BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Đại học họp tại: Trường Đại học Sư Phạm, Đại học Thái Nguyên

Vào hồi giờ ngày tháng năm 2015

Có thể tìm hiểu luận án tại:
Thư viện Quốc gia
Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên
Thư viện Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NCS
CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Nguyen Thi Quynh Anh (2009), "Quasi optimization problem of type I and quasi optimization problem of type II ", *Tạp chí Khoa Công nghệ Đại học Thái Nguyên*, 56 (8), 45-50.
2. Nguyen Buong and Nguyen Thi Quynh Anh (2011), "An implicit iteration method for variational inequalities over the set of common fixed points for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Hindawi Publish Coporation, Fixed point thoery applications*, volume 2011, article ID 276859.
3. Nguyen Xuan Tan and Nguyen Thi Quynh Anh (2011), "Generalized quasi-equilibrium problems of type 2 and their applications", *VietNam journal of mathematics*, volume 39, 1-25.
4. Nguyen Thi Quynh Anh and Nguyen Xuan Tan (2013), "On the existence of solutions to mixed Pareto quasivariational inclusion problems", *Advances in Nonlinear variational Inequalities*, volume 16, Number 2, 1-22.
5. Nguyen Thi Quynh Anh (2014), "Modified viscosity approximation methods with weak contraction mapping for an infinite family of nonexpansive mappings", *East - West journal of mathematics*, volume 16, No 1, 1-13.

MỞ ĐẦU

Lý thuyết tối ưu véctơ được hình thành từ ý tưởng về cân bằng kinh tế, lý thuyết giá trị của Edgeworth năm 1881 và Pareto năm 1909. Nhưng từ những năm 1950 trở lại đây, sau những công trình của Kuhn - Tucker năm 1951, về giá trị cân bằng và tối ưu Pareto của Debreu năm 1954, lý thuyết tối ưu véctơ mới thực sự được chào đón như một ngành mới của toán học hiện đại và có nhiều ứng dụng trong thực tế.

Cho D là một tập con khác rỗng trong không gian X, $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm thực. Bài toán tìm cực tiểu của hàm f trên D có thể coi là bài toán trọng tâm trong lý thuyết tối ưu: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ với mọi } x \in D. \tag{0.1}$$

Liên quan tới bài toán này, trong lý thuyết tối ưu ta còn thấy bài toán bất đẳng thức biến phân do Stampacchia đưa ra và tìm điều kiện đủ để bất đẳng thức biến phân có nghiệm. Bài toán được phát biểu nguyên thủy như sau: Cho D là tập con trong không gian Euclid hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n, G : D \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ đơn trị. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\langle G(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \in D. \tag{0.2}$$

Cùng với các bài toán trên, ta còn có bài toán điểm bất động: Cho $T : D \to X$ là ánh xạ đơn trị. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\bar{x} = T(\bar{x}). \tag{0.4}$$

Nếu T là một ánh xạ liên tục và ánh xạ $G := I - T$, với I là ánh xạ đồng nhất trên D, thì bài toán điểm bất động (0.4) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân (0.2).

Năm 1994, Blum E. và Oettli W. đã phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán điểm cân bằng: Cho D là tập con của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff $X, \varphi : D \times D \to \mathbb{R}$. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\varphi(t, \bar{x}) \geq 0 \text{ với mọi } t \in D. \tag{0.5}$$

Bài toán này chứa các bài toán điểm bất động, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng Nash,... như những trường hợp đặc biệt.

Năm 2002, Nguyễn Xuân Tấn và Guerraggio A. đã phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa tối ưu tổng quát hay còn gọi là bài toán tựa tối ưu phụ thuộc tham số: Cho X, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là những tập con khác rỗng. Cho $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K$ là những ánh xạ đa trị, $F : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm số. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$\begin{aligned} &1) \quad \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\ &2) \ F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) = \min_{t \in S(\bar{x}, \bar{y})} F(\bar{y}, \bar{x}, t). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Bài toán (0.6) tổng quát hơn bài toán (0.5). Khi F không phụ thuộc vào y, $F(x, x) = 0$ với mọi $x \in D$, ta chỉ việc đặt $S(x, y) \equiv D$ và $\varphi(t, x) = F(x, t)$ với mọi $x, t \in D$. Từ (0.6), ta có ngay $0 = F(\bar{x}, \bar{x}) \leq F(\bar{x}, t)$với mọi $t \in D$, tức là $\varphi(t, \bar{x}) \geq 0$ với mọi $t \in D$ và (0.5) được thỏa mãn.

Bài toán (0.1) đã được phát biểu cho trường hợp véctơ: Cho D là tập con trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương X. Y là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương với nón C. Nón C sinh ra quan hệ thứ tự từng phần trên $Y : x \succeq y$ khi và chỉ khi $x - y \in C$. Từ quan hệ thứ tự này, người ta định nghĩa tập các điểm hữu hiệu lý tưởng, thực sự, Pareto, yếu của tập $A \subseteq Y$,. Ta kí hiệu $\alpha Min(A/C)$ là tập các điểm hữu hiệu α của tập A đối với nón C, (α là lý tưởng, thực sự, Pareto, yếu). Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$F(\bar{x}) \in \alpha \mathrm{Min}(F(D)/C), \tag{0.7}$$

trong đó $F : D \to Y$, được gọi là bài toán tựa tối ưu α véctơ. Điểm $\bar{x}$ được gọi là nghiệm và $F(\bar{x})$ được gọi là giá trị tối ưu α của (0.7).

