sau:

Bảng 9.1. Các thông số của mô hình xe hai bánh tự cân bằng

Thông số	Giá trị	Đơn vị
Mô men quán tính của xe (I_1)	0,1105	Kg.m ²
Chiều cao của trọng tâm của xe (h_1)	0,105	m
Mô men quán tính của bánh đà (I_2)	0,03289	Kg.m ²
Chiều cao của trọng tâm bánh đà (h_2)	0,205	m
Khối lượng của xe (m_1)	10,024	Kg
Khối lượng bánh đà (m_2)	3,976	Kg
Hằng số sức điện động của động cơ (K_e)	0,045	V.s/Rad
Hằng số mômen của động cơ (K_m)	0,045	Nm/A
Điện trở động cơ (R)	0,52	Ω
Tỷ số truyền của động cơ (a)	1:1	
Gia tốc rơi tự do (g)	9,81	m/s ²

Thay số vào hệ phương trình (9.26) ta thu được các thông số như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 47.2048 & 0 & 0.0100 \\ -47.2048 & 0 & -0.1248 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2230 \\ 2.8541 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Chuyển mô hình xe sang dạng hàm truyền đạt ta có kết quả

$$S(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-0.223s}{s^3 + 0.1284s^2 - 47.2s - 5.589}$$

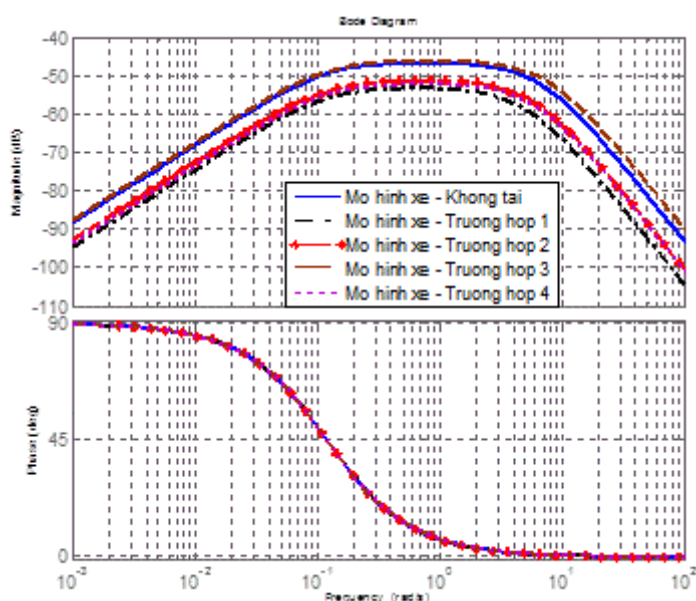
Nhận xét về mô hình xe hai bánh

Mô hình hóa xe hai bánh tự cân bằng cho thấy có một số tham số của xe hai bánh tự cân bằng là bất định như: khối lượng tải thay đổi dẫn tới chiều cao trọng tâm xe thay đổi, mô men quán tính của xe của biến đổi, ... đồng thời khi hoạt động xe hai bánh có thể chịu ảnh hưởng của các yếu tố bất định từ bên ngoài như: ngoại lực, nhiễu bất định do sự thay đổi của địa hình chuyển động, ... do đó mô hình xe hai bánh thực chất là một đối tượng bất định. Trong đó, tác giả quan tâm nhiều nhất đến tính bất định do sự biến đổi của khối lượng tải và ngoại lực tác động. Cụ thể, tác giả xét 4 trường hợp xe hai bánh mang tải khác nhau thể hiện trong bảng sau:

Bảng 9.2. Các thông số biến đổi của mô hình xe hai bánh khi tải của xe thay đổi

Trường hợp	Khối lượng tải m_t (kg)	Chiều cao trọng tâm xe h_1 (m)	Mô men quán tính của xe I_1 (Kg.m ²)
1	5	0.205	0.6314
2	5	0.155	0.3609
3	7	0.055	0.0515
4	7	0.155	0.409

Biểu diễn đồ thị bode của mô hình xe hai bánh trong các trường hợp xe hai bánh mang tải khác nhau, tác giả thu được hình 9.2 như sau:



