BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Các kết quả viết chung với GS. TSKH Nguyễn Xuân Tấn và GS. TS. Nguyễn Bường đã được sự đồng ý của các thầy khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là mới chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Nguyễn Thị Quỳnh Anh

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu của tác giả, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn đã từng bước chỉ dẫn tác giả một cách tận tình và nghiêm khắc, truyền cho tác giả rất nhiều kiến thức khoa học và cuộc sống. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến thầy.

Tác giả xin đặc biệt cảm ơn GS. TS. Nguyễn Bường, người thầy đã luôn quan tâm, giúp đỡ và tạo điều kiện cho tác giả tham gia semina cùng nhóm nghiên cứu của trong suốt quá trình học tập vừa qua. Nhân dịp này, tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy: GS. TSKH. Phạm Hữu Sách, GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, PGS. TS. Nguyễn Bá Minh, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, PGS. TS. Hà Trần Phương, TS. Hồ Minh Toàn đã chỉ bảo tận tình và cho những ý kiến đóng góp quý báu cho luận án.

Tác giả xin được bày tỏ sự cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Ban chủ nhiệm Khoa Khoa học cơ bản trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành luận án của mình. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám đốc, Ban Sau đại học Đại học Thái Nguyên; Ban Giám hiệu, Phòng Sau đại học, Ban chủ nhiệm khoa Toán, Bộ môn Giải Tích trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên; Viện Toán học và các nhà khoa học tại các cơ sở, đã tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp, anh chị em nghiên cứu sinh đã luôn giúp đỡ, động viên và khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án.

Tác giả xin gửi tặng bố mẹ và gia đình thân yêu của mình niềm vinh dự to lớn này.

Tác giả

Nguyễn Thị Quỳnh Anh

Mục lục

Bảng kí hiệu và viết tắt

Trong luận án này ta dùng những kí hiệu với các ý nghĩa xác định dưới đây:

$\mathbb{N}^*$	tập hợp các số tự nhiên khác không
$\mathbb{Q}$	tập hợp các số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}_-$	tập hợp các số thực không dương
$\mathbb{R}^n$	không gian véctơ Euclid $n-$ chiều
$\mathbb{R}^n_+$	tập hợp các véctơ có các thành phần không âm của không gian $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_-$	tập hợp các véctơ có các thành phần không dương của không gian $\mathbb{R}^n$
X^*	không gian đối ngẫu tôpô của không gian tôpô tuyến tính X
2^X	tập các tập con của tập hợp X
$\langle T, K\rangle$	tập hợp các giá trị của $\xi \in T \subseteq L(X,Y)$ tại $x \in K \subseteq X$
$i = \overline{1,n}$	$i = 1, 2, ..., n$
$\{x_\alpha\}$	dãy suy rộng
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu tới x
$\emptyset$	tập rỗng
$F : X \to 2^Y$	ánh xạ đa trị từ tập X vào tập Y
$\mathrm{dom}F$	miền định nghĩa của ánh xạ F
$\mathrm{Gr}F$	đồ thị của ánh xạ đa trị F
C'	nón đối ngẫu của nón C

C'^{+}	nón đối ngẫu chặt của nón C
C'^{-}	nón đối ngẫu yếu của nón C
$A \subseteq B$	A là tập con của B
$A \nsubseteq B$	A không là tập con của B
$A \cup B$	hợp của hai tập hợp A và B
$A \cap B$	giao của hai tập hợp A và B
$A \setminus B$	hiệu của hai tập hợp A và B
$A + B$	tổng đại số của hai tập hợp A và B
$A \times B$	tích Descartes của hai tập hợp A và B
$\mathrm{co}A$	bao lồi của tập A
$\mathrm{cl}A$	bao đóng tôpô của tập hợp A
$\mathrm{int}A$	phần trong tôpô của tập hợp A

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết tối ưu véctơ được hình thành từ ý tưởng về cân bằng kinh tế, lý thuyết giá trị của Edgeworth [17] năm 1881 và Pareto [44] năm 1909. Nhưng từ những năm 1950 trở lại đây, sau những công trình về điều kiện cần và đủ cho tối ưu của Kuhn - Tucker [31] năm 1951, về giá trị cân bằng và tối ưu Pareto của Debreu [12] năm 1954, lý thuyết tối ưu véctơ mới trở thành một lý thuyết mới của toán học hiện đại, với nhiều ứng dụng trong thực tế. Lý thuyết tối ưu véctơ được nghiên cứu khá tỉ mỉ và hệ thống trong cuốn sách chuyên khảo của Đinh Thế Lục [36]. Đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu là bài toán tìm cực tiểu của hàm f trên tập D: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \text{ với mọi } x \in D, \tag{0.1}$$

với D là một tập con khác rỗng trong không gian X, $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm thực. Bài toán này cũng đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu, mở rộng cho ánh xạ đa trị trong các không gian véctơ. Chúng tôi quan tâm đến lớp các bài toán tựa cân bằng tổng quát và sự tồn tại nghiệm của chúng. Cách tổng quát hóa các bài toán như vậy cho phép ta nhìn nhận các bài toán trong lý thuyết tối ưu một cách hệ thống và nhất quán, và nghiệm của chúng có liên quan chặt chẽ với nhau. Để tìm nghiệm các bài toán tối ưu và các bài toán mở rộng, người ta thường xây dựng những thuật toán để tìm nghiệm cho từng bài toán cụ thể, tùy thuộc đặc trưng của mỗi loại. Một trong các phương pháp đó là xây dựng các dãy lặp hội tụ về nghiệm. Chính vì vậy, việc tìm điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của các bài toán là một trong những vấn đề quan trọng khi nghiên cứu các bài toán trong lý thuyết tối ưu. Các kết quả đã được đưa ra trước đây chưa thực sự tổng quát cho các bài toán hoặc điều kiện tồn tại nghiệm còn quá chặt.

Với các lý do trên, chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu "Bài toán tựa cân bằng tổng quát và một số ứng dụng".

2. Mục đích của đề tài luận án

2.1. Mục đích thứ nhất của đề tài luận án là xét bài toán tựa cân bằng tổng quát, chứng minh điều kiện đủ để bài toán có nghiệm và nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán đó. Ngoài ra, luận án nghiên cứu mối quan hệ của bài toán tựa cân bằng tổng quát với các bài toán đã được đưa ra trước đó và tìm một số ứng dụng vào các vấn đề trong kinh tế, điều khiển tối ưu và một số lĩnh vực khác.

2.2. Mục đích thứ hai của đề tài luận án là giới thiệu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp, chứng minh điều kiện đủ để các bài toán đó có nghiệm và suy ra một số kết quả cho các bài toán liên quan đã được đưa ra trước đó.

2.3. Mục đích thứ ba của đề tài luận án là xây dựng thuật toán tìm nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát, bao hàm thức tựa biến phân Pareto trong trường hợp đặc biệt: Tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu tính liên tục, tính lồi (theo nón) của các ánh xạ đơn trị và đa trị, tính KKM của ánh xạ đa trị, tính lồi đóng của tập hợp,... để tìm ra điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng tổng quát và bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án, một số định lý điểm bất động đã được dùng để chứng minh các kết quả chính: Định lý điểm bất động Ky Fan, Định lý Fan-Browder và một số dạng tương đương khác. Ngoài ra, phương pháp vô hướng hóa các bài toán trong không gian véctơ cũng đã được sử dụng một cách hiệu quả.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Các bài toán tựa cân bằng và bao hàm thức tựa biến phân đã và đang được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Trong nước, có thể kể đến các tác giả như Phan Quốc Khánh, Phạm Hữu Sách, ... , ngoài nước có Lin L.J., Đinh Thế Lục, ... Nhiều công trình nghiên cứu khoa học về các vấn đề này đã được ra đời, chúng có nhiều ứng dụng trong giải quyết những mô hình kinh tế, lý thuyết trò chơi,... và các ngành khoa học khác.

6. Tổng quan và cấu trúc luận án

Đóng vai trò trung tâm, bài toán tối ưu (0.1) có mối quan hệ mật thiết đến nhiều bài toán khác trong lý thuyết tối ưu, chẳng hạn bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash trong mô hình kinh tế,...

Năm 1980, Stampacchia [30] đưa ra bài toán bất đẳng thức biến phân (0.2) và tìm điều kiện đủ để bất đẳng thức biến phân có nghiệm. Bài toán được phát biểu nguyên thủy như sau: Cho D là tập con trong không gian Euclid hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n, G : D \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ đơn trị. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\langle G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \in D. \tag{0.2}$$

Khi f là một hàm lồi, khả vi trên tập lồi D, thì bài toán tối ưu (0.1) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân (0.2), với $G(x) = \nabla f(x)$. Sau đó, bài toán được mở rộng sang không gian vô hạn chiều và thêm hàm số $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Cụ thể, cho D là tập con trong không gian Banach X với đối ngẫu $X^*, G : D \to X^*$ là ánh xạ đơn trị, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ là hàm số. Ta có bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\langle G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \geq 0 \text{ với mọi } x \in D.$$

Song song với bài toán này, Minty [42] đã đưa ra bài toán bất đẳng thức biến phân sau đây: Tìm $\bar{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\langle G(x), x - \overline{x}\rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \in D. \tag{0.3}$$

Hai bất đẳng thức này là hoàn toàn khác nhau. Khi D là tập lồi thì tập nghiệm của (0.3) cũng là tập lồi. Nhưng tập nghiệm của (0.2) nói chung không lồi. Khi G là toán tử đơn điệu thì (0.2) tương đương với (0.3).

Cùng với các bài toán trên, ta còn có bài toán điểm bất động: Cho $T : D \to X$ là ánh xạ đơn trị. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\bar{x} = T(\bar{x}). \tag{0.4}$$

Nếu T là một ánh xạ liên tục và ánh xạ $G := I - T$, với I là ánh xạ đồng nhất trên D, thì bài toán điểm bất động (0.4) tương đương với bài toán bất đẳng thức biến phân (0.2) (xem [30]).

Năm 1994, Blum, E. và Oettli, W. đã phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán điểm cân bằng: Cho D là tập con của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff $X, \varphi : D \times D \to \mathbb{R}$. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\varphi(t, \bar{x}) \geq 0 \,\text{với mọi}\, t \in D. \tag{0.5}$$

Bài toán này chứa các bài toán (0.1), (0.2), (0.3) và các bài toán điểm yên ngựa, minimax, bài toán bù, bài toán điểm bất động, . . . như những trường hợp đặc biệt.

Năm 2002, Nguyễn Xuân Tấn và Guerraggio, A. [24] đã phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa tối ưu tổng quát hay còn gọi là bài toán tựa tối ưu phụ thuộc tham số loại 1: Cho X, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là những tập con khác rỗng. Cho $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K$ là những ánh xạ đa trị, $F : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm số. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$\begin{aligned} &1) \quad \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\ &2) \quad F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) = \min_{t \in S(\bar{x}, \bar{y})} F(\bar{y}, \bar{x}, t). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Bài toán (0.6) tổng quát hơn bài toán (0.5). Khi F không phụ thuộc vào y, $F(x, x) = 0$ với mọi $x \in D$, ta chỉ việc đặt $S(x, y) \equiv D$ và $\varphi(t, x) = F(x, t)$ với mọi $x, t \in D$. Từ (0.6), ta có ngay $0 = F(\bar{x}, \bar{x}) \leq F(\bar{x}, t), \forall t \in D$, tức là $\varphi(t, \bar{x}) \geq 0$ với mọi $t \in D$ và (0.5) được thỏa mãn. Các bài toán tựa tối ưu lý tưởng loại 2 cũng đã được xét đến trong bài báo [1], danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án.

Bài toán (0.1) đã được phát biểu cho trường hợp véctơ: Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương, D là tập con trong X, C là nón trong Y. Nón C sinh ra quan hệ thứ tự từng phần trên $Y: x \succeq y$ khi và chỉ khi $x - y \in C$. Từ quan hệ thứ tự này, người ta định nghĩa tập các điểm hữu hiệu lý tưởng, thực sự, Pareto và yếu của tập $A \subseteq Y$, (xem Định nghĩa 1.2.4). Ta kí hiệu $\alpha Min(A/C)$ là tập các điểm hữu hiệu α của tập A đối với nón C, (α là lý tưởng, thực sự, Pareto, yếu). Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$F(\bar{x}) \in \alpha \mathrm{Min}(F(D)/C), \tag{0.7}$$

trong đó $F: D \to Y$, được gọi là bài toán tựa tối ưu α véctơ. Điểm $\bar{x}$ được gọi là nghiệm và $F(\bar{x})$ được gọi là giá trị tối ưu α của (0.7).

Năm 1985, Nguyễn Xuân Tấn [47] đã mở rộng bài toán (0.2) cho trường hợp ánh xạ đa trị và trường hợp miền ràng buộc D thay đổi bởi ánh xạ đa trị S. Tức là, cho D là tập con của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X với đối ngẫu X^*. Cho $S: D \to 2^D, P: D \to 2^{X^*}$ là những ánh xạ đa trị và $\varphi: D \to \mathbb{R}$ là hàm số. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D, \bar{x} \in S(\bar{x})$ và $\bar{y} \in P(\bar{x})$ sao cho

$$\langle \bar{y}, x - \bar{x} \rangle + \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \geq 0 \, \text{với mọi} \, x \in S(\bar{x}), \tag{0.8}$$

được gọi là bất đẳng thức tựa biến phân đa trị.

Năm 1998, Nguyễn Xuân Tấn và Phan Nhật Tĩnh [49] đã mở rộng bài toán (0.3) cho trường hợp véctơ. Năm 2000, Nguyễn Xuân Tấn và Nguyễn Bá Minh [40] mở rộng tiếp cho trường hợp ánh xạ đa trị và chứng minh định lý về sự tồn tại nghiệm của Blum-Oettli cho trường hợp này.

Năm 2007, Lin J. L. và Nguyễn Xuân Tấn [33] phát biểu bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại 1: Cho X, Z, Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subseteq X, K \subseteq Z$ là các tập khác rỗng, $C \subseteq Y$ là nón. Cho $S: D \times K \to 2^D, T: D \times K \to 2^K, P_i: D \to 2^D, i = 1, 2, Q: D \times D \to 2^K, F: K \times D \times D \to 2^Y$, là những ánh xạ đa trị.

Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên (dưới) loại 1: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$\begin{array}{ll} 1) & \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \;\; \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\ 2) & F(\bar{y}, \bar{x}, t) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C \;\; \text{với mọi} \;\; t \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\ & \big(F(\bar{y}, \bar{x}, t) \cap F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C \neq \emptyset \;\; \text{với mọi} \;\; t \in S(\bar{x}, \bar{y})\big)\,. \end{array} \tag{0.9}$$

Bài toán được gọi là bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên (dưới) loại 1: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$
\begin{array}{ll}
1) & \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\
2) & F(\bar{y}, \bar{x}, t) \not\subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C \setminus \{0\}) \ \text{ với mọi } \ t \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\
 & \big(F(\bar{y}, \bar{x}, t) \cap F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C \setminus \{0\}) = \emptyset \ \text{ với mọi } \ t \in S(\bar{x}, \bar{y})\big)\,.
\end{array}
\tag{0.10}
$$

Tương tự, ta cũng có thể phát biểu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân thực sự và bao hàm thức tựa biến phân yếu loại 1.

Năm 2004, Đinh Thế Lục và Nguyễn Xuân Tấn [38] đưa ra các loại bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại 2. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$
\begin{array}{c}
F(y, \bar{x}, t) \subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) + C \ \text{ với mọi } \ t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t), \\
\big(F(y, \bar{x}, t) \cap F(y, \bar{x}, \bar{x}) + C \neq \emptyset \ \text{ với mọi } \ t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)\big)\,,
\end{array}
\tag{0.11}
$$

được gọi là bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên (dưới) loại 2.

Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên (dưới) loại 2 được phát biểu như sau: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$
\begin{array}{c}
F(y, \bar{x}, t) \not\subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C \setminus \{0\}) \ \text{ với mọi } \ t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t), \\
\big(F(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F(y, \bar{x}, t) + (C \setminus \{0\} \ \text{ với mọi } \ t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)\big)\,.
\end{array}
\tag{0.12}
$$

Tương tự, ta có các bài toán bao hàm thức tựa biến phân thực sự, yếu trên (dưới) loại 2. Các định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 và loại 2, đã được Bùi Thế Hùng và Nguyễn Xuân Tấn xét trong [26], và một số bài báo khác đã được gửi đăng. Từ kết quả này ta suy ra nhiều kết quả cho các bài toán khác, chẳng hạn, bài toán tựa cân bằng Pareto, tựa tối ưu Pareto loại 1 và loại 2,...

Tiếp sau các kết quả nghiên cứu của Trương Thị Thùy Dương và Nguyễn Xuân Tấn về bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1, Năm 2011, chúng tôi phát biểu bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$
0 \in F(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \ \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).
$$

Các loại bài toán tựa cân bằng tổng quát này chứa các loại bài toán bao hàm thức tựa biến phân, tựa cân bằng và các loại bài toán quan hệ biến phân loại 1 và loại 2 như những trường hợp riêng.

Trương Thị Thùy Dương [13] đã chứng minh sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng tổng quát hỗn hợp: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$
\begin{array}{ll}
1) & \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\
2) & 0 \in F(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\
3) & 0 \in G(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).
\end{array}
$$

Ở đây X, Y_1, Y_2, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, ánh xạ $F : K \times K \times D \times D \to 2^Y, G : K \times D \times D \to 2^Y$ và các ánh xạ P, Q, S, T như trên. Tác giả đưa ra điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng tổng quát với giả thiết *iv)* khá chặt, dưới dạng một bài toán khác mà ta chưa xác định được khi nào nó có nghiệm.

Mục đích của luận án này là phát biểu và chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát, tìm mối liên quan tới các bài toán khác trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị, đặc biệt là các bài toán tựa cân bằng Pareto, tựa cân bằng yếu và bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp với những giả thiết đơn giản, và cuối cùng, chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Bài toán này là trường hợp đặc biệt của bài toán tựa cân bằng tổng quát và bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp.

Chương 1 giới thiệu một số kiến thức cơ bản của giải tích đa trị được sử dụng trong các chương chính của luận án.

Chương 2 dành cho bài toán tựa cân bằng tổng quát. Định lý 2.3.1 cho bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2, Hệ quả 2.4.2 cho bài toán tựa cân bằng vô hướng, Hệ quả 2.4.1 cho bài toán tựa quan hệ biến phân, các Hệ quả 2.4.3 và 2.4.4 cho các bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng, các Hệ quả 2.4.5 và 2.4.6 cho các bài toán tựa cân bằng lý tưởng. Đặc biệt, ta chỉ ra một số kết quả về sự tồn tại nghiệm cho các bài toán tựa cân bằng Pareto (yếu) trên (dưới) loại 1 (loại 2) liên quan tới ánh xạ đơn điệu (xem các Định lý 2.4.3, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.4, 2.4.7, 2.4.6, 2.4.9 và 2.4.8). Chương này được viết dựa trên kết quả của bài báo [5] trong danh mục công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 3 nghiên cứu 4 bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp. Các định lý 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 và 3.2.4 chỉ ra điều kiện đủ để tồn tại nghiệm của từng loại. Hệ quả của các định lý trên là sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan như: bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto, các bài toán tựa tối ưu Pareto, tựa cân bằng Pareto hỗn hợp. Nội dung chính của chương này được lấy từ bài báo [3] trong danh mục công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án.

Trong chương 4, chúng tôi chỉ ra rằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, với các điều kiện được đặt ra, thỏa mãn các định lý chính về sự tồn tại nghiệm ở Chương 2 và Chương 3. Sau đó, chúng tôi xây dựng một phương pháp lặp ẩn để tìm nghiệm của bài toán đó (xem các định lý 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3). Nội dung của chương này đã được công bố trong hai bài báo [2] và [4] trong danh mục công trình đã công bố của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đối với mỗi bài toán được đặt ra trong toán học, phải được xác định trong một không gian cụ thể, có như vậy, ta mới xác định được nghiệm cần tìm của bài toán nằm trong không gian nào. Chính vì vậy, trước khi nghiên cứu những bài toán được nêu trong luận án, ta cần nhắc lại những không gian, những kiến thức cơ bản cần dùng trong những chương tiếp theo của luận văn. Ta bắt đầu bằng việc nhắc lại về không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, không gian mà ta thường đặt ra các bài toán trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị.

1.1 Không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff

Trong mục này, ta xét lớp không gian trừu tượng: không gian tôpô. Ta có các khái niệm giới hạn, lân cận, tập đóng, tập mở. Ta nói rằng không gian này có cấu trúc tôpô. Phần lớn các kiến thức trong mục này được tham khảo từ cuốn sách Hàm thực và Giải tích hàm của GS. Hoàng Tụy ([3]).

1.1.1. Không gian tôpô

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập hợp.

1) Một họ $\mathcal{G}$ những tập con của X được gọi là là một *tôpô* trên X nếu:

   i) Hai tập $\emptyset, X$ đều thuộc họ $\mathcal{G}$;

   ii) $\mathcal{G}$ kín đối với phép giao hữu hạn, tức là giao của một số hữu hạn tập thuộc họ $\mathcal{G}$ thì cũng thuộc họ $\mathcal{G}$;

   iii) $\mathcal{G}$ kín đối với phép hợp bất kì, tức là hợp của một số hữu hạn hay vô hạn tập thuộc họ $\mathcal{G}$ thì cũng thuộc họ $\mathcal{G}$.

2) Tập X cùng với tôpô $\mathcal{G}$ trên X được gọi là *không gian tôpô* $(X, \mathcal{G})$ (hay không gian tôpô X).

3) Các tập thuộc họ $\mathcal{G}$ được gọi là *tập mở*.

4) Khi có hai tôpô $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$trên X, nếu $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$, ta nói tôpô $\mathcal{G}$ *yếu* hơn (*thô* hơn) tôpô $\mathcal{G}'$ hay tôpô $\mathcal{G}'$ *mạnh* hơn (*mịn* hơn) tôpô $\mathcal{G}$. Trường hợp không có quan hệ đó, ta nói hai tôpô không so sánh được.

Trong không gian metric (X, d), họ τ các tập mở trong X cũng là một tôpô trên X, ta gọi nó là tôpô metric d, điều đó có nghĩa là, mọi không gian metric (bao gồm cả không gian định chuẩn và Hilbert), đều là không gian tôpô.

Trong một không gian tôpô đã nghĩa các tập mở, ta có thể định nghĩa được khái niệm lân cận, giới hạn, phần trong, bao đóng, . . . một cách khái quát hơn các khái niệm đã định nghĩa trong không gian metric.

Định nghĩa 1.1.2. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{G}), A \subseteq X$.

1) Tập con U của không gian X được gọi là *lân cận* của A nếu U bao hàm một tập mở chứa A;

2) Lân cận của phần tử $x \in X$ là lân cận của tập con $\{x\}$. Họ tất cả các lân cận của một điểm gọi là *hệ lân cận* của điểm đó.

Định nghĩa 1.1.3. Cho X, Y là hai không gian tôpô.

1) Một ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là liên tục tại điểm $x \in X$ nếu với mỗi lân cận U của $f(x)$ trong Y, đều tồn tại lân cận V của x trong X thỏa mãn $f(V) \subseteq U$.

2) Ánh xạ f gọi là liên tục trên không gian tôpô X nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Tương tự, khái niệm ánh xạ đồng phôi, ánh xạ mở, đóng, . . . được mở rộng một cách tự nhiên trong không gian tôpô. Một tôpô có thể được xác định từ một họ con của nó, được gọi là cơ sở của tôpô đó.

Định nghĩa 1.1.4. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{G})$,

1) Cho $x \in X$, họ $\mathcal{V}_x$ nào đó gồm các lân cận của điểm x được gọi là một *cơ sở địa phương* của tôpô $\mathcal{G}$ tại điểm x (hay cơ sở lân cận tại x), nếu với bất kì lân cận U của điểm x luôn tồn tại tập $V \in \mathcal{V}_x$ sao cho $x \in V \subseteq U$.

2) Họ con $\mathcal{V}$ các phần tử của $\mathcal{G}$ được gọi là một *cơ sở* của tôpô $\mathcal{G}$ trên X nếu mọi phần tử của $\mathcal{G}$ đều là hợp của một số phần tử thuộc $\mathcal{V}$.

3) Họ con $\mathcal{M}$ các phần tử của $\mathcal{G}$ được gọi là một *tiền cơ sở* của tôpô $\mathcal{G}$ trên X nếu họ các giao hữu hạn có thể có các tập con thuộc $\mathcal{M}$ là một cơ sở của tôpô $\mathcal{G}$.

Định nghĩa 1.1.5. Không gian tôpô $(X, \mathcal{G})$ được gọi là *không gian Hausdorff* nếu đối với hai điểm khác nhau tùy ý $x, y \in X$ luôn tồn tại các lân cận U của x, V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Một không gian véctơ hay còn gọi là không gian tuyến tính có thể còn được trang bị một cấu trúc tôpô. Ta có khái niệm: không gian tôpô tuyến tính.

1.1.2. Không gian tôpô tuyến tính

Định nghĩa 1.1.6. Cho X là một không gian véctơ trên trường $\mathbb{K}$.

1) Một tôpô τ trên X được gọi là *tương thích* với cấu trúc đại số của X nếu các ánh xạ $\begin{array}{c}(+): X \times X \to X, \\ (x, y) \mapsto x + y;\end{array}$ và $\begin{array}{c}(.): \mathbb{K} \times X \to X, \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x,\end{array}$ đều là các ánh xạ liên tục.

2) Một không gian tôpô tuyến tính hay không gian véctơ tôpô trên trường $\mathbb{K}$ là một cặp (X, τ), trong đó X là một không gian véctơ trên trường $\mathbb{K}$, còn τ là một tôpô tương thích với cấu trúc đại số của X.

Trong số các không gian tôpô tuyến tính, lớp không gian đặc biệt quan trọng là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương.

Định nghĩa 1.1.7. Một không gian tôpô tuyến tính X được gọi là *không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương* (và tôpô của nó là tôpô lồi địa phương), nếu trong X có một cơ sở lân cận (của gốc) gồm toàn tập lồi. Hơn vậy, nếu không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương X đồng thời là không gian Hausdorff thì X được gọi là không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff.

Ví dụ 1.1.1. Không gian định chuẩn, không gian Hilbert là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff.

Cho X là không gian Hilbert, chúng ta nhắc lại một số kết quả sẽ được sử dụng trong các chứng minh ở chương 4.

Mệnh đề 1.1.1. ([39]). *Ta có các khẳng định sau:*

i) $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \ 2\langle y, x+y\rangle, \quad \forall x, y \in X.$

ii) Với $t \in [0,1]$, $\|(1-t)x + ty\|^2 = (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - (1-t)t\|x - y\|^2$, *với mọi* $x, y \in X$.

Với mỗi ánh xạ không giãn T trên X, ánh xạ $F : X \to X$ là $L-$Lipschitz liên tục và $\eta-$ đơn điệu mạnh, đặt $T^t = Tx - t\mu F(Tx), x \in H, t \in [0,1]$, ta có:

Mệnh đề 1.1.2. ([53]) $\|T^t x - T^t y\| \leq (1 - \lambda_t \tau)\|x - y\|$, *với mọi* $x, y \in X$, $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ *và* $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu L^2)} \in (0,1)$.

Mệnh đề 1.1.3. (Nguyên lý nửa đóng [23]). *Cho D là tập con lồi, đóng trong không gian Hilbert X. Giả sử ánh xạ $T : D \to D$ là ánh xạ không giãn. Nếu T có điểm bất động, thì $I - T$ là nửa đóng; tức là, nếu $\{x_k\}$ là dãy bất kì trong D hội tụ yếu tới $x \in D$ nào đó và dãy $\{(I-T)x_k\}$ hội tụ mạnh tới y nào đó, thì kéo theo $(I-T)x = y$.*

1.2 Nón và ánh xạ đa trị

Trong toán học và trong thực tế, ta gặp nhiều bài toán liên quan đến phép tương ứng một điểm của tập hợp này với một tập con của tập hợp kia. Một phép tương ứng như vậy được gọi là ánh xạ đa trị. Để xác định thứ tự trong không gian và xét những bài toán liên quan đến ánh xạ có giá trị là véctơ hoặc ánh xạ đa trị, người ta đưa ra khái niệm nón. Từ đó, ta mở rộng được các khái niệm đã biết của không gian số thực hoặc số phức cho không gian tôpô tuyến tính. Mục này dành cho các khái niệm, tính chất của nón, ánh xạ đa trị và các khái niệm có liên quan. Các kiến thức của mục này được tham khảo từ hai cuốn sách của GS. Nguyễn Xuân Tấn và PGS. Nguyễn Bá Minh ([1], [2]).

1.2.1. Nón

Định nghĩa 1.2.1. Cho Y là không gian tuyến tính và $C \subseteq Y$. Ta nói rằng C là nón có đỉnh tại gốc (gọi tắt là nón) trong Y nếu $tc \in C, \forall c \in C, t \geq 0$.

Nếu Y là không gian tôpô tuyến tính, C là nón trong Y, ta kí hiệu $\text{cl}C, \text{int}C$, $\text{conv}C$ lần lượt là *bao đóng, phần trong, bao lồi* của nón C.