Năm 1985, Nguyễn Xuân Tấn đã mở rộng bài toán (0.2) cho trường hợp ánh xạ đa trị và trường hợp miền ràng buộc D luôn thay đổi bởi ánh xạ đa trị S. Cụ thể hơn, cho D là tập con của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X với đối ngẫu X^*, $S : D \to 2^D, P : D \to 2^{X^*}$ là những ánh xạ đa trị và $\varphi : D \to \mathbb{R}$ là hàm số. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D, \bar{x} \in S(\bar{x})$ và $\bar{y} \in P(\bar{x})$ sao cho

$$\langle \overline{y}, x - \overline{x} \rangle + \varphi(x) - \varphi(\overline{x}) \geq 0 \text{ với mọi } x \in S(\overline{x}), \tag{0.8}$$

được gọi là bất đẳng thức tựa biến phân đa trị.

Năm 1998, Nguyễn Xuân Tấn và Phan Nhật Tĩnh đã mở rộng bài toán (0.3) cho trường hợp véctơ. Năm 2000, Nguyễn Xuân Tấn và Nguyễn Bá Minh mở rộng tiếp cho trường hợp ánh xạ đa trị và chứng minh định lý về sự tồn tại nghiệm của Blum-Oettli cho trường hợp này.

Năm 2007, Lin J. L. và Nguyễn Xuân Tấn phát biểu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại 1 (với nghiệm lý tưởng, Pareto, thực sự và yếu). Năm 2004, Đinh Thế Lục và Nguyễn Xuân Tấn đưa ra các loại bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại 2. Năm 2012, Bùi Thế Hùng và Nguyễn Xuân Tấn chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 và loại 2. Các kết quả này suy ra nhiều kết quả tốt hơn cho các bài toán khác có liên quan.

Tiếp sau các nghiên cứu của Trương Thị Thùy Dương và Nguyễn Xuân Tấn về bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1, Năm 2011, chúng tôi phát biểu bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2:
Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Các loại bài toán tựa cân bằng tổng quát này chứa các loại bài toán bao hàm thức tựa biến phân, tựa cân bằng và các loại bài toán quan hệ biến phân loại 1 và loại 2 như những trường hợp riêng.

Trong luận án của mình, Trương Thị Thùy Dương đã chứng minh sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng tổng quát hỗn hợp: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$\begin{array}{ll} 1) & \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\ 2) & 0 \in F(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\ 3) & 0 \in G(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t), \end{array}$$

với X, Y_1, Y_2, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, ánh xạ $F : K \times K \times D \times D \to 2^Y, G : K \times D \times D \to 2^Y$ và các ánh xạ P, Q, S, T như trên. Tác giả đưa ra điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng tổng quát với giả thiết *iv)* khá chặt, như dạng một bài toán khác chưa biết khi nào tồn tại nghiệm.

Mục đích của luận án này là phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2, tìm mối liên quan tới các bài toán khác trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị, nghiên cứu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp với những giả thiết dễ kiểm tra, và cuối cùng, chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Bài toán này là trường hợp đặc biệt của bài toán tựa cân bằng tổng quát và bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp.

Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản của giải tích đa trị được sử dụng trong các chương chính của luận án.

Chương 2 dành cho bài toán tựa cân bằng tổng quát. Định lý 2.3.1 cho bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2, Hệ quả 2.4.1 cho bài toán tựa quan hệ biến phân, Hệ quả 2.4.2 cho bài toán tựa cân bằng vô hướng, các Hệ quả 2.4.3 và 2.4.4 cho các bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng, các Hệ quả 2.4.5 và 2.4.6 cho các bài toán tựa cân bằng lý tưởng. Đặc biệt, ta chỉ ra một số kết quả về sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng Pareto (yếu) trên (dưới) loại 1 và 2 liên quan tới ánh xạ đơn điệu (xem các Định lý 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5).

Chương 3 dành cho 4 bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp. Các Định lý 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 chỉ ra điều kiện đủ để tồn tại nghiệm của từng loại. Hệ quả của các định lý này là sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan như: bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto, các bài toán tựa tối ưu Pareto, tựa cân bằng Pareto hỗn hợp.

Trong chương 4, chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp ẩn để tìm nghiệm của các bài toán bất đẳng thức biến phân, một dạng đặc biệt của các bài toán nêu trên (xem các Định lý 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3).

Chương1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Chương này trình bày về không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff và một số khái niệm, tính chất của nón và các ánh xạ đa trị.

Chương 2. BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT

Trong chương này, Mục 2.1, chúng tôi giới thiệu các bài toán tựa cân bằng tổng quát liên quan tới các ánh xạ đa trị. Mục 2.3, ta sẽ tìm những điều kiện đủ để các bài toán này có nghiệm. Mục 2.2 và 2.4 chỉ ra rằng, phần lớn các bài toán trong lý thuyết tối ưu đa trị như các bài toán tối ưu véctơ đa trị, bao hàm thức biến phân đa trị, các bài toán tựa cân bằng đa trị loại 1 và loại 2, đều có thể đưa được về một trong các dạng của các bài toán tựa cân bằng tổng quát. Mục 2.5 nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán trong trường hợp bài toán phụ thuộc tham số. Như vậy, bài toán tựa cân bằng tổng quát dưới đây sẽ cho ta cách nhìn các bài toán trong lý thuyết tối ưu véctơ một cách nhất quán.