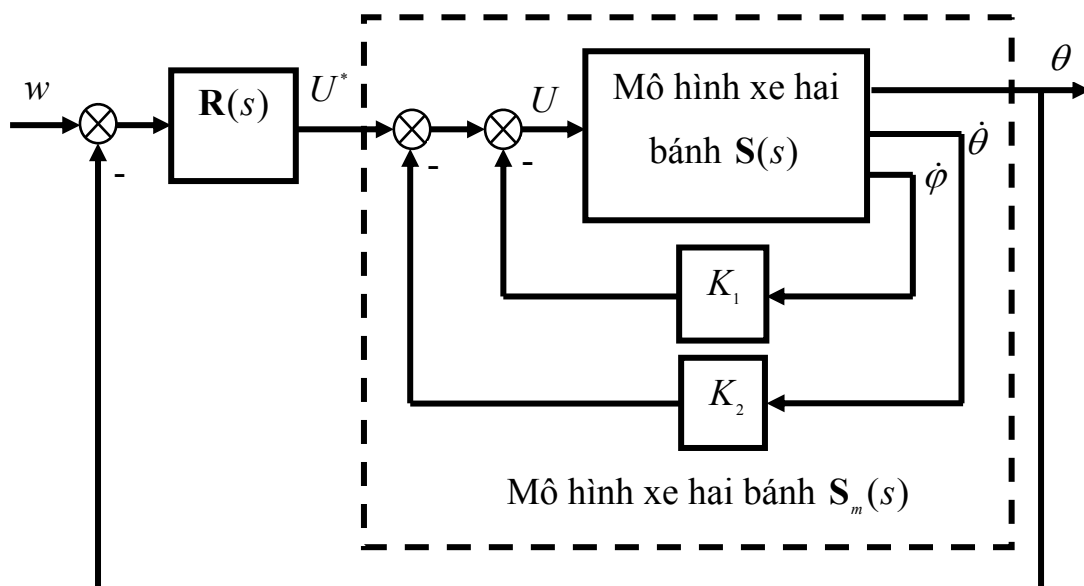
Hình 9.2. Đồ thị bode của mô hình xe hai bánh khi thông số mô hình thay đổi

Từ hình 9.2 ta thấy, các yếu tố bất định có thể làm giảm tính chính xác của mô hình toán học của xe hai bánh từ đó dẫn tới giảm chất lượng điều khiển, thậm chí có thể làm hệ thống trở nên mất ổn định.

Do tính chất bất định của mô hình xe hai bánh nên trong các thuật toán điều khiển đã được đề xuất để điều khiển xe hai bánh tự cân bằng như điều khiển phi tuyến trong tài liệu [14], [47], thiết kế bù bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận quỹ đạo gốc trong tài liệu [26] và điều khiển PD trong tài liệu [43], [77] thì điều khiển bền vững RH_∞ của trong tài liệu [78], [79] là thích hợp nhất để điều khiển đối tượng bất định.

Phụ lục 10. Thiết kế tối ưu RH_{∞} cho bài toán cân bằng xe hai bánh

Để thiết kế hệ thống điều khiển bền vững cho xe hai bánh tự cân bằng, tác giả thực hiện theo sơ đồ cấu trúc điều khiển thể hiện trong hình 10.1 như sau:



Hình 10.1. Sơ đồ cấu trúc hệ thống điều khiển bền vững xe hai bánh tự cân bằng

(*) Xây dựng mô hình xe hai bánh $S_m(s)$

Giả thiết rằng khi xe hoạt động thì góc nghiêng của xe rất nhỏ, ta tuyến tính hóa phương trình (9.11 – phụ lục 9) quanh điểm cân bằng ($\theta = \varphi = 0$, $\sin \theta = \theta$) thu được hệ phương trình sau:

$$(m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\phi} - g \theta (m_1 h_1 + m_2 h_2) = 0 \quad (10.1)$$

$$I_2\ddot{\phi} + I_2\ddot{\theta} = T_m = aK_m \left[\frac{U^* - (K_e + K_1)\dot{\phi} + K_2\dot{\theta}}{R} \right] \quad (10.2)$$

Đặt $A_1 = (m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_1 + I_2)$; $B_1 = (m_1 h_1 + m_2 h_2)$