Định nghĩa 1.2.2. *Cho X, Y là các không gian tuyến tính. Ánh xạ đa trị $\mathcal{C} : X \to 2^Y$ được gọi là ánh xạ nón nếu $\mathcal{C}(x)$ là nón trong Y với mọi $x \in X \cap \text{dom}\mathcal{C}$.*

Ta thường quan tâm tới các loại nón sau:

1) Nón C là *nón lồi* (*nón đóng*) nếu tập C là tập lồi (tập đóng);

2) Ta kí hiệu $l(C) = C \cap (-C)$ là phần trong tuyến tính của nón C. Nón C được gọi là *nón nhọn* nếu $l(C) = \{0\}$;

Với nón C cho trước, ta có thể định nghĩa quan hệ thứ tự trong Y như sau:
i) $\forall x, y \in Y, x \succeq_C y$ nếu $x - y \in C$, (có thể viết $x \succeq y$ nếu không sợ nhầm lẫn);
ii) $\forall x, y \in Y$, kí hiệu $x \succ y$ nếu $x - y \in C \backslash l(C)$;
iii) $\forall x, y \in Y$, kí hiệu $x \succ\succ y$ nếu $x - y \in \text{int}C$.
Nếu C là nón lồi thì quan hệ thứ tự trên là *tuyến tính* và nó là quan hệ thứ tự từng phần trên Y. Hơn nữa, nếu C là nón nhọn thì quan hệ trên có tính chất phản đối xứng, có nghĩa là nếu $x \succeq y$ và $x \preceq y$ thì $x = y$.

Định nghĩa 1.2.3. Cho Y là không gian tuyến tính, Y^* là không gian tôpô đối ngẫu của Y, $< \xi, y >$ là giá trị của $\xi \in Y^*$ tại $y \in Y$. *Nón đối ngẫu* C' và *nón đối ngẫu chặt* C'^+ của C lần lượt được định nghĩa là:

$$C' = \{\xi \in Y^* | \langle \xi, c \rangle \geq 0, \text{ với mọi } c \in C\},$$

$$C'^+ = \{\xi \in Y^* | \langle \xi, c \rangle > 0, \text{ với mọi } c \in C \setminus l(C)\}.$$

Từ quan hệ thứ tự sinh bởi nón, ta có thể định nghĩa được điểm hữu hiệu của một tập hợp bất kì (xem [36]), cụ thể như sau:

Định nghĩa 1.2.4. Cho Y là không gian tôpô tuyến tính với thứ tự sinh bởi nón C, A là tập con của Y.

1) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm *hữu hiệu lý tưởng* của tập A đối với nón C nếu $y - x \in C$ với mọi $y \in A$.

   Tập điểm hữu hiệu lý tưởng của A đối với nón C kí hiệu là $\text{IMin}(A|C)$.

2) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm *hữu hiệu Pareto* (cực tiểu Pareto) của tập A đối với nón C nếu không tồn tại $y \in A, y \neq x$ để $x - y \in C \setminus l(C)$.

   Tập điểm hữu hiệu Pareto của A đối với nón C kí hiệu là $\mathrm{PMin}(A|C)$ hoặc đơn giản hơn là $\mathrm{Min}(A|C)$.

3) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm *hữu hiệu yếu* của tập A đối với nón C (trong trường hợp $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ và $C \neq Y$) nếu $x \in \mathrm{Min}(A| (\mathrm{int}C \cup \{0\})$. Tức là x là điểm hữu hiệu Pareto của tập A đối với nón $(\mathrm{int}C \cup \{0\})$.

   Tập điểm hữu hiệu yếu của A đối với nón C kí hiệu là $\mathrm{WMin}(A|C)$ hay $\mathrm{WMin}(A)$.

4) Điểm $x \in A$ được gọi là điểm *hữu hiệu thực sự* của tập A đối với nón C nếu tồn tại nón lồi $\tilde{C}$ khác toàn không gian và chứa $C \setminus l(C)$ trong phần trong của nó sao cho $x \in \mathrm{PMin}(A|\tilde{C})$.

   Tập điểm hữu hiệu thực sự của A đối với nón C kí hiệu là $\mathrm{PrMin}(A|C)$.

Từ định nghĩa trên ta có $\mathrm{IMin}(A|C) \subseteq \mathrm{PrMin}(A|C) \subseteq \mathrm{Min}(A|C) \subseteq \mathrm{WMin}(A|C)$.

1.2.2. Ánh xạ đa trị

Cho hai tập hợp $X, Y, D \subseteq X$ là tập con.

Định nghĩa 1.2.5. Ánh xạ $F : D \to Y$ biến mỗi điểm $x \in D$ thành một tập con $F(x)$ của Y, ($F(x)$ có thể bằng rỗng), được gọi là *ánh xạ đa trị*. Ta kí hiệu 2^Y là họ các tập con của Y và $F : D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị từ tập D vào tập Y.

Nếu với mỗi $x \in X$, $F(x)$ chỉ gồm một phần tử thì F gọi là ánh xạ đơn trị, ta sử dụng kí hiệu quen thuộc $F : X \to Y$.

Định nghĩa 1.2.6. Cho $D \subseteq X$, Ta gọi *miền xác định* và *đồ thị* của ánh xạ $G : D \to 2^Y$ tương ứng là các tập hợp

$$\mathrm{dom}G = \{x \in D |\ G(x) \neq \emptyset\},$$
$$\mathrm{Gr}(G) = \{(x, y) \in D \times Y |\ y \in G(x)\}.$$

1) Ánh xạ G được gọi là *ánh xạ đóng* (tương ứng, *mở*), nếu đồ thị $\mathrm{Gr}(G)$ của nó là tập con đóng (mở) trong không gian $X \times Y$.

2) Ánh xạ G được gọi là *ánh xạ compắc*, nếu bao đóng $clG(D)$ của $G(D)$ là một tập compắc trong không gian Y.

3) Ánh xạ G gọi là *có nghịch ảnh mở*, nếu với mọi $y \in Y$, tập $G^{-1}(y) = \{x \in D \mid y \in G(x)\}$ là mở.

   Nếu $G(x)$ là tập đóng (compắc) với mọi $x \in D$ thì ta nói ánh xạ G *có giá trị đóng* (tương ứng, *có giá trị compắc*).

Từ định nghĩa ta thấy,

i) G là ánh xạ đóng khi và chỉ khi với mọi dãy suy rộng $\{x_\alpha\} \subseteq D, \{y_\alpha\} \subseteq Y, x_\alpha \to x, y_\alpha \in G(x_\alpha)$, ta có $y \in G(x)$.

ii) Khi X, Y là các không gian tôpô tuyến tính và ánh xạ $F : X \to 2^Y$ có ảnh ngược tại mỗi điểm là tập mở trong X thì ánh xạ bao lồi $\mathrm{co}F : X \to 2^Y$ của nó, $(\mathrm{co}F)(x) = \mathrm{co}F(x)$, cũng có tính chất như vậy (xem [50]).

1.2.3. Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Cho X, Y là các không gian tôpô, $D \subseteq X$. Ta biết rằng, ánh xạ đơn trị f từ D vào Y được gọi là *liên tục* tại điểm $x \in X$ nếu với mọi tập mở V chứa $f(x)$ đều tồn tại tập mở U chứa x sao cho $f(x') \in V$ với mọi $x' \in U \cap D$. Đối với ánh xạ đa trị, $f(x) \in V$ tương ứng với hai khả năng: $F(x) \subseteq V$ hoặc $F(x) \cap V = \emptyset$. Từ đó có thể mở rộng từ khái niệm liên tục đối với ánh xạ đơn trị sang ánh xạ đa trị theo hai cách khác nhau và ta có hai khái niệm hoàn toàn khác nhau: ánh xạ đa trị nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới. Hai khái niệm này được đưa ra đầu tiên năm 1932 bởi B.Bouligand và K.Kuratowski (theo Aubin và Frankowska (1990)). Sau đó, Berge ([7]) đã khảo sát khá kĩ về vấn đề này. Ta nhắc lại định nghĩa của Berge.

Định nghĩa 1.2.7. Cho tập con $D \subseteq X$, ánh xạ đa trị $F : D \to 2^Y$.

1) F được gọi là *nửa liên tục trên (dưới)* (viết gọn là u.s.c (tương ứng, l.s.c)) tại $\bar{x} \in D$ nếu mỗi tập mở V chứa $F(\bar{x})$ (tương ứng, $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$), tồn tại lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho $F(x) \subseteq V$ (tương ứng, $F(x) \cap V \neq \emptyset$) với mọi $x \in U \cap D$.

2) F được gọi là u.s.c (l.s.c) trên D nếu nó là u.s.c (tương ứng, l.s.c) tại mọi điểm $x \in D$.

Các ví dụ sau đây chỉ ra rằng hai khái niệm ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới là hoàn toàn khác nhau.

Ví dụ 1.2.1. Lấy $X = Y = \mathbb{R}, D = [-a, a]$, với $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Ánh xạ

$$F : D \to 2^{\mathbb{R}}, F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{nếu } x = 0, \\ [-a, a], & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$$

1) F nửa liên tục dưới tại $x = 0$. Thật vậy, V là tập mở bất kì, $V \cap F(0) \neq \emptyset$ (trong trường hợp này V chứa $0 = F(0)$). Khi đó, rõ ràng, lấy một lân cận U của điểm $x = 0$, lấy bất kì $x' \in U, x' \neq 0$ thì $F(x') = [-a, a] \cap V \neq \emptyset$ (chúng chứa 0).

2) F không nửa liên tục trên tại $x = 0$.

   Thật vậy, lấy tập mở $V = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), F(0) = \{0\} \subset V$. Mọi lân cận U của 0, lấy bất kì $x' \in U, x' \neq 0$ thì $F(x') = [-a, a] \not\subseteq V$.

Ví dụ 1.2.2. Tương tự ta chứng minh được rằng ánh xạ

$$H : D \to 2^{\mathbb{R}}, H(x) = \begin{cases} [-a, a], & \text{nếu } x = 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } x \neq 0, \end{cases}$$

nửa liên tục trên nhưng không nửa liên tục dưới tại $x = 0$.

Tiếp theo, cho X và Y là các không tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subseteq X, K \subseteq Y$. Các mệnh đề sau nêu lên các điều kiện cần, đủ để ánh xạ đa trị là nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới.

Mệnh đề 1.2.1. ([47]) *Giả thiết $F : D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị compắc. Khi đó F là nửa liên tục dưới tại $x \in D$ nếu và chỉ nếu với mọi $y \in F(x)$ và với mọi dãy $\{x_\alpha\}$ trong D hội tụ tới x, tồn tại dãy $\{y_\alpha\}, y_\alpha \in F(x_\alpha)$ với mọi α và $y_\alpha \to y$.*

Mệnh đề 1.2.2. ([54]) *Ánh xạ đa trị F có nghịch ảnh mở thì nửa liên tục dưới.*

Điều ngược lại không đúng, chẳng hạn trong ví dụ trên, ánh xạ F nửa liên tục dưới nhưng các nghịch ảnh $\{0\}, [-a, 0), (0, a]$ không mở.

Mệnh đề 1.2.3. ([6]) *Nếu $F : D \to 2^K$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên với giá trị đóng thì F là ánh xạ đóng. Ngược lại nếu F là ánh xạ đóng và K là tập compắc, thì F là ánh xạ nửa liên tục trên.*

Mệnh đề sau đây nêu điều kiện cần và đủ để một ánh xạ nón nửa liên tục dưới.

Mệnh đề 1.2.4. *Giả sử $C : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

1) *$\mathcal{C}$ nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathrm{dom}\mathcal{C}$;*

2) *Tồn tại lân cận U của x_0 sao cho*

$$C(x_0) \subseteq C(x), \forall x \in U.$$

Cho X và Y là các không gian tôpô tuyến tính, các tập con không rỗng $D \subseteq X, K \subseteq Y$.

Định nghĩa 1.2.8. Cho $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị và $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị (với mỗi $(y, x) \in K \times D, \mathcal{C}(y, x)$ là một nón trong Y).

1) F được gọi là *$\mathcal{C}$-liên tục trên (dưới)* tại điểm $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t}) \in \mathrm{dom}\ F$ nếu với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại lân cận U của điểm $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t})$ sao cho

$$F(y, x, t) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t}) + V + \mathcal{C}(\bar{y}, \bar{x})$$

$$(\text{tương ứng}, F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t}) \subseteq F(y, x, t) + V - \mathcal{C}(\bar{y}, \bar{x})),$$

với mọi $(y, x, t) \in U \cap \mathrm{dom}F$.

2) Nếu F đồng thời $\mathcal{C}$–liên tục trên và $\mathcal{C}$–liên tục dưới tại $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t})$, ta nói F là *$\mathcal{C}$–liên tục* tại $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{t})$.

3) Nếu F là $\mathcal{C}$–liên tục trên, liên tục dưới tại mọi điểm thuộc $\mathrm{dom}F$, ta nói F là $\mathcal{C}$–liên tục trên, liên tục dưới trên D.

Nhận xét.

i) Nếu ánh xạ nón $\mathcal{C} = \{0\}$ trong Y ($\mathcal{C}(y,x) = 0, \forall (y,x) \in K \times D$), ta nói rằng F là liên tục trên (dưới) thay vì $\{0\}$-liên tục trên (dưới). Và, F là liên tục nếu nó đồng thời liên tục trên và dưới. Nếu thêm giả thiết $F(\bar{y},\bar{x},\bar{t})$ là tập compắc thì phần *i)* của Định nghĩa 1.2.8 trùng với định nghĩa về tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của Berge.

ii) Trong trường hợp F là ánh xạ đơn trị, khái niệm $\mathcal{C}$–liên tục trên và $\mathcal{C}$–liên tục dưới là một và ta nói F là $\mathcal{C}$–liên tục. (Đặc biệt, nếu F là $\mathcal{C}-$liên tục tại $(\bar{y},\bar{x},\bar{t})$ và $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+$ (hoặc, $\mathcal{C}(y,x) = \mathbb{R}_-$), thì F nửa liên tục dưới (tương ứng, nửa liên tục trên) tại $(\bar{y},\bar{x},\bar{t})$ theo nghĩa thông thường).

Ví dụ 1.2.3. Cho $f : D \to Y$ là một ánh xạ đơn trị. $\mathcal{C}$ là ánh xạ nón hằng (giá trị tại mọi điểm đều bằng nhau) trong Y. Khi ấy ánh xạ đa trị $F(x) = f(x) + \mathcal{C}$ vừa là $\mathcal{C}$–liên tục trên, vừa là $\mathcal{C}$–liên tục dưới tại những điểm mà f liên tục.

Trong [33], N.X. Tấn và Lin, L.J. đã đưa ra các điều kiện cần và đủ để một ánh xạ là $\mathcal{C}$–liên tục trên (dưới).