2.1. Đặt bài toán

Cho X, Z và Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subset X, K \subset Z$ là các tập con không rỗng. Cho các ánh xạ $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, P_1 : D \to 2^D, P_2 : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$ và $F_1 : K \times D \times D \times D \to 2^Y, F : K \times D \times D \to 2^Y$, ta xét các bài toán sau:

1. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

2) $0 \in F_1(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, z)$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1.*

2. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

1) $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$,

2) $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2.*

3. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

2) $0 \in F_1(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, z)$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})$,

3) $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát hỗn hợp.*

Trong các bài toán trên, ta gọi các ánh xạ S, T, P_1, P_2 và Q là các ràng buộc, F_1 và F được gọi là các ánh xạ mục tiêu, chúng có thể là các đẳng thức, bất đẳng thức, các bao hàm thức, bất bao hàm thức, tương giao của các ánh xạ đa trị, hoặc các quan hệ trong các không gian tích. Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1, loại hỗn hợp đã được nghiên cứu chi tiết trong luận án của TS. Trương Thị Thùy Dương. Trong chương này, chúng tôi chủ yếu nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2.

2.2. Các bài toán liên quan

Mục này minh họa sự tổng quát của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 đối với một số bài toán tối ưu đa trị có liên quan, chẳng hạn: bài toán tựa cân bằng vô hướng, bất đẳng thức biến phân Minty, bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng, bài toán tựa cân bằng lý tưởng, tựa quan hệ biến phân tổng quát, bao hàm thức vi phân, bài toán điều khiển tối ưu, bài toán tựa cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác,...

2.3. Sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2

Trong mục này, vận dụng kết quả của Định lý Fan-Browder hoặc dạng tương đương của nó, chúng tôi chứng minh điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2, từ đó ta cũng thu được các kết quả cho các bài toán liên quan.

Định lý 2.3.1. *Các điều kiện sau là đủ để bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 có nghiệm:*

i) D là tập con không rỗng lồi compắc;

ii) Ánh xạ đa trị $P_1 : D \to 2^D$ có tập điểm bất động $D_0 = \{x \in D |\, x \in P_1(x)\}$ đóng, không rỗng trong D;

iii) Ánh xạ đa trị $P_2 : D \to 2^D$ có $P(x) \neq \emptyset, P_2^{-1}(x)$ mở và bao lồi $coP_2(x)$ của $P_2(x)$ chứa trong $P_1(x)$ với mọi $x \in D$;

iv) Với mỗi $t \in D$ cố định, tập

$$B = \{x \in D |\, 0 \notin F(y, x, t) \text{ với } y \in Q(x, t) \text{ nào đó}\}$$

mở trong D;

v) $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị $Q - KKM$.

Định lý 2.3.2 khẳng định, khi giảm nhẹ điều kiện cho ánh xạ P_2, bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 vẫn có nghiệm. Định lý 2.3.3 xét điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát khi ánh xạ $P_1 = P_2 = P$.

2.4. Sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan

Áp dụng các định lý trên, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan: Mục 2.4.1 về bài toán tựa quan hệ biến phân; Mục 2.4.2 về bài toán tựa cân bằng vô hướng; Mục 2.4.3 về bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng; Mục 2.4.4 về bài toán tựa cân bằng lý tưởng; Mục 2.4.5 minh họa ứng dụng vào các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu.

2.4.1. Bài toán tựa quan hệ biến phân

Hệ quả dưới đây trình bày một cách chứng minh khác kết quả của Đinh Thế Lục công bố năm 2008.

Hệ quả 2.4.1. *Cho D, K, P_1, P_2 như trong Định lý 2.3.1, ánh xạ $Q(., t)$ nửa liên tục dưới với mỗi $t \in D$. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ giữa các phần tử $y \in K, x \in D, t \in D$. Giả sử:*

i) Với $t \in D$, quan hệ $R(., ., t)$ giữa các phần tử $y \in K, x \in D$ là quan hệ đóng;

ii) $\mathcal{R}$ là quan hệ Q- KKM.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và
$\mathcal{R}(y, \bar{x}, t)$ xảy ra với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

2.4.2. Bài toán tựa cân bằng vô hướng

Kết quả dưới đây được chứng minh trực tiếp từ Định lý 2.3.1 và nó cũng chính là kết quả của Nguyễn Xuân Tấn và Đinh Thế Lục đã công bố năm 2004.

Hệ quả 2.4.2. *Cho D, K, P_1, P_2 như trong Định lý 2.3.1, ánh xạ $Q(., t)$ nửa liên tục dưới với mỗi $t \in D$. Cho ánh xạ $\Phi : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm thực $(Q, \mathbb{R}_+)-$ giống tựa lồi theo đường chéo đối với biến thứ ba và $\Phi(y, x, x) = 0$ với mọi $y \in K, x \in D$. Hơn nữa, giả thiết rằng, với $t \in D$,*

$\Phi(.,.,t) : K \times D \to \mathbb{R}$ *là hàm nửa liên tục trên. Khi đó, tồn tại* $\bar{x} \in D$ *để* $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ *và*

$$\Phi(y, \bar{x}, t) \geq 0 \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Trong các hệ quả tiếp theo của các Mục 2.4.3 và 2.4.4, ta giả thiết C là nón lồi đóng trong Y.