Đặt $x = \begin{bmatrix} \theta = x_1 \\ \dot{\theta} = x_2 \\ \ddot{\theta} = x_3 \end{bmatrix}$, là biến trạng thái, $y = \theta$, $u = U^*$

Ta có : $\dot{x}_1 = x_2$

$$\text{Từ (10.2) ta có: } \ddot{\phi} = \frac{aK_m}{I_2} \left(\frac{U^* - (K_e + K_1)\dot{\phi} - K_2\dot{\theta}}{R} \right) - \ddot{\theta} \quad (10.3)$$

Thay (10.3) vào (10.2) ta thu được:

$$\ddot{\theta} = \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} \theta + \frac{aK_m K_2}{R(A_1 - I_2)} \dot{\theta} + \frac{aK_m (K_e + K_1)}{R(A_1 - I_2)} \dot{\phi} - \frac{aK_m}{R(A_1 - I_2)} U^* \quad (10.4)$$

$$\text{hay } \dot{x}_2 = \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} x_1 + \frac{aK_m K_2}{R(A_1 - I_2)} x_2 + \frac{aK_m (K_e + K_1)}{R(A_1 - I_2)} x_3 - \frac{aK_m}{R(A_1 - I_2)} u$$

Thay (10.4) vào (10.3) ta có:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & -\frac{B_1 g}{A_1 - I_2} \theta - aK_m K_2 \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \dot{\theta} - aK_m (K_e + K_1) \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \dot{\phi} \\ & + aK_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} U^* \end{aligned} \quad (10.5)$$

hay

$$\dot{x}_3 = -\frac{B_1 g}{A_1 - I_2} x_1 - aK_m K_2 \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} x_2 - aK_m (K_e + K_1) \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} x_3 + aK_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} u$$

Mà ta có $y = x_1$

Từ đây ta có hệ phương trình trạng thái mô tả hệ như sau:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (10.6)$$

Với thông số của hệ như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} & \frac{aK_m K_2}{R(A_1 - I_2)} & \frac{aK_m (K_e + K_1)}{R(A_1 - I_2)} \\ -\frac{B_1 g}{(A_1 - I_2)} & -aK_m K_2 \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} & -aK_m (K_e + K_1) \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{aK_m}{R(A_1 - I_2)} \\ aK_m \frac{A_1}{I_2 R(A_1 - I_2)} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \mathbf{D} = [0].$$

Lựa chọn thông số $K_1 = 2$, $K_2 = 5$ và thay các tham số trong bảng 9.1 (trong phụ lục 9) vào hệ phương trình (10.6) ta thu được các thông số như sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 47.2048 & 1.114 & 0.4560 \\ -47.2048 & -14.2706 & -5.8367 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2230 \\ 2.8541 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

Chuyển mô hình xe sang dạng hàm truyền đạt ta có kết quả

$$\mathbf{S}_m(s) = \frac{\boldsymbol{\theta}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \frac{-0.223s}{s^3 + 4.722s^2 - 47.2s - 254} \quad (10.7)$$

Các điểm cực của mô hình hàm truyền xe hai bánh tự cân bằng là: 7.0601; -5.8909 + 1.1283i; -5.8909 - 1.1283i

Vì $\mathbf{S}_m(s)$ có một điểm cực có phần thực dương nên $\mathbf{S}_m(s)$ là đối tượng không ổn định.

Để thiết kế bộ điều khiển bền vững cho xe hai bánh tự cân bằng tác giả thực hiện theo các bước thiết kế bộ điều khiển bền vững RH_∞ theo tài liệu [2]. Cụ thể như sau:

Bước 1: Xác định tập các bộ điều khiển ổn định mô hình xe hai bánh tự cân bằng $\mathbf{S}_m(s)$.

Để xác định tập các bộ điều khiển ổn định xe hai bánh tự cân bằng ta thực hiện theo phương pháp tham số hóa Youla, có thuật toán như sau:

Thuật toán xác định tập các bộ điều khiển ổn định [2]

Bước 1: Biến đổi $\mathbf{S}_m(s)$ thành $\mathbf{S}(\lambda)$.

trong đó $s = \frac{1 + a\lambda}{\lambda}$, với $a < 0$ được chọn tùy ý, miễn rằng không phải là điểm cực cũng như điểm không của $\mathbf{S}(s)$.