1.2.4. Tính lồi của ánh xạ đa trị

Trong mục này, chúng ta giả thiết X, Y là các không gian tuyến tính, D là tập con lồi trong X. Với các ánh xạ đơn trị, ta đã biết đến các khái niệm hàm lồi, hàm tựa lồi, hàm véctơ lồi, giống tựa lồi theo nón. Các khái niệm này được mở rộng tương ứng trong trường hợp ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 1.2.9. Cho $F : D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị và C là nón trong Y.

1) Ánh xạ F được gọi là *C-lồi trên (dưới)* trên D nếu với mọi x_1, $x_2 \in D$, $\alpha \in [0,1]$, ta có $\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subseteq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + C$
(tương ứng, $F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \subseteq \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) - C$).

2) Ánh xạ F được gọi là *C-giống tựa lồi trên (dưới)* trên D nếu với mọi x_1, $x_2 \in D$, $\alpha \in [0,1]$,
$F(x_1) \subseteq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + C$
hoặc, $F(x_2) \subseteq F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + C$,

(tương ứng, $F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \subseteq F(x_1) - C$
hoặc, $F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \subseteq F(x_2) - C$).

Nhận xét. Ta dễ thấy rằng:

i) Trong trường hợp F là ánh xạ đơn trị, khái niệm C-lồi trên (dưới) (hoặc, C-giống tựa lồi trên (dưới)) là như nhau và ta nói F là C-lồi (hoặc, C-giống tựa lồi).

ii) Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$ và F là ánh xạ đơn trị, nếu F là ánh xạ C-giống tựa lồi đơn trị thì F là hàm tựa lồi.

Các khái niệm ánh xạ C-lồi trên (dưới) hay C-giống tựa lồi trên (dưới) là sự tổng quát các khái niệm tương ứng đối với ánh xạ đơn trị. Có thể thấy rằng, ánh xạ C-lồi trên (dưới) không phải là ánh xạ C-giống tựa lồi trên (dưới) và ngược lại.

Ví dụ 1.2.4. ([22]) Xét các ánh xạ $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, với $F(x) = (x^{\frac{1}{3}}, x)$ và $G(x) = (x, 1-x)$. Với nón $C = \mathbb{R}^2_+$, ta dễ dàng chỉ ra được rằng, F là ánh xạ $C-$giống tựa lồi nhưng không là C-lồi và ánh xạ G là $C-$ lồi nhưng không là $C-$ giống tựa lồi.

Định nghĩa 1.2.10. Cho D là tập lồi trong X, $F : D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị và $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón.

1) F được gọi là *$\mathcal{C}$-lồi trên (dưới) theo đường chéo* đối với biến thứ hai nếu với mọi tập hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D, x \in co\{x_1, x_2, ..., x_n\}, x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, ta có

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(x, x_j) \subseteq F(x, x) + \mathcal{C}(x)$$

$$(\text{ tương ứng, } F(x, x) \subseteq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(x, x_j) - \mathcal{C}).$$

2) F được gọi là *$\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên (dưới) theo đường chéo* đối với biến thứ hai nếu với mọi tập hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D, x \in co\{x_1, x_2, ..., x_n\}, x =$

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $F(x, x_j) \subseteq F(x, x) + \mathcal{C}(x)$, (tương ứng, $F(x, x) \subseteq F(x, x_j) - \mathcal{C}(x)$).

Ví dụ 1.2.5. Cho D là tập hợp con trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương X với đối ngẫu $X^*, T : D \to X^*$ là ánh xạ đơn trị. Ta dễ dàng chỉ ra rằng, ánh xạ đơn trị $F : D \times D \to \mathbb{R}$, $F(x, t) = \langle T(x), x - t\rangle$, $x, t \in D$, là $\mathbb{R}_+$-*lồi trên (dưới) theo đường chéo* và cũng là $\mathbb{R}_+-$ *giống tựa lồi trên (dưới) theo đường chéo* đối với biến thứ hai.

Định nghĩa 1.2.11. Cho các ánh xạ đa trị $F : K \times D \times D \to 2^Y$, $Q : D \times D \to 2^K$. Cho $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị. Ta gọi

1) F là $(Q, \mathcal{C})$-*giống tựa lồi trên theo đường chéo* đối với biến thứ ba nếu với bất kì tập hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D, x \in co\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $F(y, x, x_j) \subseteq F(y, x, x) + \mathcal{C}(y, x)$, với mọi $y \in Q(x, x_j)$.

2) F là $(Q, \mathcal{C})$-*giống tựa lồi dưới theo đường chéo* đối với biến thứ ba nếu với bất kì tập hữu hạn $\{x_{1,2}, x ..., x_n\} \subseteq D, x \in co\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $F(y, x, x) \subseteq F(y, x, x_j) - \mathcal{C}(y, x)$, với mọi $y \in Q(x, x_j)$.

Cho X là không gian lồi địa phương Hausdorff, X, Z là các không gian tôpô tuyến tính. Các tập con không rỗng $D \subseteq X, K \subseteq Z$. Trong các phần tiếp theo, ta sẽ sử dụng nhiều lần khái niệm ánh xạ KKM và các mở rộng của nó, cụ thể ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.12. Ánh xạ $G : D \to 2^D$ được gọi là *ánh xạ KKM* nếu với mọi tập con hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset D$ và $x \in co\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, tồn tại $t_j \in \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ sao cho $x \in F(t_j)$.

Định nghĩa 1.2.13. 1) Cho $F : K \times D \times D \to 2^X, Q : D \times D \to 2^K$ là các ánh xạ đa trị. Ta nói rằng ánh xạ F là *Q- KKM* nếu với mọi tập hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset D$ và $x \in co\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, tồn tại $t_j \in \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ sao cho $0 \in F(y, x, t_j)$, với mọi $y \in Q(x, t_j)$;

2) Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên $K \times D$. Ta nói quan hệ $\mathcal{R}$ là *quan hệ đóng* nếu với mọi dãy suy rộng (y_α, x_α) hội tụ tới (y, x) và $\mathcal{R}(y_\alpha, x_\alpha)$ xảy ra với mọi α thì $\mathcal{R}(y, x)$ xảy ra;

3) Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ ba ngôi trên $K \times D \times D$. Ta nói $\mathcal{R}$ là *quan hệ Q-KKM* nếu với mọi tập hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset D$ và $x \in co\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, tồn tại $t_j \in \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ sao cho $\mathcal{R}(y, x, t_j)$ xảy ra, với mọi $y \in Q(x, t_j)$.

Nhận xét.

i) Nếu F là ánh xạ Q-KKM thì $0 \in F(y, x, x)$ với mọi $y \in Q(x, x)$.

ii) Ta định nghĩa ánh xạ $G : D \to 2^D$,

$$G(t) = \{x \in D | 0 \in F(y, x, t) \text{ với mọi } y \in Q(x, t)\}.$$

Khi đó F là ánh xạ Q-KKM nếu và chỉ nếu G là ánh xạ KKM.

Ví dụ 1.2.6. Cho D là tập hợp con trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương X với đối ngẫu X^*, K là tập con của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương $Z, Q : D \times D \to K$ tùy ý. $T : K \times D \to X^*$ là ánh xạ đơn trị. Ta dễ dàng chỉ ra rằng, ánh xạ đơn trị $F : K \times D \times D \to \mathbb{R}$, $F(y, x, t) = \langle T(y, x), x - t\rangle,\ x, t \in D, y \in K$, là Q-KKM. Hơn vậy, nếu ta định nghĩa quan hệ ba ngôi $\mathcal{R}(y, x, t)$ nếu và chỉ nếu $0 \in F(y, x, t)$. Ta chứng minh được rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ Q-KKM.

1.2.5. Một số định lý điểm bất động

Năm 1912, Brouwer đã chứng minh rằng, mọi ánh xạ liên tục từ một hình cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{R}^n$ vào chính nó có điểm bất động. Năm 1922, Banach đã chứng minh Nguyên lý ánh xạ co chỉ ra sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ co. Hơn nữa, ông còn xây dựng được dãy lặp hội tụ tới điểm bất động đó. Năm 1941, Kakutani, nhà toán học Nhật Bản, đã đưa ra kết quả về điểm bất động của ánh xạ đa trị nửa liên tục trên trong không gian hữu hạn chiều. Sau đó, năm 1952, Ky Fan đã mở rộng kết quả trên trong không gian lồi địa phương Hausdorff. Trong chứng minh của các kết quả trong các chương tiếp theo, ta sử dụng các định lý sau.

Định lý 1.2.1. (Định lý điểm bất động Ky Fan [18]) *Cho D là một tập con lồi, compắc trong không gian lồi địa phương Hausdorff X, ánh xạ $F : D \to 2^D$ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng, lồi, đóng. Khi đó F có điểm bất động.*

Định lý 1.2.2. (Bổ đề Fan-KKM [19]) *Giả sử D là tập con không rỗng của không gian tôpô tuyến tính X, $F : D \to 2^X$ là ánh xạ KKM với giá trị đóng. Nếu tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $F(x_0)$ là tập compắc trong X thì*

$$\bigcap_{x\in D} F(x) \neq \emptyset.$$

Định lý 1.2.3. (Định lý điểm bất động Fan-Browder [11]) *Cho D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian lồi địa phương Hausdorff X và $F : D \to 2^D$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn các điều kiện sau đây:*

i) Với $x \in D$, $F(x)$ là tập không rỗng và lồi trong D;

ii) Với $y \in D, F^{-1}(y)$ là tập mở trong D.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

Sau đây là một dạng tương đương của Định lý Fan-Browder.

Định lý 1.2.4. ([54]) *Cho D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian lồi địa phương Hausdorff X và $F : D \to 2^D$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn các điều kiện sau đây:*

i) Với $x \in D, x \notin F(x)$ và $F(x)$ là tập lồi;

ii) Với $y \in D, F^{-1}(y)$ là tập mở trong D.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $F(\bar{x}) = \emptyset$.

Định lý 1.2.5. ([46]) *Cho D, K tương ứng là tập con lồi compắc không rỗng trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Y. Cho các ánh xạ $S : D \times K \to 2^D, H : D \times K \to 2^K, M : D \to 2^D$. Giả thiết các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) S là ánh xạ đa trị với giá trị lồi không rỗng và có các nghịch ảnh mở;

ii) H là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị lồi đóng không rỗng và tập $A = \{(x, y) \mid x \in S(x, y), y \in H(x, y)\}$ *là tập đóng;*

iii) M có nghịch ảnh mở và với mọi $x \in D, x \notin coM(x)$.

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *với* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in H(\bar{x}, \bar{y})$ *và* $S(\bar{x}, \bar{y}) \cap M(\bar{x}) = \emptyset$.

Chương 2
BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG TỔNG QUÁT

Trong chương này, ta sẽ giới thiệu các bài toán tựa cân bằng tổng quát liên quan tới các ánh xạ đa trị. Sau đó, ta sẽ tìm những điều kiện đủ để các bài toán này có nghiệm. Ta sẽ chỉ ra rằng, phần lớn các bài toán trong lý thuyết tối ưu đa trị như các bài toán tối ưu véctơ đa trị, bao hàm thức biến phân đa trị, các bài toán tựa cân bằng đa trị loại 1 và loại 2, đều có thể đưa được về một trong các dạng của các bài toán tựa cân bằng tổng quát. Như vậy, các bài toán tựa cân bằng tổng quát dưới đây sẽ cho ta cách nhìn các bài toán trong lý thuyết tối ưu véctơ một cách nhất quán. Từ kết quả về sự tồn tại nghiệm cho các loại bài toán này sẽ cho ta những kết quả mới cho các bài toán liên quan trong lý thuyết tối ưu véctơ đa trị.

2.1 Đặt bài toán

Cho X, Z và Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $D \subset X, K \subset Z$ là các tập con không rỗng. Cho các ánh xạ $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, P_1 : D \to 2^D, P_2 : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$ và $F_1 : K \times D \times D \times D \to 2^Y, F : K \times D \times D \to 2^Y$, ta xét các bài toán sau:

1. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

2) $0 \in F_1(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, z)$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1.*

2. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

1) $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$,

2) $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2.*

3. Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

2) $0 \in F_1(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}, z)$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})$,

3) $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

Bài toán này được gọi là *bài toán tựa cân bằng tổng quát hỗn hợp.*

Trong các bài toán trên, ta gọi các ánh xạ S, T, P_1, P_2 và Q là các ràng buộc, F_1 và F được gọi là các ánh xạ mục tiêu, chúng có thể là các đẳng thức, bất đẳng thức, các bao hàm thức, bất bao hàm thức, tương giao của các ánh xạ đa trị, hoặc các quan hệ trong các không gian tích. Các bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 1 và loại hỗn hợp đã được nghiên cứu chi tiết trong luận án của TS Trương Thị Thùy Dương. Trong chương này, chúng tôi chủ yếu nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2. Các ví dụ dưới đây cho thấy sự mở rộng của bài toán trên đối với các bài toán tối ưu đa trị đã biết.

2.2 Các bài toán liên quan

Dưới đây ta chỉ ra rằng nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu có liên quan mật thiết tới các loại bài toán này.

1. Bài toán tựa cân bằng vô hướng

Cho $D, K, P_i, i = 1, 2, Q$ như trên, $\mathbb{R}(\mathbb{R}_+)$ là không gian các số thực (số thực không âm) và $\Phi : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn $\Phi(y, x, x) = 0$, với mọi $y \in K, x \in D$. Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 được phát biểu: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in \Phi(y, \bar{x}, t) - \mathbb{R}_+ \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Đó chính là bài toán tựa cân bằng đã quen biết: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$\Phi(y, \bar{x}, t) \geq 0 \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Bài toán này đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả (xem [20], [25], [38], [45] và nhiều tài liệu khác).

2. Bài toán bất đẳng thức tựa biến phân Minty

Cho $\langle .,. \rangle : X \times Z \to \mathbb{R}$ là hàm song tuyến tính. Bài toán tựa biến phân Minty được phát biểu: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và $\langle y, t - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$. Đặt $F(y, x, t) = \langle y, t - x \rangle - \mathbb{R}_+$, bài toán trên trở thành bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2: Tìm $\bar{x} \in D$ để $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.

3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại 2

Cho $D, K, Y, P_i, i = 1, 2$, và Q như phần đầu chương. Ánh xạ nón $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$, các ánh xạ đa trị G và H từ $K \times D \times D$ vào Y. Bài toán : Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$G(y, \bar{x}, t) \subseteq H(y, \bar{x}, \bar{x}) + \mathcal{C}(y, \bar{x}) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t),$$

$$(G(y, \bar{x}, t) \cap (H(y, \bar{x}, \bar{x}) + \mathcal{C}(y, \bar{x})) \neq \emptyset \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t)),$$

được gọi là bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên (tương ứng, dưới) loại 2 và được nghiên cứu trong các công trình [38], [40], [41].