2.4.3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng

Từ Định lý 2.3.1, ta thu được một số kết quả về sự tồn tại nghiệm cho các loại bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên, dưới. Kết quả này suy ra các kết quả của Đinh Thế Lục và Nguyễn Xuân Tấn đã công bố năm 2004.

Hệ quả 2.4.3. *Cho* D, K, P_1, P_2 *như trong Định lý 2.3.1 và ánh xạ* $Q : D \times D \to 2^K$ *thỏa mãn với mọi* $t \in D$ *cố định, ánh xạ* $Q(., t) : D \to 2^K$ *là nửa liên tục dưới. Cho* $G, H : K \times D \times D \to 2^Y$ *là các ánh xạ đa trị có giá trị compắc và* $G(y, x, x) \subseteq H(y, x, x) + C$ *với mọi* $(y, x) \in K \times D$. *Hơn nữa, giả sử:*

i) Với mỗi $t \in D$ *cố định, ánh xạ* $G(., ., t) : K \times D \to 2^Y$ *là* $(-C)-$*liên tục dưới và ánh xạ đa trị* $N : K \times D \to 2^Y$, *định nghĩa bởi* $N(y, x) = H(y, x, x)$, *là* $C-$*liên tục trên;*

ii) Ánh xạ G *là* $(Q, C)-$*giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ ba.*

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ *để* $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ *và*

$$G(y, \bar{x}, t) \subseteq H(y, \bar{x}, \bar{x}) + C \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Tương tự ta chứng minh được kết quả cho bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới. Mục 2.4.4 trình bày các kết quả tồn tại nghiệm cho các bài toán tựa cân bằng lý tưởng.

2.4.5. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu

Mục này nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu (xét cho cả hai trường hợp $\mathcal{C}$-lồi và $\mathcal{C}$–giống như tựa lồi), các Bổ đề 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính.

Bổ đề 2.4.1. *Cho $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $F(y,x,x) \cap \mathcal{C}(y,x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$ và $y \in K$. Hơn nữa, giả sử rằng:*

i) Với $x \in D, y \in K, F(y,.,x) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}(y,.)$-hemi liên tục lý tưởng dưới;

ii) Với $y \in K, F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$-giả đơn điệu mạnh trên;

iii) Với $y \in K, F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$-lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}(y,.)$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, với $t \in D, y \in K$, các mệnh đề sau tương đương:

1) $F(y,t,x) \nsubseteq -(\mathcal{C}(y,t)\backslash\{0\})$ với mọi $x \in D$;

2) $F(y,x,t) \subseteq -\mathcal{C}(y,x)$ với mọi $x \in D$.

Phát biểu tương tự với các trường hợp còn lại.

2.4.5.1. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 1

Cho $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K$ và $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng. C là nón lồi đóng trong Y. Các bài toán tựa cân bằng Pareto trên (dưới) và yếu trên (dưới) loại 1 lần lượt được phát biểu như sau:

1. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$G(\bar{y},\bar{x},z) \nsubseteq (-C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

2. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$G(\bar{y},\bar{x},z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

3. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$G(\bar{y},\bar{x},z) \nsubseteq (-\text{int}C) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

4. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-\text{int}C) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Các định lý tiếp theo chứng minh sự tồn tại nghiệm của các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 1.

Định lý 2.4.2.(Bài toán tựa cân bằng Pareto dưới loại 1). *Giả sử D, K tương ứng là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Z, $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng và $G(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $x \in D, y \in K$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng; T là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng lồi đóng;

ii) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $G(y, ., x) : D \to 2^Y$ là $C-$ hemi liên tục lý tưởng trên;

iii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ là C-giả đơn điệu mạnh dưới;

iv) Với $(x, y) \in K$, $G(y, x, .)$ là $C-$lồi trên (hoặc, $C-$giống tựa lồi trên);

v) G là ánh xạ $C-$ liên tục trên.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset \textit{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

Tương tự, ta có các kết quả tồn tại nghiệm cho các bài toán còn lại (xem các định lý 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5).

2.4.5.2. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 2

Trong mục này ta xét ánh xạ $G : D \times D \to 2^Y$, ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ có giá trị khác rỗng.

Các bài toán tựa cân bằng Pareto trên (dưới) và yếu trên (dưới) loại 2 lần lượt được phát biểu như sau:

1) Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
$\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \not\subseteq -(\mathcal{C}(\bar{x}) \setminus \{0\}),$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

2) Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
$\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \cap -(\mathcal{C}(\bar{x}) \setminus \{0\}) = \emptyset,$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

3) Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
$\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}),$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

4) Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
$\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset,$ với mọi $x \in P(\bar{x})$.