Ta có $\mathbf{S}_m(s) = \mathbf{S}_m\left(\frac{1 + a\lambda}{\lambda}\right) = \tilde{\mathbf{S}}_m(\lambda) = \frac{\mathbf{n}(\lambda)}{\mathbf{m}(\lambda)}$.

Bước 2: Tìm $\mathbf{x}(\lambda)$, $\mathbf{y}(\lambda)$ từ $\mathbf{n}(\lambda)$, $\mathbf{m}(\lambda)$ theo thuật toán Euclid mở rộng [2].

Bước 3: Chuyển ngược

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{n}\left(\frac{1}{s-a}\right), \quad \mathbf{M}(s) = \mathbf{m}\left(\frac{1}{s-a}\right)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}\left(\frac{1}{s-a}\right), \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{y}\left(\frac{1}{s-a}\right).$$

Bước 4: Tập các bộ điều khiển ổn định đối tượng $S(s)$ là

$$\mathcal{R}(s) = \left\{ \mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{X} + \mathbf{M}\mathbf{Q}}{\mathbf{Y} - \mathbf{N}\mathbf{Q}} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Q} \in \text{RH}_\infty \text{ và } \mathbf{N}\mathbf{X} + \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{I} \right\}. \quad (10.8)$$

Với mô hình xe hai bánh tự cân bằng, ta chọn $a = -3$, thực hiện các bước đã nêu ở trên, thu được kết quả như sau:

$$\mathbf{N}(s) = \frac{-0.223s}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

$$\mathbf{M}(s) = \frac{s^3 + 5.837s^2 - 47.2s - 254}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

$$\mathbf{X}(s) = \frac{-379.8s^2 - 4315s - 1.205e^4}{s^2 + 6s + 9}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{s^2 + 9.163s - 0.9567}{s^2 + 6s + 9}$$

Bước 2: Tìm $\mathbf{R}(s)$ trong $\mathcal{R}(s)$ để hệ có độ nhảy nhỏ nhất

Bài toán cực tiểu hóa độ nhảy $\|\mathbf{K}(s)\|_\infty = \left\| \frac{1}{1 + \mathbf{S}(s).\mathbf{R}(s)} \right\|_\infty \rightarrow \min$ được

chuyển về bài toán cân bằng mô hình như trong [2] tức $\|\mathbf{T} - \mathbf{U}\mathbf{Q}\|_\infty \rightarrow \min$, với

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{M}(s) = \frac{s^5 + 15s^4 + 5.322s^3 - 692.1s^2 - 2282s + 243}{s^5 + 15s^4 + 90s^3 + 270s^2 + 405s + 243}$$

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{N}(s).\mathbf{M}(s) = \frac{-0.223s^4 - 1.301s^3 + 10.53s^2 + 56.63s + 8.351.10^{-15}}{s^6 + 18s^5 + 135s^4 + 540s^3 + 1215s^2 + 1458s + 729}$$

Các điểm cực của $\mathbf{T}(s)$ là: $-3.0034 + 0.0000i$; $-3.0011 + 0.0033i$; $-3.0011 - 0.0033i$; $-2.9972 + 0.0020i$; $-2.9972 - 0.0020i$.

Các điểm cực của $\mathbf{U}(s)$ là : $-3.0104 + 0.0060i$; $-3.0104 - 0.0060i$; $-3.0000 + 0.0120i$; $-3.0000 - 0.0120i$; $-2.9896 + 0.0060i$; $-2.9896 - 0.0060i$ do tất cả các điểm cực của $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ đều nằm bên trái trục ảo nên $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ là ổn định hay $\mathbf{T}, \mathbf{U} \in \text{RH}_\infty$.