Ta định nghĩa các ánh xạ $M : K \times D \to 2^X$, $F : K \times D \times D \to 2^Y$,

$$\begin{aligned} M(y, x) &= \{t \in D \mid G(y, x, t) \subseteq H(y, x, x) + \mathcal{C}(y, x)\},\ (y, x) \in K \times D \\ \text{và } F(y, x, t) &= t - M(y, x),\ (y, x, t) \in K \times D \times D. \end{aligned}$$

Khi đó, bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 có thể phát biểu: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$.
Điều này cũng có nghĩa là

$$G(y, \bar{x}, t) \subseteq H(y, \bar{x}, \bar{x}) + \mathcal{C}(y, \bar{x}) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Đó chính là bài toán bao hàm thức tựa biến phân Minty đã được nghiên cứu trong [38], [40], [41] và nhiều tài liệu khác. Tương tự, ta cũng làm cho bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới loại 2.

4. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng loại 2

Cho $D, K, Y, P_i, i = 1, 2,$ và Q như phần đầu chương. Ánh xạ nón $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$, các ánh xạ đa trị $G : K \times D \times D \to 2^Y$. Bài toán : Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$G(y, \bar{x}, t) \subseteq \mathcal{C}(y, \bar{x}) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t),$$

$$(G(y, \bar{x}, t) \cap \mathcal{C}(y, \bar{x})) \neq \emptyset \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t)),$$

được gọi là bài toán tựa cân bằng lý tưởng trên (tương ứng, dưới) loại 2 và được nghiên cứu trong các công trình [38], [40], [41]. Giống như bài toán bao hàm thức tựa biến phân loại 2, bài toán này cũng là trường hợp riêng của bài toán tựa cân bằng tổng quát.

5. Bài toán tựa quan hệ biến phân tổng quát loại 2

Cho $D, K, P_i, i = 1, 2, Q$ như trên. Cho $\mathcal{R}(y, x, t)$ là một quan hệ giữa $y \in K, x \in D$ và $t \in D$. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$\mathcal{R}(y, \bar{x}, t) \text{ xảy ra với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t),$$

được gọi là bài toán quan hệ tựa biến phân, được giới thiệu và nghiên cứu đầu tiên trong [38].

Ta định nghĩa ánh xạ $M : K \times D \to 2^X, F : K \times D \times D \to 2^Y$,

$$M(y, x) = \{t \in D \mid \mathcal{R}(y, x, t) \text{ xảy ra}\}$$
$$\text{và } F(y, x, t) = t - M(y, x),\ (y, x, t) \in K \times D \times D.$$

Bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t),$$

hay $t \in M(y, \bar{x})$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x}, t)$. Đây chính là bài toán tựa quan hệ biến phân đã phát biểu ở trên. Ngoài ra, bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 cũng có thể đưa về bài toán tựa quan hệ biến phân tổng quát loại 2 bằng cách đặt quan hệ $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R}(y, x, t) \text{ xảy ra khi } 0 \in F(y, x, t), (y, x, t) \in K \times D \times D.$$

Như vậy hai bài toán này tương đương.

6. Bao hàm thức vi phân

$C[a,b]$ và $C^1[a,b]$ lần lượt là không gian các hàm liên tục và khả vi liên tục trên đoạn $[a,b]$, $D \subset C^1[a,b]$ không rỗng. Cho P_1, P_2 như trên. Cho $\Omega \neq \emptyset$ và $U : D \times D \to 2^{\Omega}$ là ánh xạ đa trị. Tập $K = \Omega \times \mathbb{R}$ và ánh xạ $Q : D \times D \to 2^K$ xác định bởi $Q(x,t) = U(x,t) \times [a,b]$. Cho ánh xạ đa trị $G : K \times D \times D \to 2^{C[a,b]}$. Bài toán tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$\bar{x}'(t) \in G(y,\xi,\bar{x},t) \text{với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } (y,\xi) \in Q(\bar{x},t),$$

được gọi là bài toán bao hàm thức vi phân và đã được nghiên cứu trong tài liệu [21]. Ta đặt $F(y,\xi,x,t) = x'(t) - G(y,\xi,x,t)$ với x' là đạo hàm của x. Bài toán trên trở thành: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y,\xi,\bar{x},t) \text{ với mọi } \ t \in P_2(\bar{x}) \ \text{ và } \ (y,\xi) \in Q(\bar{x},t).$$

7. Bài toán điều khiển tối ưu

Cho Ω là miền mở, giới nội trong $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, với biên Γ thuộc lớp C^1. Ta xét bài toán: Tìm hàm điều khiển $u \in L^p(\Omega), 1 < p < +\infty$ và trạng thái tương ứng $y \in W^{1,r}(\Omega)$ làm cực tiểu hàm mục tiêu

$$J(y,u) = \int\limits_{\Omega} L(x,y(x),u(x))dx \tag{2.1}$$

với các phương trình trạng thái

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_j\left(\left(a_{\text{ij}}(x)\right).D_i y\right) + h(x,y) = u \text{ trong } \Omega, y = 0 \text{ trên } \Gamma \tag{2.2}$$

và với một trong các ràng buộc sau:

1). Loại 1: *Ràng buộc hỗn hợp*

$$g_i\left(x,y(x),u(x)\right) \leq 0, \text{ h.k.n}, \ x \in \Omega, i = 1,2,...,n; \tag{2.3}$$

2). Loại 2: *Ràng buộc thuần nhất*

$$\begin{aligned} &g(x,y(x)) \leq 0 \text{ với mọi } x \in \Omega, \\ &u(x) \in U, \ \text{h.k.n}, \ x \in \Omega; \end{aligned} \tag{2.4}$$

3). Loại 3: *Ràng buộc thuần nhất và hỗn hợp*

$$\begin{aligned} &g(x, y(x)) \le 0 \text{ với mọi } x \in \Omega, \\ &f_i(x, y(x), u(x)) \le 0, \text{ h.k.n, } x \in \Omega, i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ta định nghĩa ánh xạ $K(y,u) = Ay + h(.,y) - u$, $G_i(y,u) = g_i(.,y,u)$. Khi $g_i(.,y,u) \in C(\bar{\Omega})$, ta có thể định nghĩa ánh xạ

$$\phi_i(y,u) = \max_{x \in \Omega} g_i(x, y(x), u(x)).$$

Bài toán (2.1)-(2.3) qui về bài toán

$$\begin{aligned} &\min J(y,u), \\ &\text{với ràng buộc } K(y,u) = 0 \text{ và } \phi_i(y,u) \le 0, i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Ta đặt

$$\begin{aligned} F(y,u,z,w) &= J(y,u) - J(z,w) + \mathbb{R}_+, \\ G(y,u,z,w) &= \left(K(y,u), \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(y,u) - \mathbb{R}_+ \right). \end{aligned}$$

Bài toán trên tương đương với bài toán: Tìm $(\bar{y}, \bar{u}) \in W_0^{1,r}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ sao cho

$$0 \in F(\bar{y}, \bar{u}, z, w) \times \left(K(y,u), \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(y,u) - \mathbb{R}_+ \right).$$

Tức là

$$\begin{aligned} J(\bar{y}, \bar{u}) &\le J(z,w) \text{ với mọi } (z,w) \in W_0^{1,r}(\Omega) \times L^p(\Omega); \\ K(\bar{y}, \bar{u}) &= 0, \\ \Phi_i(\bar{y}, \bar{u}) &\le 0, i = 1, 2, ..., m. \end{aligned}$$

Bài toán này đã được tác giả Bùi Trọng Kiên nghiên cứu trong [28].

8. Bài toán tựa cân bằng Nash trong trò chơi chiến lược không hợp tác

Cho $X_i, i \in I, Y$ là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. I là tập chỉ số hữu hạn (được gọi là tập các người chơi). $C \subseteq Y$ là nón lồi, đóng, nhọn. Với mỗi $i \in I$, cho $D_i \subseteq X_i$ là tập không rỗng (được gọi là tập chiến lược của người chơi thứ i). Đặt

$$D = \prod_{i=1}^{n} D_i.$$

Với mỗi $i \in I$, ánh xạ đa trị $S_i^j : D \to 2^{D_i}, j = 1, 2$ là ánh xạ ràng buộc của người chơi thứ i. Hàm $f_i : D \to Y$ được gọi là hàm thua thiệt của người chơi thứ i. Hàm này phụ thuộc vào chiến lược của tất cả các người chơi, với $x = (x_i)_{i \in I} \in D$, ta kí hiệu $x^i = (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$.

Điểm $\bar{x} = (\overline{x_i})_{i \in I}$ được gọi là điểm cân bằng Pareto của mô hình trò chơi Nash $(D_i, f_i, S_i^1, S_i^2)_{i \in I}$ nếu với mọi $i \in I$ ta có $\overline{x_i} \in S_i^1(\bar{x})$ và

$$f_i(\overline{x^i}, y_i) - f_i(\bar{x}) \notin -(C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } y_i \in S_i^2(\bar{x}), i \in I.$$

Ta đặt $G : D \times D \to Y, M : D \to 2^D, F : D \times D \to 2^Y$,

$$G(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \left(x^i, t_i \right) - f_i (x) \right),$$

$M(x) = \{t \in D \mid G(x, t) \notin -(C \setminus \{0\})\}$ và $F(x, t) = t - M(x), (t, x) \in D \times D$. Nếu tồn tại $\bar{x}$, với

$$\bar{x} \in S^1(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} S_i^1(\bar{x}) \text{ và } \quad 0 \in F(\bar{x}, t) \text{ với mọi } t_i \in S_i^2(\bar{x}), i \in I,$$

thì ta có

$$\overline{x_i} \in S_i^1(\bar{x}), i = 1, 2, ..., n \text{ và } G(\bar{x}, t) \notin -(C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } y_i \in S_i^2(\bar{x}), i \in I.$$

Từ đó, ta suy ra

$$\overline{x_i} \in S_i^1(\bar{x}) \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} (f_i(\bar{x}^i, t_i) - f_i(\bar{x})) \notin -(C \setminus \{0\}).$$

Lần lượt thay $t = (\bar{x}^i, t_i) \in S^2(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} S_i^2(\bar{x}), i = 1, 2, ..., n$, ta suy ra

$$f_i(\bar{x}^i, t_i) \notin f_i(\bar{x}) - (C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t_i \in S_i^2(\bar{x}),$$

tức là $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ là điểm cân bằng Pareto của mô hình trò chơi Nash. Mô hình cân bằng kinh tế Pareto này đã được Nguyễn Xuân Tấn và Phan Nhật Tĩnh mở rộng trong bài báo [49] từ mô hình trò chơi không hợp tác của J. Nash [43].

2.3 Sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2

Trong mục này ta đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2. Từ kết quả dưới đây ta cũng thu được các kết quả cho các bài toán liên quan.

Định lý 2.3.1. *Các điều kiện sau là đủ để bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 có nghiệm:*

i) D là tập con không rỗng lồi compắc;

ii) Ánh xạ đa trị $P_1 : D \to 2^D$ có tập điểm bất động $D_0 = \{x \in D |\ x \in P_1(x)\}$ đóng, không rỗng trong D;

iii) Ánh xạ đa trị $P_2 : D \to 2^D$ có $P_2(x) \neq \emptyset, P_2^{-1}(x)$ mở và bao lồi co$P_2(x)$ chứa trong $P_1(x)$ với mọi $x \in D$;

iv) Với mỗi $t \in D$ cố định, tập

$$B = \{x \in D |\ 0 \notin F(y, x, t) \text{ với } y \in Q(x, t) \text{ nào đó}\}$$

là mở trong D;

v) $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị Q-KKM.

Chứng minh. Ta định nghĩa ánh xạ đa trị $M : D \to 2^D$,

$$M(x) = \{t \in D| \quad 0 \notin F(y, x, t) \text{ với } y \in Q(x, t) \text{ nào đó }\}.$$

Ta thấy rằng nếu có $\bar{x} \in D, \bar{x} \in P_1(\bar{x})$, mà $M(\bar{x}) \cap P_2(\bar{x}) = \emptyset$, thì

$$0 \in F(y, \bar{x}, t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t),$$

khi đó định lý được chứng minh. Sau đây ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại một điểm $\bar{x}$ như vậy bằng phương pháp phản chứng. Ta giả sử ngược lại, với mọi $x \in P_1(x)$, đều suy ra rằng $M(x) \cap P_2(x) \neq \emptyset$, từ đó ta cũng có $\text{co}M(x) \cap \text{co}P_2(x) \neq \emptyset, P_2(x) \neq \emptyset$. Ta định nghĩa ánh xạ đa trị $H : D \to 2^D$ với

$$H(x) = \begin{cases} \text{co}M(x) \cap \text{co}P_2(x), & \text{nếu } x \in P_1(x), \\ \text{co}P_2(x), & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Ta sẽ chứng tỏ H thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.2.4. Thật vậy, do $H(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$ nên $D = \bigcup_{x\in D} H^{-1}(x)$. Hơn nữa,

$$H^{-1}(x) = \left((coM)^{-1}(x) \cap (coP_2)^{-1}(x)\right) \cup \left((P_2^{-1}(x) \cap (D \setminus D_0)\right),$$

với $D_0 = \{x \in D : x \in P_1(x)\}$ là tập con đóng trong D. Vì vậy, $H^{-1}(x)$ là tập mở trong D với mọi $x \in D$.

Ngoài ra, nếu tồn tại điểm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in H(\bar{x}) = coM(\bar{x}) \cap coP_2(\bar{x})$, thì ta có thể tìm được $t_1, t_2, ..., t_n \in M(\bar{x})$ để $\bar{x} = \sum_1^n \alpha_i t_i, \alpha_i \geq 0, \sum_1^n \alpha_i = 1$. Từ định nghĩa của M, ta có $0 \notin F(y, x, t_i)$ với $y \in Q(x, t_i)$ nào đó, với $i = 1, 2, ..., n$.

Mặt khác, từ giả thiết F là ánh xạ $Q-$KKM, tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$, sao cho $0 \in F(y, x, t_j)$ với mọi $y \in Q(x, t_j)$, và ta có mâu thuẫn. Như vậy, với mọi $x \in D, x \notin H(x)$.