Định lý 2.4.9. (Bài toán tựa cân bằng Pareto dưới loại 2) *Giả sử D, K là các tập không rỗng, lồi và compắc, P là ánh xạ đa trị liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Và giả sử ánh xạ đa trị $G : D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng, $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $G(x, x) \subseteq \mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Với $t \in D,\ G(., t) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục mạnh dưới;

ii) Với $x \in D, y \in K$, tập

$$A = \{t \in D|\ G(x, t) \cap -\mathcal{C}(x) \neq \emptyset\} \text{ đóng trong } D;$$

iii) G là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu mạnh dưới;

iv) G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \cap (-\mathcal{C}(\bar{x})\setminus\{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Các kết quả tồn tại nghiệm cho các bài toán còn lại được trình bày trong các Định lý 2.4.7, 2.4.8, 2.4.9. Đặc biệt, trong các định lý đó, khi thay ánh xạ G bởi ánh xạ $F : D \times D \to 2^Y$, $F(x, t) = \langle G(x), \theta(x, t)\rangle$, $(x, t) \in D \times D$, ở đây $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ ta có các kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ (xem các Hệ quả 2.4.9, 2.4.10, 2.4.11, 2.4.12).

Chú ý. Nếu $Y = \mathbb{R}, \mathcal{C}(\bar{x}) \equiv \mathbb{R}^+$ và $G : D \to X^*$ là ánh xạ hemi liên tục và đơn điệu; $P(x) \equiv D, \theta(x, t) = t - x$, với mọi $x, t \in D$, thì Hệ quả 2.4.9 trở thành: Tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\begin{aligned}&\langle G(\bar{x}), t-\bar{x}\rangle \geq 0,\\&(\text{điều này tương đương với } \ \langle G(t), \bar{x}-t\rangle \geq 0), \ \text{với mọi} \ \ t \in D.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Đây chính là bất đẳng thức biến phân Stampacchia (cũng là bất đẳng thức biến phân Minty) cổ điển mà chúng tôi sẽ xét đến trong chương cuối của luận án.

2.5. Sự ổn định của các tập nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát

Cho $X, Z, D, K, Y, \mathcal{C}$ như ở các mục trước. Cho Λ, Γ, Σ là các không gian tôpô Hausdorff. Cho $P_i : D \times \Lambda \to 2^D, i = 1, 2, Q : D \times D \times \Gamma \to 2^K$ và $F : K \times D \times D \times \Sigma \to 2^Y$. Ta xét bài toán tựa cân bằng tổng quát phụ thuộc tham số: Tìm $\bar{x} \in P_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $0 \in F(y, \bar{x}, t, \mu)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x}, \lambda), y \in Q(\bar{x}, t, \gamma)$.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda, \mu \in \Gamma, \gamma \in \Sigma$, ta đặt $E(\lambda) = \{x \in P_1(x, \lambda)\}$; $M(\lambda, \gamma, \mu) = \{x \in D \mid x \in E(\lambda) \, \text{và} \, 0 \in F(y, x, t, \mu) \ \text{ với mọi } t \in P_1(x, \lambda), y \in Q(x, t, \gamma)\}$. Trong Mục 2.3, ta đã tìm được điều kiện đủ để $M(\lambda, \gamma, \mu) \neq \emptyset$. Dưới đây, ta sẽ tìm điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm có các tính chất ổn định như: Tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới theo nghĩa của Berge đối với các biến (λ, γ, μ).

Định lý 2.5.1. *Cho* $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Gamma \times \Sigma$, *và giả sử:*

i) P_1 là ánh xạ nửa liên tục trên, có giá trị compắc; P_2 là ánh xạ nửa liên tục dưới;

ii) Q là ánh xạ nửa liên tục dưới với ảnh compắc;

iii) Tập $A = \{(y, x, \lambda, \gamma, \mu) \mid x \in E(\lambda), 0 \in F(y, x, t, \gamma)$ với mọi $t \in P_2(x, \lambda), y \in Q(x, t, \mu)\}$ là đóng.

Khi đó, ánh xạ M là nửa liên tục trên và đóng tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$.

Định lý 2.5.2. *Ánh xạ M nửa liên tục dưới tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

i) E là ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới tại λ_0;

ii) Ánh xạ Q nửa liên tục trên và nhận giá trị compắc;

iii) P_2 là ánh xạ đóng;

iv) Tập $A = \{(y, x, t, \lambda, \gamma, \mu) \in D \times D \times D \times \Lambda \times \Gamma \times \Sigma \mid x \in P_1(x, \lambda), 0 \notin F(y, x, t, \lambda, \gamma, \mu), t \in P_2(x, \lambda), y \in Q(x, t, \mu)\}$ là tập đóng.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, ở các Mục 2.3 và 2.4 chúng tôi đã chứng minh điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 và các bài toán liên quan như: bài toán tựa cân bằng vô hướng, bao hàm thức tựa biến phân, bài toán tựa quan hệ biến phân và đặc biệt là các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu, các bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ. Trong Mục 2.5, chúng tôi chứng minh tính ổn định của tập nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát. Kết quả này đã được công bố trong [3].