Các điểm không của $U(s)$ là: 6.7449, -7.6753; -4.9062; -0.0000

Vì hệ là SISO, $T, U \in RH_\infty$, $U(s)$ có một điểm cực $s_0 = 6.7449$ nằm bên trái trục ảo, nên theo tài liệu [2] ta có

$$Q^* = \frac{T(s) - T(s_0)}{U(s)} = \frac{E(s)}{F(s)} \quad (10.9)$$

trong đó

$$\begin{aligned} E(s) &= s^{10} + 39.74s^9 + 678.4s^8 + 6544s^7 + 3.943.10^4 s^6 + 1.543.10^5 s^5 + 3.921.10^5 s^4 \\ &\quad + 6.226.10^5 s^3 + 5.526.10^5 s^2 + 1.902.10^5 s - 2.626.10^4 \\ F(s) &= -0.223s^8 - 6.15s^7 - 70.54s^6 - 438.6s^5 - 1603s^4 - 3457s^3 - 4082s^2 - 2040s \\ &\quad - 3.009.10^{-13} \end{aligned}$$

Vì Q^* không hợp thức (bậc đa thức tử số cao hơn bậc đa thức mẫu số), nên theo tài liệu [2] bằng cách chia mẫu số của (10.9) cho đa thức bậc 2 (bằng bậc của tử số trừ đi bậc của mẫu số), ta có nghiệm cận tối ưu

$$\tilde{Q}^* = \frac{Q^*}{(es + 1)^2} = \frac{\tilde{E}(s)}{\tilde{F}(s)}, \text{ với } e = 0.001 \text{ (} 1 > e > 0 \text{ nhỏ tùy ý)} \quad (10.10)$$

Với

$$\begin{aligned} \tilde{E}(s) &= s^{10} + 39.74s^9 + 678.4s^8 + 6544s^7 + 3.943.10^4 s^6 + 1.543.10^5 s^5 + 3.921.10^5 s^4 \\ &\quad + 6.226.10^5 s^3 + 5.526.10^5 s^2 + 1.902.10^5 s - 2.626.10^4 \\ \tilde{F}(s) &= -2.23.10^{-7} s^{10} - 0.0004521s^9 - 0.2353s^8 - 6.291s^7 - 71.42s^6 - 441.8s^5 \\ &\quad - 1610s^4 - 3466s^3 - 4086s^2 - 2040s - 3.009.10^{-13} \end{aligned}$$

Các điểm cực của Q^* là : -1000; -1000; -7.675; -4.906; -3; -3; -3; -3; -3; -0.000

Các điểm cực của Q^* đều nằm bên trái trục ảo nên Q^* là bền.

$$\text{Thay (10.10) vào (10.8) ta được } R(s) = \frac{H(s)}{D(s)}$$

với

$$\begin{aligned} H(s) &= -2.23.10^{-7} s^{30} - 4.67.10^{-4} s^{29} - 0.266s^{28} - 22.96s^{27} - 1006s^{26} - 2.853.10^4 s^{25} \\ &\quad - 5.837.10^5 s^{24} - 4.199.10^{11} s^{18} - 9.144.10^6 s^{23} - 1.139.10^8 s^{22} - 1.158.10^9 s^{21} \\ &\quad - 9.776.10^9 s^{20} - 6.949.10^{10} s^{19} - 2.172.10^{12} s^{17} - 9.663.10^{12} s^{16} - 3.71.10^{13} s^{15} \\ &\quad - 1.231.10^{14} s^{14} - 3.53.10^{14} s^{13} - 8.74.10^{14} s^{12} - 1.862.10^{15} s^{11} - 3.398.10^{15} s^{10} \\ &\quad - 5.276.10^{15} s^9 - 6.903.10^{15} s^8 - 7.511.10^{15} s^7 - 6.676.10^{15} s^6 - 4.721.10^{15} s^5 \\ &\quad - 2.556.10^{15} s^4 - 9.953.10^{14} s^3 - 2.482.10^{14} s^2 - 2.977.10^{13} s - 0.00439 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(s) = & 4.971 \cdot 10^{-14} s^{30} + 2.032 \cdot 10^{-10} s^{29} + 2.663 \cdot 10^{-7} s^{28} + 1.221 \cdot 10^{-4} s^{27} + 9.72 \cdot 10^{-3} s^{26} \\
& + 0.3918 s^{25} + 10.14 s^{24} + 187.1 s^{23} + 2612 s^{22} + 2.862 \cdot 10^4 s^{21} + 1.088 \cdot 10^7 s^{18} \\
& + 2.523 \cdot 10^5 s^{20} + 1.82 \cdot 10^6 s^{19} + 5.428 \cdot 10^7 s^{17} + 2.273 \cdot 10^8 s^{16} + 8.005 \cdot 10^8 s^{15} \\
& + 2.372 \cdot 10^9 s^{14} + 5.9 \cdot 10^9 s^{13} + 1.225 \cdot 10^{10} s^{12} + 2.107 \cdot 10^{10} s^{11} + 2.962 \cdot 10^{10} s^{10} \\
& + 3.341 \cdot 10^{10} s^9 + 2.941 \cdot 10^{10} s^8 + 1.931 \cdot 10^{10} s^7 + 8.743 \cdot 10^9 s^6 + 2.286 \cdot 10^9 s^5 \\
& + 1.519 \cdot 10^8 s^4 - 5.226 \cdot 10^7 s^3 + 3.6 \cdot 10^{-6} s^2 + 5.32 \cdot 10^{-22} s
\end{aligned}$$