Từ đây, áp dụng Định lý 1.2.4, ta tìm được $\bar{x} \in D$ sao cho $H(\bar{x}) = \emptyset$. Nếu $\bar{x} \notin P_1(\bar{x})$, thì $H(\bar{x}) = \text{co}P_2(\bar{x}) = \emptyset$, điều này không xảy ra. Nghĩa là, ta có $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và $H(\bar{x}) = coM(\bar{x}) \cap coP_2(\bar{x}) = \emptyset$. Từ mâu thuẫn này, định lý được chứng minh. □

Ví dụ. Xét bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 với $X = Y = Z$ là các không gian thực với các tập con $D = K = [0, 1], P_1(x) = Q(x, t) = [0, 1]$, ánh xạ đa trị $F : K \times D \times D \to 2^Y$, với

$$F(y, x, t) = \begin{cases} [0, 1], \text{khi}\, t \geq x, \\ [\text{x}, 1], \text{khi t} < \text{x}. \end{cases}$$

Ta thấy, các điều kiện (trong Định lý 2.3.1) đặt lên các không gian và ánh xạ đều được thỏa mãn. Bài toán có nghiệm duy nhất. Giảm nhẹ điều kiện cho ánh xạ P_2, bài toán trên vẫn có nghiệm. Ta có định lý sau.

Định lý 2.3.2. *Nếu ta có các điều kiện:*

i) D là tập con không rỗng lồi compắc;

ii) Ánh xạ $P_1 : D \to 2^D$ là ánh xạ đóng và có tập điểm bất động D_0 khác rỗng;

iii) Ánh xạ P_2 nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng và với mỗi $x \in D$, $P_1(x)$ chứa $coP_2(x)$;

iv) Với mỗi $t \in D$ cố định, tập hợp

$$B = \big\{x \in D|\ 0 \notin F(y,x,t) \text{ với } y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\big\} \text{ mở trong } D;$$

v) $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ $Q - KKM$,

thì bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 có nghiệm.

Chứng minh. Gọi $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận lồi đóng của gốc trong không gian X. Với mọi $U \in \mathcal{U}$, ta định nghĩa các ánh xạ đa trị $P_{1U}, P_{2U} : D \to 2^D$ xác định bởi

$$P_{iU}(x) = (P_i(x) + U) \cap D, i = 1, 2, x \in D.$$

Ta chứng minh $P_{2U}^{-1}(t)$ mở với mọi $t \in D$. Thật vậy, lấy tùy ý $x \in P_{2U}^{-1}(t)$, suy ra $t \in P_{2U}(x) \subset P_1(x) + U$. Từ đó, tồn tại $z \in P_2(x), u \in U$ sao cho $z = t + u$, ta suy ra $x \in P_2^{-1}(z)$. Do $P_2^{-1}(z)$ mở nên tồn tại lân cận U_x của x, $U_x \subset P_2^{-1}(z)$ và $z \in P_2(U_x)$ hay $z + u \in P_2(x') + U, \forall x' \in U_x$ hay $t = z + u \in P_{2U}(x')$. Từ đó, $x' \in P_{2U}^{-1}(t)$, với mọi $x' \in U_x$ hay $P_{2U}^{-1}(t)$ mở.

Ta thấy tập $D_{0U} = Fix(P_{1U})$ khác rỗng (do tồn tại $x \in D_0$ nên $x \in P_1(x) \subset (P_1(x) + U) \cap D = P_{1U}(x)$). Giả sử rằng $(y_\alpha, x_\alpha) \to (y, x), y_\alpha \in P_{1U}(x_\alpha) \subset (P_1(x_\alpha) + U)$. Do D compact, ta có thể giả sử $p_\alpha \in P(x_\alpha), u_\alpha \in U, p_\alpha \to p, u_\alpha \to u, y_\alpha = p_\alpha + u_\alpha$, từ đó, $y = p + u$. Tính đóng của P_1 suy ra $x \in P_1(x)$, U là tập đóng nên $u \in U$. Từ đó $y \in P_{1U}(x)$, hay P_{1U} là ánh xạ đóng, suy ra D_{0U} là tập đóng.

Ngoài ra, bao lồi $coP_{2U}(x) \subset coP_2(x) + coU = P_1(x) + U = P_{1U}(x)$, với mọi $x \in D$. Vì vậy, P_{1U}, P_{2U}, Q và F thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.3.1, cho nên tồn tại $\bar{x}_U \in D$ để $\bar{x}_U \in P_{1U}(\bar{x}_U)$ và

$$0 \in F(y, \bar{x}_U, t) \text{ với mọi } \ t \in P_{2U}(\bar{x}_U) \text{ và } \ y \in Q(\bar{x}_U, t).$$

Đặt ánh xạ $M : D \to 2^D$,

$$M(x) = \{t \in D|0 \notin F(y,x,t) \text{ với } \ y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\}.$$

Khi đó

$$M^{-1}(t) = \{t \in D|0 \notin F(y,x,t) \text{ với } \ y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\}$$

là tập mở trong D với mọi $t \in D$. Cùng với $P_{2U}^{-1}(t)$ mở trong D với mọi $t \in D$, ta có ánh xạ $M \cap P_{2U}$ có nghịch ảnh mở do đó nửa liên tục dưới. Từ đó, ta chứng minh tập $M_U = D_{0U} \cap \{x \in D : M(x) \cap P_{2U}(x) = \emptyset\}$ đóng trong D. Thật vậy, giả sử $x_\alpha \in M_U, M(x_\alpha) \cap P_{2U}(x_\alpha) = \emptyset, x_\alpha \to x$. Nếu $M(x) \cap P_{2U}(x) = \emptyset$, tồn tại $t \in M(x) \cap P_{2U}(x)$, V_t là lân cận của t sao cho $V_t \cap H(x) \neq \emptyset$. Từ đó, tồn tại α_0, sao cho $(M(x_\alpha) \cap P_{2U}(x_\alpha)) \cap V_t \neq \emptyset$, suy ra $(M(x_\alpha) \cap P_{2U}(x_\alpha)) \neq \emptyset$, mâu thuẫn.

Như vậy, $\{M_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ là họ giảm dần các tập con không rỗng compact nên chúng có điểm chung duy nhất $\bar{x} \in D$. Ta có, $\bar{x} \in D_{0U}$, với mọi $U \in \mathcal{U}$ và $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$.

Mặt khác, từ $\bar{x} \in D_{0U}$ với mọi $U \in \mathcal{U}$ suy ra $\bar{x} \in P_1(\bar{x}) + U$ với mọi $U \in \mathcal{U}$. Giả sử $\bar{x} = p_U + u, p_U \in P_1(\bar{x}), u \in U$. Khi U thắt dần, $p_U \to p, p \in P_1(\bar{x})$ do $P_1(\bar{x})$ là tập đóng, $u \to 0$, từ đó $\bar{x} = p \in P_1(\bar{x})$. □

Hệ quả 2.3.1. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) D là các tập không rỗng, lồi và compắc;

ii) P là ánh xạ đa trị liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng;

iii) Với $t \in D$, tập $B = \{x \in D |\ 0 \notin F(y, x, t)$ với $y \in Q(x, t)$ nào đó$\}$ mở trong D;

iv) $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị Q-KKM.

Khi đó, bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 với $P_1 = P_2 = P$ có nghiệm.

Chứng minh. Hệ quả được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.3.1 và Định lý 2.3.2 với $P = P_1 = P_2$. □

Trong mục tiếp theo, ta áp dụng các định lý trên để đưa ra sự tồn tại nghiệm của một số bài toán quen biết trong lý thuyết tối ưu.

2.4 Sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan

2.4.1. Bài toán tựa quan hệ biến phân

Từ Định lý 2.3.1, ta suy ra kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tựa quan hệ biến phân, bài toán này đã được nghiên cứu bởi Đinh Thế Lục ([37]).

Hệ quả 2.4.1. *Cho D, K, P_1, P_2 như trong Định lý 2.3.1, ánh xạ $Q(., t)$ nửa liên tục dưới với mỗi $t \in D$. Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ giữa các phần tử $y \in K, x \in D, t \in D$. Giả sử:*

i) Với $t \in D$, quan hệ $R(., ., t)$ giữa các phần tử $y \in K, x \in D$ là quan hệ đóng;

ii) $\mathcal{R}$ là quan hệ Q- KKM.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$\mathcal{R}(y, \bar{x}, t) \text{ xảy ra với mọi } \ t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Ta định nghĩa các ánh xạ đa trị M, F,

$$M : K \times D \to 2^X,\ M(y, x) = \{t \in D |\ \mathcal{R}(y, x, t) \ \text{ xảy ra}\} \text{ và}$$
$$F : K \times D \times D \to 2^Y,\ F(y, x, t) = t - M(y, x),\ (y, x, t) \in K \times D \times D.$$

Với mỗi $t \in D$ cố định, ta có

$$\begin{aligned} A &= \{x \in D |\ \mathcal{R}(y, x, t) \text{ xảy ra với mọi } y \in Q(x, t)\} \\ &= \{x \in D |\ 0 \in F(y, x, t) \text{ với mọi } y \in Q(x, t)\}. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tập hợp A đóng trong D, khi đó, tập hợp

$$B = D \setminus A = \{x \in D |\ 0 \notin F(y, x, t),\ \text{ với } y \in Q(x, t) \text{ nào đó}\}$$

là mở trong D. Thật vậy, giả sử lưới $\{x_\alpha\} \subset A$ và $x_\alpha \to x$. Lấy tùy ý $y \in Q(x, t)$. Từ $Q(., t)$ nửa liên tục dưới và $x_\alpha \to x$ tồn tại lưới $\{y_\alpha\}, y_\alpha \in Q(x_\alpha, t)$ sao cho $y_\alpha \to y$. Khi đó $\mathcal{R}(y_\alpha, x_\alpha, t)$ xảy ra, với mọi α. Do $\mathcal{R}$ là quan hệ đóng, $(y_\alpha, x_\alpha) \to (y, x)$, nên $\mathcal{R}(y, x, t)$ xảy ra, với mọi $y \in Q(x, t)$ và do đó $x \in A$, tức A đóng.

Hơn nữa, từ quan hệ $\mathcal{R}$ là Q-KKM, ta suy ra ánh xạ F cũng là Q-KKM. Áp dụng Định lý 2.3.1 ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$\mathcal{R}(y, \bar{x}, t) \text{ xảy ra, với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

□

2.4.2. Bài toán tựa cân bằng vô hướng

Kết quả dưới đây được chứng minh trực tiếp từ Định lý 2.3.1 và nó cũng chính là kết quả của Nguyễn Xuân Tấn và Đinh Thế Lục đã công bố trong [38].

Hệ quả 2.4.2. *Cho D, K, P_1, P_2 như trong Định lý 2.3.1, ánh xạ $Q(.,t)$ nửa liên tục dưới với mỗi $t \in D$. Cho ánh xạ $\Phi : K \times D \times D \to \mathbb{R}$ là hàm thực $(Q, \mathbb{R}_+)-$ giống tựa lồi theo đường chéo đối với biến thứ ba và $\Phi(y,x,x) = 0$ với mọi $y \in K, x \in D$. Hơn nữa, giả thiết rằng, với $t \in D$, $\Phi(.,.,t) : K \times D \to \mathbb{R}$ là hàm nửa liên tục trên. Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ để $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và*

$$\Phi(y, \bar{x}, t) \geq 0 \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Đặt $F(y,x,t) = \Phi(y,x,t) - \mathbb{R}_+$, với mọi $(y,x,t) \in K \times D \times D$. Ta có thể chứng minh rằng, với $t \in D$, tập

$$\begin{aligned} B = \ & \{x \in D | \ 0 \notin F(y,x,t) \text{ với } y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\} \\ = \ & \{x \in D | \ \Phi(y,x,t) < 0 \text{ với } y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\} \end{aligned}$$

là tập mở trong D. Thật vậy, ta sẽ chứng tỏ rằng tập $D \backslash B = \{x \in D | \, \Phi(y,x,t) \geq 0 \text{ với mọi } y \in Q(x,t)\}$ đóng. Giả sử dãy $\{x_\alpha\} \subset D \backslash B, x_\alpha \to x$. Khi đó

$$\Phi(y, x_\alpha, t) \geq 0, \text{ với mọi } y \in Q(x_\alpha, t).$$

Do ánh xạ $Q(.,t)$ nửa liên tục dưới nên tồn tại dãy $\{y_\alpha\} \subset D, y_\alpha \in Q(x_\alpha, t), y_\alpha \to y$. Như vậy $\Phi(y_\alpha, x_\alpha, t) \leq 0, (y_\alpha, x_\alpha) \to (y, x)$. Mặt khác, từ ánh xạ $\Phi(.,.,t)$ là nửa liên tục trên, ta suy ra với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại α_0 sao cho $\Phi(y,x,t) \geq \Phi(y_\alpha, x_\alpha, t) - \epsilon$ với mọi $\alpha \geq \alpha_0$. Cho $\epsilon \to 0$, ta có $\Phi(y,x,t) \geq 0$. Như vậy $x \in D \backslash B$, tức B là tập mở.

Do Φ là hàm $(Q, \mathbb{R}_+)$-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ ba, nên với mọi tập hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset D, x \in co\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ để $\Phi(y, x, t_j) \in \Phi(y,x,x) + \mathbb{R}_+$ với mọi $y \in Q(x, t_j)$. Từ đó suy ra $\Phi(y,x,t_j) \geq 0$ và do vậy $0 \in F(y,x,t_j)$ với mọi $y \in Q(x,t_j)$, tức F là ánh xạ $Q-$ KKM từ $K \times D \times D$ vào $2^{\mathbb{R}}$. Như vậy, P_1, P_2, Q và F thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.3.1, vậy nên tồn tại điểm $\bar{x} \in D$ để

$$\begin{aligned} & \bar{x} \in P_1(\bar{x}) \\ \text{và } & 0 \in F(y, \bar{x}, t) \quad \text{với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t). \end{aligned}$$

Điều này tương đương với $\Phi(y,\bar{x},t) \geq 0$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x},t)$. □

2.4.3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng

Trong các hệ quả tiếp theo của các Mục 2.4.3 và 2.4.4, ta giả thiết C là nón lồi đóng trong Y. Từ Định lý 2.3.1, ta thu được một số kết quả về sự tồn tại nghiệm cho các loại bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên, dưới. Kết quả này suy ra các kết quả của Đinh Thế Lục và Nguyễn Xuân Tấn đã công bố trong [38].

Hệ quả 2.4.3. *Cho D, K, P_1, P_2 và Q như trong Hệ quả 2.4.2. Cho $G, H : K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị có giá trị compắc và $G(y,x,x) \subseteq H(y,x,x)+C$ với mọi $(y,x) \in K \times D$. Hơn nữa, giả sử:*

i) Với mỗi $t \in D$ cố định, ánh xạ $G(.,.,t) : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$–liên tục dưới và ánh xạ đa trị $N : K \times D \to 2^Y$, định nghĩa bởi $N(y,x) = H(y,x,x)$, là C–liên tục trên;

ii) Ánh xạ G là (Q,C)–giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ ba.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ để $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và $G(y,\bar{x},t) \subseteq H(y,\bar{x},\bar{x}) + C$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x},t)$.