Chương 3. BÀI TOÁN BAO HÀM THỨC TỰA BIẾN PHÂN PARETO HỖN HỢP

3.1. Giới thiệu bài toán

Cho X, Y, Y_1, Y_2, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. Giả sử $D \subset X, K \subset Z$ là các tập con không rỗng và $C_i \subseteq Y_i, i = 1, 2,$ là các nón lồi, đóng. Kí hiệu 2^A là tập hợp các tập con của tập hợp A. Các ánh xạ đa trị $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, P : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$ và $F_1 : K \times K \times D \to 2^{Y_1}, F_2 : K \times D \times D \to 2^{Y_2}$, ta có các bài toán sau:

1) **Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-trên**

   Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), \quad y \in Q(\bar{x}, t).$$

2) **Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-dưới**

   Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), \quad y \in Q(\bar{x}, t).$$

3) **Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-trên**

   Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), \quad y \in Q(\bar{x}, t).$$

4) **Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-dưới**

Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y},v,\bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(y,\bar{x},\bar{x}) \not\subseteq F_2(y,\bar{x},t) + (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}),$$
$$y \in Q(\bar{x},t).$$

Các bài toán trên cho ta một công cụ tốt để nghiên cứu lớp các bài toán tựa cân bằng, tựa biến phân, tựa tối ưu. Một số bài báo đã nghiên cứu bài toán hỗn hợp giữa các bài toán trên, tuy nhiên, họ hầu hết chỉ quan tâm đến bài toán loại 1 hoặc loại 2. Mục đích của Chương 3 của luận án này là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp. Nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu liên quan đến ánh xạ đa trị như: các bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp, hệ các bài toán tối ưu Pareto, bài toán tựa tối ưu Pareto hỗn hợp, bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 (loại 2),... có thể đưa được về các bài toán bao hàm thức hỗn hợp nói trên. Balaj và Đinh Thế Lục cũng đã xét bài toán quan hệ biến phân hỗn hợp, tuy nhiên ở đó không có ánh xạ ràng buộc S, nghiệm của bài toán được tìm trên cả tập D.

3.2. Sự tồn tại nghiệm

Cho các ánh xạ đa trị S, T, P, Q và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.

3.2.1. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-trên

Định lý 3.2.1. *Giả thiết các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S *là ánh xạ có giá trị không rỗng lồi và có nghịch ảnh mở.* T *là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập* $A = \{(x,y) \in D \times K | (x,y) \in S(x,y) \times T(x,y)\}$ *là đóng;*

iii) P *có nghịch ảnh mở và* $P(x) \subseteq S(x,y)$ *với mọi* $(x,y) \in A$. *Với* $t \in D$, $Q(.,t) : D \to 2^K$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) Ánh xạ F_1, F_2 *có giá trị không rỗng, compắc yếu. Ánh xạ* F_1 *là* $(-C_1)-$ *liên tục trên và* C_1- *liên tục dưới. Với* $t \in D$, *ánh xạ* $F_2(.,.,t)$ *là*

$(-C_2)$- liên tục trên và với $y \in K$, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y,x) = F_2(y,x,x)$ là C_2-liên tục dưới;

v) Với $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y,.,x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi dưới (hoặc, C_1-giống tựa lồi dưới) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y,.,.) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi dưới theo đường chéo (hoặc, C_2-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai;

Khi đó, tồn tại $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y})\bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$ và

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(y,\bar{x},t) \not\subseteq (F_2(y,\bar{x},\bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}),$$
$$y \in Q(\bar{x},t).$$

3.2.2. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-dưới

Định lý 3.2.2. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) S là ánh xạ có giá trị lồi không rỗng và có nghịch ảnh mở; T là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng, lồi, đóng và tập $A = \{(x,y) \in D \times K | (x,y) \in S(x,y) \times T(x,y)\}$ đóng;

iii) P có nghịch ảnh mở và $P(x) \subseteq S(x,y)$ với mọi $(x,y) \in A$. Với $t \in D$, $Q(.,t) : D \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;

iv) Ánh xạ F_1 là $(-C_1)-$ liên tục trên và C_1- liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc yếu. Với mỗi $t \in D$ cố định, ánh xạ $F_2(.,.,t)$ là $(-C_2)$- liên tục dưới và với mỗi $y \in K$ cố định, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y,x) = F_2(y,x,x)$ là C_2-liên tục trên;

v) Với $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y,.,x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi dưới (hoặc, C_1-giống tựa lồi dưới) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y,.,.) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc, C_2-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai).

Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}),$$
$$y \in Q(\bar{x}, t).$$

3.2.3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-trên

Định lý 3.2.3. *Cho các ánh xạ đa trị* S, T, P, Q *và* $F_i, i = 1, 2$ *với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.*

Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S *là ánh xạ có giá trị lồi không rỗng và có nghịch ảnh mở.* T *là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập* $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ *đóng;*

iii) P *có nghịch ảnh mở và* $P(x) \subseteq S(x, y)$ *với mọi* $(x, y) \in A$. *Với* $t \in D$, $Q(., t) : D \to 2^K$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) *Ánh xạ* F_1, F_2 *có giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ* F_1 *là* C_1- *liên tục trên và* $(-C_1)-$ *liên tục dưới. Với* $t \in D$, *ánh xạ* $F_2(., ., t)$ *là* $(-C_2)$*- liên tục trên và với mỗi* $y \in K$, *ánh xạ đa trị* $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ *xác định bởi* $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ *là* C_2-*liên tục dưới;*

v) *Với* $(x, y) \in D \times K$, *ánh xạ* $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ *là* C_1- *lồi trên (hoặc,* C_1-*giống tựa lồi trên) và với* $y \in K$, *ánh xạ* $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ *là* C_2*-lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc,* C_2*-giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}),$$
$$y \in Q(\bar{x}, t).$$