Kết quả tính toán bộ điều khiển được thể hiện ở phụ lục 11 (*bodieukhien.m*)

Phụ lục 11. Lập trình xác định bộ điều khiển ổn định bền vững xe hai bánh

Core file 'Bodieukhien.m'

```

disp(' CHON THAM SO a < 0 CHO QUA TRINH THAM SO HOA)
s=(1+a*landa)/landa')
a = input('a = ');
s=tf('s');
% Tham so mo hinh xe hai banh tu can bang
a1=0.2962;
b=0.2148;
c=42.67;
d=8.633;
%% Xac dinh n
n1=-a1*a;
n2=-a1;
n=n1*s^3+n2*s^2;
% Xac dinh m
m1=b*a^2+a^3-c*a-d;
m2=3*a^2+2*b*a-c;
m3=3*a+b;
m=m1*s^3+m2*s^2+m3*s+1;
% Xac dinh x va y
q1=n1/m1;
r21=n2-q1*m2;
r22=-m3*q1;

```

```

r23=-q1;
r2=r21*s^2+r22*s+r23;
% lay m/r2
q21=m1/r21;
q22=(m2-q21*r22)/r21;
q2=q21*s+q22;
r31=m3-q21*r23-q22*r22;
r32=1-q22*r23;
r3=r31*s+r32;
te1=-q21;
te2=-q22;
te=te1*s+te2
ga1=q1*q21;
ga2=1+q1*q22;
ga=ga1*s+ga2;
% Lay r2/r3
q31=r21/r31;
q32=(r22-q31*r32)/r31;
q3=q31*s+q32;
r4=r23-q32*r32;
% Lay r3/r4
q41=r31/r4;
q42=r32/r4;
q4=q41*s+q42;
% Xac dinh xn va yn
xn1=-te1*q31;
xn2=-(te1*q32+te2*q31);
xn3=1-te2*q32;
xn=xn1*s^2+xn2*s+xn3;
yn1=-ga1*q31;
yn2=-(ga1*q32+ga2*q31);

```

```

yn3=-q1-ga2*q32;
yn=yn1*s^2+yn2*s+yn3;
h=r4;
% Ket qua
x1=xn1/h;
x2=xn2/h;
x3=xn3/h;
x=x1*s^2+x2*s+x3;
y1=yn1/h;
y2=yn2/h;
y3=yn3/h;
y=y1*s^2+y2*s+y3;
% Kiem tra dieu khien nx+my=1
n*x
m*y
% Tim X va Y va N va Y
disp(' THAY landa=1/(s-a DE XAC DINH X VA Y)')
numN=n2*s-a*n2+n1- 3.288e-017;
demN=(s-a)^3;
N=numN/demN;
numM=s^3+(m3-3*a)*s^2+(3*a^2-2*m3*a+m2)*s+a^2*m3-a*m2+m1-a^3;
demM=(s-a)^3;
M=numM/demM;
numX=x3*s^2+(x2-2*a*x3)*s+a^2*x3-a*x2+x1;
demX=(s-a)^2;
X=numX/demX;
numY=y3*s^2+(y2-2*a*y3)*s+a^2*y3-a*y2+y1;
demY=(s-a)^2;
Y=numY/demY;
%% TIM BO DIEU KHIEON DINH BEN VUNG DOI TUONG
numMr=(s+6.22)*(s+0.2023);

```

```

numT=numY*numMr;
demT=demY*demM;
numU=numN*numMr;
demU=demN*demM;
numQ=numT*demU;
demQ=numU*demT*(0.001*s+1)^2;
Q=numQ/demQ;
R= (X+M*Q)/(Y-N*Q);