Chứng minh. Ta định nghĩa các ánh xạ đa trị M, F, với

$$M : K \times D \to 2^X, M(y,x) = \{t \in D |\ G(y,x,t) \subseteq H(y,x,x) + C\},$$
$$F : K \times D \times D \to 2^D, F(y,x,t) = t - M(y,x),\ (y,x,t) \in K \times D \times D.$$

Với mỗi $t \in D$ cố định, ta có tập

$$\begin{aligned} A &= \{x \in D |\ 0 \in F(y,x,t) \text{ với mọi } y \in Q(x,t)\} \\ &= \{x \in D |\ t \in M(y,x) \text{ với mọi } y \in Q(x,t)\} \\ &= \{x \in D |\ G(y,x,t) \subseteq H(y,x,x) + C \text{ với mọi } y \in Q(x,t)\}. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng tập A đóng trong D. Thật vậy, giả sử dãy suy rộng $\{x_\alpha\} \subset A$ và $x_\alpha \to x$. Lấy tùy ý $y \in Q(x,t)$. Từ $Q(.,t)$ nửa liên tục dưới và $x_\alpha \to x$ tồn tại lưới $\{y_\alpha\}, y_\alpha \in Q(x_\alpha, t)$ sao cho $y_\alpha \to y$. Với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại chỉ số α_0 để cho với mọi $\alpha \geq \alpha_0$ các bao hàm thức sau xảy ra:

$$\begin{aligned} G(y,x,t) &\subseteq G(y_\alpha, x_\alpha, t) + V + C \subseteq H(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha) + V + C \\ &\subseteq H(y,x,x) + V + C. \end{aligned}$$

Điều này cùng với tính compắc của H suy ra

$$G(y,x,t) \subseteq H(y,x,x) + C, \text{ và do đó } x \in A.$$

Từ đây A là tập đóng trong D và ta suy ra

$$B = D \setminus A = \{x \in D |\ 0 \notin F(y,x,t) \text{ với } y \in Q(x,t) \text{ nào đó}\}$$

là tập mở trong D. Hơn nữa, từ $G(y,x,x) \subseteq H(y,x,x) + C$ với mọi $(y,x) \in K \times D$ và ánh xạ G là (Q,C)–giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ ba, ta có với mọi tập hữu hạn $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subseteq D, x \in co\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ tồn tại chỉ số $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho

$$G(y,x,t_j) \subseteq G(y,x,x) + C \subseteq H(y,x,x) + C \text{ với mọi } y \in Q(x,t_j).$$

Điều này kéo theo $0 \in F(y,x,t_j)$ với mọi $y \in Q(x,t_j)$ và khi đó F là ánh xạ Q–KKM. Áp dụng Định lý 2.3.1, ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$0 \in F(y,\bar{x},t) \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x},t).$$

Điều này tương đương với

$G(y,\bar{x},t) \subseteq H(y,\bar{x},\bar{x}) + C$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$ và $y \in Q(\bar{x},t)$. □

Tương tự, ta có kết quả sau, phần chứng minh tương tự như Hệ quả 2.4.3.

Hệ quả 2.4.4. *Cho D, K, P_1, P_2 và Q như trong Hệ quả 2.4.3. Các ánh xạ đa trị $G, H : K \times D \times D \to 2^Y$ có giá trị compắc và $H(y,x,x) \subseteq G(y,x,x) - C$ với mọi $(y,x) \in K \times D$. Hơn nữa, giả sử:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ đa trị $G(.,.,t) : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$–liên tục trên và ánh xạ đa trị $N : K \times D \to 2^Y$ xác định bởi $N(y,x) = H(y,x,x)$ là C–liên tục dưới;

ii) G là ánh xạ (Q, C)–giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ ba.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$H(y, \bar{x}, \bar{x}) \subseteq G(y, \bar{x}, t) - C \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

2.4.4. Bài toán tựa cân bằng lý tưởng

Các kết quả cho bài toán bao hàm thức tựa biến phân suy ra hai kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng lý tưởng trên và tựa cân bằng lý tưởng dưới.

Hệ quả 2.4.5. *Cho D, K, P_1, P_2 và Q như trong Hệ quả 2.4.3. Cho $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị compắc và $G(y, x, x) \subseteq C$, với mọi $(y, x) \in K \times D$. Ta giả sử:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ $G(., ., t) : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$–liên tục dưới.;

ii) Ánh xạ G là (Q, C)–giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ ba.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ để $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$$G(y, \bar{x}, t) \subseteq C \text{ với mọi } t \in P_2(\bar{x}) \text{ và } y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Ta đặt $H : K \times D \times D \to 2^Y$ như sau $H(y, x, t) = \{0\}$, với mọi $(y, x, t) \in K \times D \times D$. Ta dễ dàng nhận thấy rằng, mọi giả thiết của Hệ quả 2.4.3 đều thỏa mãn. Áp dụng hệ quả này ta có được điều cần chứng minh. □

Hệ quả 2.4.6. *Cho D, K, P_1, P_2 và Q như trong Hệ quả 2.4.3. Cho $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị compắc và $G(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$, với mọi $(y, x) \in K \times D$. Hơn nữa, giả sử:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ đa trị $G(., ., t) : K \times D \to 2^Y$ là $(-C)$–liên tục trên;

ii) G là ánh xạ (Q, C)–giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ ba.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ để $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$ và

$G(y, \bar{x}, t) \cap C \neq \emptyset$ *với mọi* $t \in P_2(\bar{x})$ *và* $y \in Q(\bar{x}, t)$.

Chứng minh. Ta đặt $H : K \times D \times D \to 2^Y$ như sau $H(y, x, t) = \{0\}$, $(y, x, t) \in K \times D \times D$. Ta dễ dàng nhận thấy rằng, mọi giả thiết của Hệ quả 2.4.4 đều thỏa mãn. Áp dụng hệ quả này ta có được điều cần chứng minh. $\square$

Chúng ta sẽ ứng dụng các kết quả về sự tồn tại nghiệm của các bài toán tựa cân bằng tổng quát để tìm nghiệm của bài toán tựa cân bằng Pareto và tựa cân bằng yếu. Gần đây các bài toán này đã được nghiên cứu rộng rãi dưới các dạng khác nhau (chẳng hạn, trong [14], [21], [33], [36], [40], [41]...).

2.4.5. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu

Trong mục này ta xét một số bài toán tựa cân bằng Pareto trên, dưới và tựa cân bằng yếu trên, dưới. Trong mục trên, ta đã xét các bài toán tựa cân bằng lý tưởng trên, dưới và đưa ra một số điều kiện đủ cho việc tồn tại nghiệm của chúng. Nhưng Ferro [22] đã chỉ ra rằng, đối với các ánh xạ đa trị, các khái niệm $\mathcal{C}$ -lồi và $\mathcal{C}$- giống như tựa lồi là hoàn toàn khác nhau. Dưới đây ta sẽ chỉ ra một số kết quả cho các bài toán tựa cân bằng Pareto đúng cho cả hai trường hợp $\mathcal{C}$-lồi và $\mathcal{C}$–giống như tựa lồi.

Trước hết chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về tính giả đơn điệu theo nón của ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 2.4.1. Cho $F : D \times D \to 2^Y, \mathcal{C} : D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị. Ta nói rằng:

i) F là *$\mathcal{C}$-giả đơn điệu mạnh trên* nếu với mỗi $(x, t) \in D \times D$,

$$F(t, x) \not\subseteq -(\mathcal{C}(t)\backslash\{0\}) \to F(x, t) \subseteq -\mathcal{C}(x).$$

ii) F là *$\mathcal{C}$-giả đơn điệu mạnh dưới* nếu với mỗi $(x, y) \in D \times D$,

$$F(t, x) \cap -(\mathcal{C}(t)\backslash\{0\}) = \emptyset \to F(x, t) \cap -\mathcal{C}(x) \neq \emptyset.$$

iii) F là *$\mathcal{C}$-giả đơn điệu yếu trên* nếu với mỗi $(x, y) \in D \times D$,

$$F(t, x) \not\subseteq (-\mathrm{int}\mathcal{C}(t)) \to F(x, t) \subseteq -\mathcal{C}(x).$$

iv) F là *$\mathcal{C}$-giả đơn điệu yếu dưới* nếu với mỗi $(x, y) \in D \times D$,

$$F(t, x) \cap (-\mathrm{int}\mathcal{C}(t)) = \emptyset \to F(x, t) \cap -\mathcal{C}(x) \neq \emptyset.$$

Các khái niệm ánh xạ đa trị $\mathcal{C}$-hemi liên tục trên (dưới) và $\mathcal{C}$-hemi liên tục lý tưởng trên (dưới) sau đây là mở rộng các khái niệm ánh xạ đơn trị $\mathcal{C}$-hemi liên tục đã được Bianchi và Pini giới thiệu trong [8] và sau đó là Hadjisavvas trong [25].

Định nghĩa 2.4.2. 1) Cho $F, \mathcal{C} : D \longrightarrow 2^Y$ là các ánh xạ đa trị. Ánh xạ F được gọi là *$\mathcal{C}$-hemi liên tục lý tưởng trên (dưới)* nếu với mọi $x, t \in D$, từ $F(\alpha x + (1-\alpha)t) \subseteq \mathcal{C}(\alpha x + (1-\alpha)t)$ với mọi $\alpha \in (0,1)$,
suy ra $F(t) \subseteq \mathcal{C}(t)$,
(tương ứng, từ $F(\alpha x + (1-\alpha)t) \cap \mathcal{C}(\alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset$ với mọi $\alpha \in (0,1)$, suy ra $F(t) \cap \mathcal{C}(t) \neq \emptyset$.

2) Cho $F, \mathcal{C} : D \longrightarrow 2^Y$ là các ánh xạ đa trị. Ánh xạ F được gọi là *$\mathcal{C}$-hemi liên tục trên (dưới)* nếu với mọi $x, t \in D$, từ $F(\alpha x + (1-\alpha)t) \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\alpha x + (1-\alpha)t)$ với mọi $\alpha \in (0,1)$, suy ra $F(t) \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(t)$
(tương ứng, từ $F(\alpha x+(1-\alpha)t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\alpha x+(1-\alpha)t) = \emptyset$ với mọi $\alpha \in (0,1)$, suy ra $F(t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(t) = \emptyset$.

3) F được gọi là *hemi liên tục trên (dưới)* nếu với mọi $x, t \in D$, ánh xạ $f : [0,1] \longrightarrow 2^Y$ định nghĩa bởi $f(\alpha) = F(\alpha x + (1-\alpha)t)$ là nửa liên tục trên (tương ứng, dưới).

Trong phần chứng minh sự tồn tại nghiệm của các bài toán đã nêu trên, ta cần sử dụng các kết quả sau đây, chúng là sự tổng quát hóa các Mệnh đề 2.3, 2.4 đã được đưa ra trong tài liệu [25].

Bổ đề 2.4.1. *Cho $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $F(y, x, x) \subseteq \mathcal{C}(y, x)$ với mọi $x \in D$ và $y \in K$. Hơn nữa, giả sử rằng:*

i) Với $x \in D, y \in K$, ánh xạ $F(y, ., x) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}(y, .)$-hemi liên tục lý tưởng trên;

ii) Với $y \in K$, ánh xạ $F(y, ., .))$ là $\mathcal{C}(y, .)$-giả đơn điệu mạnh dưới;

iii) Với $y \in K$ cố định, $F(y, ., .)$ là $\mathcal{C}(y, .)$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}(y, .)$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó với $t \in D, y \in K$ cố định, các mệnh đề sau tương đương:

1) $F(y,t,x) \cap -(\mathcal{C}(y,t)\backslash\{0\}) = \emptyset$ *với mọi* $x \in D$;

2) $F(y,x,t) \cap -\mathcal{C}(y,x) \neq \emptyset$ *với mọi* $x \in D$.

Chứng minh. Hiển nhiên *1)* $\Rightarrow$ *2)*, (suy trực tiếp từ định nghĩa ánh xạ $\mathcal{C}(y,.)$–giả đơn điệu mạnh dưới).

Bây giờ giả sử rằng *2)* xảy ra, ta có: Với mỗi $y \in D$,

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, t) \cap -\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset, \text{ với mọi } x \in D, \alpha \in (0,1].$$

Ta cần chứng tỏ rằng với mọi $x \in D$,

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \subseteq \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t), \text{ với mọi } \alpha \in (0,1].$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $x \in D, \alpha \in (0,1]$ sao cho

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \not\subseteq \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t), \text{ với } \alpha \in (0,1] \text{ nào đó.}$$

Điều này kéo theo $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \cap Y\backslash\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset$. Hơn nữa, nếu $F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai thì

$$\begin{aligned}&\alpha F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) + (1-\alpha)F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, t)\\&\subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t).\end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned}&F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)\\&\cap Y\backslash\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) \cap Y\backslash\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset$. Từ đó, ta kết luận $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) \not\subseteq \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)$, mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$- giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta có $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)$ hoặc, $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, y) \subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)$. Trong cả hai trường hợp, ta đều có

$(F(y, \alpha x+(1-\alpha)t, \alpha x+(1-\alpha)t)+\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t))\cap(Y\setminus\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t)) \neq \emptyset$. Ta suy ra $F(y, \alpha x+(1-\alpha)t, \alpha x+(1-\alpha)t)\cap(Y\setminus\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t)-\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t)) \neq \emptyset$ hay $F(y, \alpha x+(1-\alpha)t, \alpha x+(1-\alpha)t)\cap(Y\setminus\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t)) \neq \emptyset$. Từ đó, $F(y, \alpha x+(1-\alpha)t, \alpha x+(1-\alpha)t) \not\subseteq \mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t)$, và xảy ra mâu thuẫn. Như vậy, ta có $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \subseteq \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)$ với mọi $x \in D, \alpha \in (0, 1]$. Và, do $F(y, ., .)$ là $\mathcal{C}(y, .)$-hemi liên tục lý tưởng trên nên $F(y, t, x) \subseteq \mathcal{C}(y, t)$ với mọi $x \in D, \alpha \in (0, 1]$. Chú ý rằng $\mathcal{C}(y, t) \cap (-\mathcal{C}(y, t)\setminus\{0\}) = \emptyset$, ta thu được $F(y, t, x) \cap (-\mathcal{C}(y, t)\setminus\{0\}) = \emptyset$ với mọi $x \in D$. □

Bổ đề 2.4.2. *Giả sử $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng, $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị với $F(y, x, x) \subseteq (\mathcal{C}(y, x))$ với mọi $x \in D, y \in K$. Hơn nữa, giả sử:*

i) Với $x \in D, y \in K, F(y, ., x) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}(y, .)$-hemi liên tục dưới;

ii) Với $y \in K$, $F(y, ., .)$ là $\mathcal{C}(y, .)$- giả đơn điệu yếu dưới;

iii) Với $y \in K$, $F(y, ., .)$ là $\mathcal{C}(y, .)$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}(y, .)$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, với $t \in D, y \in K$, các mệnh đề sau tương đương:

1) $F(y, t, x) \cap (-\mathrm{int}\mathcal{C}(y, t)) = \emptyset$ với mọi $x \in D$;

2) $F(y, x, t) \cap (-\mathcal{C}(y, x)) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$.