3.2.4. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-dưới

Định lý 3.2.4. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) S là ánh xạ có giá trị không rỗng lồi và có nghịch ảnh mở. T là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ đóng;

iii) P có nghịch ảnh mở và $P(x) \subseteq S(x, y)$, với mọi $(x, y) \in A$. Với $t \in D$, $Q(., t) : D \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;

iv) Ánh xạ F_1, F_2 có các giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ F_1 là C_1- liên tục trên và $(-C_1)-$ liên tục dưới. Với $t \in D$, ánh xạ $F_2(., ., t)$ là $(-C_2)$- liên tục dưới và với $y \in K$, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ là C_2-liên tục trên;

v) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi trên (hoặc, C_1-giống tựa lồi trên) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc, C_2-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai).

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}),$$
$$y \in Q(\bar{x}, t).$$

Nếu các giả thiết của các Định lý 3.2.1-3.2.4 được thỏa mãn, trừ *i)* và *iii)* (tương ứng) được thay bởi:

i') S là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, lồi;

iii') P là ánh xạ nửa liên tục dưới và $P(x) \subseteq S(x, y)$ với $x \in S(x, y), y \in T(x, y)$ và tập con $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ đóng,

thì kết luận của các định lý trên vẫn đúng.

3.3. Một số bài toán liên quan

Cho các ánh xạ đa trị S, T và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu, ta xét các bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto như sau:

3.3.1. Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto

1) Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên

Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y},\bar{x},t) \not\subseteq F_2(\bar{y},\bar{x},\bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

2) Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên và dưới

Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y});$$
$$F_2(\bar{y},\bar{x},\bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y},\bar{x},t) + (C_2 \setminus \{0\}))\text{với mọi } t \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

3) Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới

Tìm $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y},v,\bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y},\bar{x},\bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y},\bar{x},t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x},\bar{y}).$$

Từ các kết quả trong Mục 3.2, chúng tôi chứng minh điều kiện tồn tại nghiệm cho các hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 (các Định lý 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3), cho bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp bổ sung thêm điều kiện $F_1(y,y,x) \subseteq C_1$ và $F_2(y,x,x) \subseteq C_2$ với mọi $(x,y) \in D \times K$ (các định lý 3.3.4, 3.3.5).

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi đặt ra các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp giữa loại 1 và loại 2. Ở các Mục 3.2 và 3.3, chúng tôi chứng minh điều kiện đủ để các bài toán đó tồn tại nghiệm và ứng dụng vào các bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 và bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp. Các kết quả chính của chương này đã được công bố trong tài liệu [3] năm 2013.

Chương 4. PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

4.1. Giới thiệu bài toán

Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra phương pháp lặp tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân (0.2), trong trường hợp tập chấp nhận được D là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Bài toán có thể phát biểu như sau: Tìm $\overline{x} \in D$ sao cho

$$\begin{aligned} &\langle G(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0, \forall x \in D, \\ &D = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fix}(T_i), \end{aligned} \tag{4.1}$$

với $N \in \mathbb{N}, T_i : X \to X, i = 1, 2, ..., N$, là các ánh xạ không giãn. Tức là, bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên giao của tập các điểm bất động chung của họ các ánh xạ không giãn $T_i, i = 1, 2, ..., N$. Nếu ta định nghĩa ánh xạ đa trị $P_1, P_2 : D \to D$ như sau:

$$P_1(x) = \{t \in D : \langle T_i(x) - t, x - y \rangle \geq 0, \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n, y \in D\},$$

$$P_2(x) = \{t \in D : \langle T_i(x) - t, x - y \rangle > 0, \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n, y \in D\},$$

và $F(y, x, t) = \langle G(x), y - t \rangle - \mathbb{R}_+, y, x, t \in D$. Đặt $K = D, Q(x, t) = D$. Ta xét bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2: Tìm $\bar{x} \in D, \bar{x} \in P_1(\bar{x})$, $0 \in F(y, \bar{x}, t)$, với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$. Nếu bài toán này có nghiệm $\bar{x}$ thì ta được $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$. Tức là

$$\langle T_i(\bar{x}) - \bar{x}, \bar{x} - y \rangle \geq 0, \text{ với mọi } y \in D, i = 1, 2, ..., n.$$

Lấy $y = T_i(\bar{x}), i = 1, 2, ..., n$, ta suy ra $\langle T_i(\bar{x}) - \bar{x}, \bar{x} - T_i(\bar{x}) \rangle \geq 0$, hay $\| T_i(\bar{x}) - \bar{x} \| \leq 0$. Ta kết luận $T_i(\bar{x}) = \bar{x}, i = 1, 2, ..., n$. Từ $0 \in F(y, \bar{x}, t)$, với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$, ta suy ra $\langle G(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0$, với mọi $y \in D$. Tức là, $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (4.1).

Ngược lại, nếu $\bar{x}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên giao của tập tất cả các điểm bất động của các ánh xạ $T_i, i = 1, 2, ..., N$, thì hiển nhiên $\bar{x}$ cũng là nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 nói trên.