```

Phụ lục 12. Core file 'ABRB_alone.ino'

```

// Update 20.4
#include <I2Cdev.h>
#include <avr/io.h>
#include <avr/interrupt.h>
#include <avr/stdio.h>
#include <ave/math.h>
#include <util/delay.h >
#include "I2Cdev.h"
#include "MPU6050.h"
#if I2CDEV_IMPLEMENTATION == I2CDEV_ARDUINO_WIRE
    #include "Wire.h"
#endif
volatile unsigned char c,d,e;
volatile int encoder,data=0,val=0,_u;
volatile boolean state=0,state2=0,s=0;
volatile float
_gx=0,__gx,_ay=0,angle=0,_angle=0,k1=0,k2=0,k3=0,k4=0,_data=0,__data=0,
u=0;
int8_t a,b;
MPU6050 accelgyro;
int16_t gx, ay;
ISR(USART_RX_vect)

```

```

{
    c=UDR0;
    // if(c==255)PORTB|=(_BV(5)); //dir=1; // Xac dinh huong quay thuan hoac
    quay nguoc
    // else if(c==254)PORTB&=~(_BV(5)); //dir=0; // Truyen ra cong B chan
    PortB (7) chinh la chan 13 tren Arduino
    if(c<254) {
    // else {
        // OCR2A=c;
        state=1;
        data=encoder;
        encoder=0;
    }
}
ISR(TIMER1_COMPA_vect)
{
state=1;
data=encoder;
encoder=0;
}
ISR(INT0_vect) // Ngat dung doc encoder
{
for(int i=0;i<10;i++);
if((PIND&0b00000100))
    if(PIND&0b00001000)encoder++;
    else encoder--;
else
    if(PIND&0b00001000)encoder--;
    else encoder++;
}
ISR(INT1_vect) // Ngat dung doc encoder

```

```

{
for(int i=0;i<10;i++);
if((PIND&0b00001000))
    if(PIND&0b00000100)encoder--;
    else encoder++;
else
    if(PIND&0b00000100)encoder++;
    else encoder--;
}
void serial_init(void) // khoi tao truyen thong noi tiep
{
    // Set Baud Rate = 38400
    UBRR0H=0;
    UBRR0L=25;
    // UCSR0A=0;
    UCSR0B=0b10011000;    // khong dung ngat send
    UCSR0C|=0b00000000;    //1 bit stop
}
void serial_send(float fval) // gui so thuc len Matlab
{
    if(fval<0){
        loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
        UDR0=45;
        fval=-fval;
    }
    fval+=0.005;    // lam tron den 2 chu so thap phan.
    val=(int)fval;
    fval=(fval-val)*100;
    d=val/10000;
    if(d){
        loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);

```

```

    UDR0=d+48;
    val=val%10000;
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=val/1000+48;
__1000:
    val=val%1000;
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=val/100+48;
__100:
    val=val%100;
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=val/10+48;
__10:
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=val%10+48;
    goto endd;
}
d=val/1000;
if(d){
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=d+48;
    goto __1000;}
d=val/100;
if(d){
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=d+48;
    goto __100;}
d=val/10;
if(d){
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);
    UDR0=d+48;}

```

```

goto __10;
endd:
    val=int(fval);
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0='.';
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0=val/10+48;
    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0=val%10+48;
}
void pwm_init(void) // khoi tao PWM
{
    TCCR2A|=0b10000011;
    TCCR2B|=0b00000010;    // f/8
    OCR2A=0;
    DDRB|=_BV(3);        // chan 11-Arduino
    TCCR0A=0b10000011;    // OC0A
    TCCR0B=0b00000011;    // f/64
    OCR0A=0;
    DDRD|=_BV(6);        // chan 6-Arduino
}
void encoder_init(void) // khoi tao cho encoder
{
    PORTD|=0b00001100;    // cho phép dien tro pull-up,, chan 2,3-Arduino
    EICRA|=0b00000101;    // ngat suon duong
    EIMSK|=0b00000011;
}
void mpu_init(void)
{
    #if I2CDEV_IMPLEMENTATION == I2CDEV_ARDUINO_WIRE
        Wire.begin();
    #elif I2CDEV_IMPLEMENTATION == I2CDEV_BUILTIN_FASTWIRE
        Fastwire::setup(400, true);
    #endif

```

```

accelgyro.initialize();
if(accelgyro.testConnection())PORTB|=_BV(5);
}
void timer1_init(void) // khoi tao timer1
{
TCCR1A=0;
TCCR1B|=0b00001100;    // f/256,che do CTC
OCR1A=625;              //dat thoi gian cho timer,T=10ms => OCR1A=625
TIMSK1=0b00000010;    // cho phep ngat
}
int main(void)
{
e=PINC&0b000000111;
//serial_init();
pwm_init();
encoder_init();
timer1_init();
sei();
mpu_init();
accelgyro.setDLPFMode(4);
PORTB&=~(_BV(5));
DDRB|=_BV(5);
PORTB|=_BV(5);
DDRD|=_BV(7);
while(1)
if(state){
// chuyen doi don vi cua gx, ay:
// Kg=0.01/131;
// Ka=180/(pi*16384);
    gx=accelgyro.getRotationX();
    ay=accelgyro.getAccelerationY();
}
}

```

```

angle=(angle+gx)*0.97+ay*1.374343344033286;
_angle=angle*0.00007633587786259542-0.97;
gx+=95;
k1=0.12*(gx-_gx);
k2=0.12*(gx+0.005-_gx-k1/2);
k3=0.12*(gx+0.005-_gx-k2/2);
k4=0.12*(gx+0.01-_gx-k3);
_gx=_gx+(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4)/6.0;
__gx=_gx/131;
k1=0.12*(data-_data);
k2=0.12*(data+0.005-_data-k1/2);
k3=0.12*(data+0.005-_data-k2/2);
k4=0.12*(data+0.01-_data-k3);
_data=_data+(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4)/6.0;
__data=__data*1.570796326794897;
//    serial_send(_angle);
//    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0=32;
//    serial_send(gx);
//    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0=32;
//    serial_send(__data);
//    loop_until_bit_is_set(UCSR0A,UDRE0);UDR0=10;
u=-50*_angle-16*__gx-10*__data;
_u=(int)u;
a=(int8_t)_angle;
b=(int8_t)__data;
if(a<0)a=-a;
if(b<0)b=-b;
if(_u>0)PORTB|=(_BV(5));
else {_u=-_u;PORTB&=~(_BV(5));}
if(a>5)state2=0;
if(a<1)state2=1;

```

```

if(state2&(b<30))OCR2A=(char)_u;
else OCR2A=0;
e=e^(PINC&0b00000111);
switch(e)
{
case 1:                // nut A - lui
PORTD|=(_BV(7));        // chan huong: chan 7-Arduino
OCR0A=200;
break;
case 2:                // nut B - dung
OCR0A=0;
break;
case 4:                // nut C - tien
PORTD&=~(_BV(7));
OCR0A=200;
break;
}
e=PINC&0b00000111;
state=0;
}
}

```

Phụ lục 13

Các điểm cực của bộ điều khiển bền vững bậc 28 trong tài liệu [3]

$-9.0875 + 13.1899i$;	$-9.0875 - 13.1899i$
$-15.5772 + 0.0000i$;	$-15.4089 + 0.2436i$
$-15.4089 - 0.2436i$;	$-15.1097 + 0.1607i$
$-15.1097 - 0.1607i$;	$-0.2366 + 8.3797i$
$-0.2366 - 8.3797i$;	$-0.2374 + 8.3797i$
$-0.2374 - 8.3797i$;	$-0.2371 + 8.3790i$
$-0.2371 - 8.3790i$;	$-10.1036 + 0.0834i$
$-10.1036 - 0.0834i$;	$-9.9535 + 0.1120i$

-9.9535 - 0.1120i;	-9.8857 + 0.0000i
-3.0249 + 3.1686i;	-3.0249 - 3.1686i
-1.8830 + 0.0000i;	-1.6589 + 0.0006i
-1.6589 - 0.0006i;	-1.6579 + 0.0000i
-1.4589 + 0.0000i;	-26.1796 + 0.0000i
-0.0000000000000023 + 0.0000000000000000i	
-0.0000000000000023 + 0.0000000000000000i	