Định lý 4.1.1 giới thiệu phương pháp lặp của Xu và Ori năm 2001 để tìm điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn, Định lý 4.1.2 của Zheng L.C. và Yao J.C năm 2006 tìm nghiệm của bài toán (4.1), đều cho kết quả hội tụ yếu. Cải tiến các kết quả trên, giảm nhẹ điều kiện cho tham số λ_k (thay điều kiện $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ bởi điều kiện $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$), chúng tôi xây dựng được dãy lặp hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (4.1). Đây chính là nội dung của Định lý 4.2.1.

4.2. Phương pháp lặp ẩn trên tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Cho không gian Hilbert X và ánh xạ $G : X \to X$, các tham số $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và $t \in (0,1)$, $\{\lambda_t\}, \{\beta_t^i\} \subset (0,1)$, sao cho

$$\begin{aligned} &\lambda_t \to 0, \text{khi} \quad t \to 0 \quad \text{và} \\ &0 < \liminf_{t\to 0} \beta_t^i \le \limsup_{t\to 0} \beta_t^i < 1, 2, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dãy lặp $\{x_t\}$ xác định bởi

$$x_t = T^t x_t, \quad T^t := T_0^t T_N^t ... T_1^t, \quad t \in (0,1), \tag{4.6}$$

với ánh xạ $T_i^t : X \to X$,

$$\begin{aligned} &T_i^t x = (1 - \beta_t^i)x + \beta_t^i T_i x, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \\ &T_0^t y = (I - \lambda_t \mu G)y, \ x, y \in X. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Định lý 4.2.1. *Giả thiết rằng ánh xạ G là L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh, với các hằng số $L, \eta > 0$ nào đó; $\{T_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ không giãn trên X sao cho $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(T_i) \neq \emptyset$. Khi đó, dãy suy rộng $\{x_t\}$ xác định bởi (4.5)-(4.7) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất $\bar{x}$ của (4.2) (với $D = X$).*

Tiếp theo, cho $\alpha_i \in [\gamma_i, 1)$ là các số cố định, $\{S_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ γ_i-giả co chặt trên X. Định lý 4.2.2 mở rộng kết quả của Định lý 4.2.1 trong trường hợp $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(S_i)$.

Định lý 4.2.2. *Cho $G : X \to X$ là ánh xạ L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh, với L, η là những số thực dương. Cho $\gamma_i \in [0,1), i = \overline{1, N}$, họ ánh xạ $\{S_i\}_{i=1}^N$ gồm N ánh xạ γ_i-giả co chặt trên X sao cho $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(S_i) \neq \emptyset$. Cho $\alpha_i \in [\gamma_i, 1), \mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và cho $t \in (0,1), \{\lambda_t\}, \{\beta_t^i\} \subset (0,1)$, như trong Định lý 4.2.1. Khi đó, dãy $\{x_t\}$ xác định bởi*

$$x_t = \tilde{T}^t x_t, \quad \tilde{T}^t := T_0^t \tilde{T}_N^t ... \tilde{T}_1^t, \quad t \in (0,1),$$

ở đây $\tilde{T}_i y = \alpha_i y + (1-\alpha_i)S_i y$, *với* $i = 1, \cdots, N$ *và* $T_0^t x = (I - \lambda_t \mu G)x$, *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* $\bar{x}$ *của (4.2).*

Ngoài ra, chúng tôi cũng xét bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Kết quả này đã được công bố trong [5].

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, ở Mục 4.2, chúng tôi đã đưa ra phương pháp lặp ẩn tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert và mở rộng kết quả với họ các ánh xạ giả co chặt. Ngoài ra, để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach, chúng tôi đã đưa ra phương pháp xấp xỉ mềm cải biên với ánh xạ co yếu cho một họ vô hạn ánh xạ không giãn. Trong các kết quả của mình, chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của các dãy lặp với một số điều kiện đơn giản hơn so với kết quả trước đó của các tác giả khác. Các kết quả của chương này đã được công bố trong hai bài báo [2] và [5].

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN VÀ NHỮNG VẤN ĐỀ MỞ

Kết quả chủ yếu

1) Luận án giới thiệu về các bài toán tựa cân bằng tổng quát. Thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát, đặc biệt, chứng minh sự tồn tại nghiệm cho các bài toán loại 2.

2) Chỉ ra các bài toán này bao hàm nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu véctơ như những trường hợp đặc biệt, đồng thời thu được một số kết quả mới cho những bài toán này. Đặc biệt, luận án nghiên cứu về các bài toán tựa cân bằng Pareto, tựa cân bằng yếu trên (dưới) loại 1 và loại 2, nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2.

3) Phát biểu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp và thiết lập điều kiện đủ để các bài toán này có nghiệm.

4) Xây dựng dãy lặp ẩn tìm nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân vô hướng.

Một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

1) Tìm hiểu thêm về những ứng dụng của các kết quả vào một số bài toán trong kinh tế và một số lĩnh vực khác.

2) Tiếp tục nghiên cứu tính phụ thuộc tham số của nghiệm của những loại bài toán này như tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới và tính liên tục Holder của ánh xạ nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát.

3) Tìm một số thuật toán giải các bài toán tựa cân bằng tổng quát trong những trường hợp đặc biệt.

4) Nghiên cứu bài toán tựa cân bằng tổng quát trong trường hợp các tập D, K không compắc, chỉ lồi và đóng.