Chứng minh. Hiển nhiên *1)* $\Rightarrow$ *2)* trực tiếp suy từ định nghĩa ánh xạ $C(y, .)$-giả đơn điệu yếu dưới.

Ngược lại, giả sử *2)*, ta suy ra
$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, t) \cap -\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$ và $\alpha \in (0, 1]$.
Ta cần chứng tỏ rằng, với mọi $x \in D, \alpha \in (0, 1]$,

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) = \emptyset.$$

Thật vậy, nếu không, tồn tại $x \in D$ và $\alpha \in [0, 1]$ sao cho

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset.$$

Nếu $F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$- lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta có

$$\alpha F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) + (1-\alpha)F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, t)$$

$$\subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t).$$

Từ đó,

$$F(y, \alpha x+(1-\alpha)t, \alpha x+(1-\alpha)t)+\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t) \cap -\text{int}\mathcal{C}(y, \alpha x+(1-\alpha)t) \neq \emptyset.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$- giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta suy ra

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t)$$

hoặc,

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, t) \subseteq F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) + \mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t).$$

Cả hai trường hợp đều suy ra

$$F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, \alpha x + (1-\alpha)t) \cap -\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) \neq \emptyset.$$

Điều này mâu thuẫn với $F(y,z,z) \subseteq \mathcal{C}(y,z)$ với mọi $z \in D$. Vậy, với mọi $x \in D, \alpha \in (0,1]$, $F(y, \alpha x + (1-\alpha)t, x) \cap -\text{int}\mathcal{C}(y, \alpha x + (1-\alpha)t) = \emptyset$. Do $F(y,.,x)$ là ánh xạ $\mathcal{C}(y,.)$-hemi liên tục dưới, ta kết luận rằng

$F(y,t,x) \cap -\text{int}\mathcal{C}(y,t) = \emptyset$ với mọi $x \in D$. □

Tương tự, ta có các kết quả sau.

Bổ đề 2.4.3. *Cho $F : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $F(y,x,x) \cap \mathcal{C}(y,x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$ và $y \in K$. Hơn nữa, giả sử rằng:*

i) Với $x \in D, y \in K, F(y,.,x) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}(y,.)$-hemi liên tục lý tưởng dưới;

ii) Với $y \in K, F(y,.,.)$ là $\mathcal{C}(y,.)$-giả đơn điệu mạnh trên;

iii) Với $y \in K, F(y,.,.)$ *là* $\mathcal{C}(y,.)$*-lồi dưới theo đường chéo (hoặc,* $\mathcal{C}(y,.)$*-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.*

Khi đó, với $t \in D, y \in K$*, các mệnh đề sau tương đương:*

1) $F(y,t,x) \nsubseteq -(\mathcal{C}(y,t)\backslash\{0\})$ *với mọi* $x \in D$;

2) $F(y,x,t) \subseteq -\mathcal{C}(y,x)$ *với mọi* $x \in D$.

Bổ đề 2.4.4. *Cho* $F : K \times D \times D \to 2^Y$ *là ánh xạ đa trị với giá trị không rỗng và* $\mathcal{C} : K \times D \to 2^Y$ *là ánh xạ nón đa trị với* $F(y,x,x) \cap \mathcal{C}(y,x) \neq \emptyset$ *với mọi* $x \in D, y \in K$*. Hơn nữa, giả sử*

i) Với $x \in D, y \in K, F(y,.,x) : D \to 2^Y$ *là* $\mathcal{C}(y,.)$*-hemi liên tục trên;*

ii) Với $y \in K$, $F(y,.,.)$ *là* $\mathcal{C}(y,.)$*- giả đơn điệu yếu trên;*

iii) Với $y \in K$, $F(y,.,.)$ *là* $\mathcal{C}(y,.)$*-lồi dưới theo đường chéo (hoặc,* $\mathcal{C}(y,.)$*-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai;*

Khi đó, với $t \in D, y \in K$*, các mệnh đề sau tương đương:*

1) $F(y,t,x) \nsubseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(y,t)$ *với mọi* $x \in D$;

2) $F(y,x,t) \subseteq -\mathcal{C}(y,x)$ *với mọi* $x \in D$.

Sau đây, ta sẽ xét sự tồn tại nghiệm của các bài toán tựa cân bằng Pareto và tựa cân bằng Pareto yếu, dạng tổng quát.

2.4.5.1. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 1

Cho $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K$ và $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là các ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng. C là nón lồi đóng trong Y. Các bài toán tựa cân bằng Pareto trên (dưới) và yếu trên (dưới) loại 1 lần lượt được phát biểu như sau:

1. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$G(\bar{y},\bar{x},z) \nsubseteq (-C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x},\bar{y});$$

2. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y});$$

3. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \not\subseteq (-\mathrm{int}C) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y});$$

4. Tìm $\bar{x}, \bar{y} \in D \times K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Trước hết, ta chứng minh sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng lý tưởng (đối với nón $-C$).

Định lý 2.4.1. *Giả sử D, K lần lượt là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Z. Và giả sử rằng $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng, và $G(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $x \in D, y \in K$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng, T là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng lồi đóng;

ii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ là $C-$giả đơn điệu mạnh dưới;

iii) Với $(x, y) \in D \times K$, $G(y, x, .)$ là $C-$lồi trên (hoặc, $C-$giống tựa lồi trên);

iv) G là ánh xạ $C-$liên tục trên.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, z, \bar{x}) \cap (-C) \neq \emptyset \textit{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

Chứng minh. Ta xét ánh xạ đa trị

$$H(x,y) = \{x' \in S(x,y) |\, G(y,z,x') \cap (-C) \neq \emptyset \,\text{với mọi}\, z \in S(x,y)\}.$$

Ta chứng minh $H(x,y)$ khác rỗng, lồi, đóng với mọi $(x,y) \in D \times K$. Thật vậy, với mỗi $(x,y) \in D \times K$, ta định nghĩa ánh xạ $Q : S(x,y) \to 2^{S(x,y)}$ xác định bởi

$$Q_{xy}(z) = \{x' \in S(x,y) |\, G(y,z,x') \cap (-C) \neq \emptyset\}.$$

Lấy $z \in S(x,y)$ tùy ý, giả sử dãy $\{x'_\alpha\}$ là dãy suy rộng trong $Q_{xy}(z), x'_\alpha \to x'$. Khi đó, ta có

$$x'_\alpha \in S(x,y), G(y,z,x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi}\, \alpha. \tag{2.6}$$

Do tập $S(x,y)$ đóng nên $x' \in S(x,y)$. Mặt khác, do $G(y,x,.)$ là ánh xạ $C-$liên tục trên nên với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại α_0 sao cho

$$G(y,z,x'_\alpha) \subseteq G(y,z,x') + C + V \,\text{với mọi}\, \alpha \geq \alpha_0.$$

Do C đóng, kết hợp với (2.6), ta suy ra $G(y,z,x') \cap (-C) \neq \emptyset$. Vậy $x' \in Q_{xy}(z)$, hay $Q_{xy}(z)$ đóng với mọi $z \in S(x,y)$. Ngoài ra, do $D, S(x,y)$ là tập compắc nên tập con đóng $Q_{xy}(z)$ compắc.

Tiếp theo, ta chỉ ra Q_{xy} là ánh xạ KKM. Giả sử tồn tại $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq S(x,y)$ sao cho

$$\text{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_{xy}(x_i).$$

Khi đó tồn tại x^*,

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \text{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

sao cho $x^* \notin Q_{xy}(x_i)$. Từ đó ta có

$$G(y, x_i, x^*) \cap (-C) = \emptyset \text{ với } i = \overline{1,n}.$$

Từ $G(y,.,.)$ là C-giả đơn điệu mạnh dưới, ta có

$$G(y, x^*, x_i) \cap (-C \setminus \{0\}) \neq \emptyset \text{ với } i = \overline{1,n}.$$

Vì ánh xạ $G(y, x^*, .)$ là C- lồi trên (hoặc C- giống tựa lồi trên) nên

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(y, x^*, x_i) \subseteq G(y, x^*, x^*) + C,$$

(hoặc, tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho

$$G(y, x^*, x_i) \subseteq G(y, x^*, x^*) + C).$$

Từ đó

$$G(y, x^*, x^*) \cap (-C \setminus \{0\}) \neq \emptyset.$$

Điều này suy ra tồn tại $v \in G(y, x^*, x^*), v \in (-C \setminus \{0\})$, tức là $v \notin C$ và như vậy $G(y, x^*, x^*) \nsubseteq C$. Điều này trái với giả thiết $G(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Như vậy, ta có Q_{xy} là ánh xạ KKM. Sử dụng Bổ đề Fan-KKM (Định lý 1.2.2), ta có

$$\bigcap_{z \in S(x,y)} Q_{xy}(z) \neq \emptyset.$$

Nghĩa là tồn tại $x' \in S(x, y)$ sao cho $G(y, z, x') \cap (-C) \neq \emptyset$ với mọi $z \in S(x, y)$, hay $H(x, y) \neq \emptyset$.

Tiếp theo, ta chứng tỏ $H(x, y)$ là tập lồi. Thật vậy, lấy $x'_1, x'_2 \in H(x, y)$ và $\beta \in [0, 1]$. Do tập $S(x, y)$ lồi nên $\beta x'_1 + (1 - \beta x'_2) \in S(x, y)$. Mặt khác, từ định nghĩa ánh xạ H, ta có

$$G(y, z, x'_1) \cap (-C) \neq \emptyset,$$
$$G(y, z, x'_2) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(x, y).$$

Mặt khác, do ánh xạ $G(y, z, .)$ là C-lồi trên (hoặc, C-giống tựa lồi trên) nên với mọi $z \in S(x, y)$ ta có

$$\beta G(y, z, x'_1) + (1 - \beta) G(y, z, x'_2) \subseteq G(y, z, \beta x'_1 + (1 - \beta) x'_2) + C$$

(hoặc, tồn tại $i \in \{1, 2\}$ sao cho

$$G(y, z, x'_i) \subseteq G(y, z, \beta x'_1 + (1 - \beta) x'_2) + C \text{ với mọi } z \in S(x, y)).$$

Từ đó, $G(y, z, \beta x'_1 + (1 - \beta) x'_2) \cap (-C) \neq \emptyset$ với mọi $z \in S(x, y)$. Như vậy ta có $\beta x'_1 + (1 - \beta) x'_2 \in H(x, y)$ và $H(x, y)$ là tập lồi.

Để chứng minh H là ánh xạ đóng, ta lấy dãy suy rộng $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ hội tụ tới (x, y), dãy suy rộng $\{x'_\alpha\}$ hội tụ tới x', với $x'_\alpha \in H(x_\alpha, y_\alpha)$ với mọi α. Ta cần chứng tỏ rằng $x' \in H(x, y)$.

Thật vậy, từ $x'_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha)$ và tính nửa liên tục trên với giá trị đóng của S ta có $x' \in S(x, y)$. Do $x'_\alpha \in H(x_\alpha, y_\alpha)$ nên

$$G(y_\alpha, z, x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(x_\alpha, y_\alpha). \tag{2.7}$$

Với mỗi $z \in S(x, y)$, do ánh xạ S nửa liên tục dưới, tồn tại dãy suy rộng $\{z_\alpha\}, z_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha)$ với mọi α, $z_\alpha \to z$. Khi đó, từ (2.7) ta có

$$G(y_\alpha, z_\alpha, x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } \alpha.$$

Từ giả thiết ánh xạ G là C- liên tục trên, với mỗi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại chỉ số α_0 sao cho với mọi $\alpha \geq \alpha_0$ ta có

$$G(y_\alpha, z_\alpha, x'_\alpha) \subseteq G(y, z, x') + C + V.$$

Điều đó kéo theo

$$(G(y, z, x') + C + V) \cap (-C) \neq \emptyset.$$

Do C đóng, ta suy ra $G(y, z, x') \cap (-C) \neq \emptyset$. Nghĩa là, $x' \in H(x, y)$ và ánh xạ H đóng.

Ta xét ánh xạ đa trị $P : D \times K \to 2^{D \times K}$, $P(x, y) = H(x, y) \times T(x, y)$. Dễ thấy ánh xạ đa trị P có giá trị không rỗng, lồi, đóng, cùng với tính compắc của tập hợp $D \times K$ ta suy ra ánh xạ P nửa liên tục trên. Do Định lý điểm bất động Ky Fan (Định lý 1.2.1), tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $(\bar{x}, \bar{y}) \in P(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$G(\bar{y}, z, \bar{x}) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Định lý đã được chứng minh. $\square$

Sử dụng kết quả trên, chúng ta chứng minh được kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng Pareto dưới loại 1.

Định lý 2.4.2. *Giả sử D, K tương ứng là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Z, $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng và $G(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $x \in D, y \in K$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng; T là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng lồi đóng;

ii) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $G(y, ., x) : D \to 2^Y$ là $C-$ hemi liên tục lý tưởng trên;

iii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ là C-giả đơn điệu mạnh dưới;

iv) Với $(x, y) \in K$, $G(y, x, .)$ là $C-$lồi trên (hoặc, $C-$giống tựa lồi trên);

v) G là ánh xạ $C-$ liên tục trên.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ sao cho

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

Chứng minh. Áp dụng kết quả Định lý 2.4.1, ta suy ra tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và $G(\bar{y}, z, \bar{x}) \cap (-C) \neq \emptyset$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})\}$. Sử dụng kết quả Bổ đề 2.4.1 với $D = S(\bar{x}, \bar{y})$, ta có $G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$ với mọi $z \in S(\bar{x}, \bar{y})$. Định lý đã được chứng minh. □

Lập luận tương tự, ta chứng minh được kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng Pareto trên loại 1.

Định lý 2.4.3. *Giả sử D, K lần lượt là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Z. Và giả sử rằng $G : K \times D \times D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng và $G(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $x \in D, y \in K$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng, T là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng lồi đóng;

ii) Với $(x, y) \in D \times K$, *ánh xạ* $G(y, ., x) : D \to 2^Y$ *là* $C-$ *hemi liên tục lý tưởng dưới;*

iii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ *là* $C-$*giả đơn điệu mạnh trên;*

iv) Với $(x, y) \in D \times K$, $G(y, x, .)$ *là* $C-$*lồi dưới (hoặc,* $C-$*giống tựa lồi dưới);*

v) Ánh xạ G *là* $C-$ *liên tục dưới.*

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ *sao cho*

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \not\subseteq -(C \setminus \{0\}) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Tiếp theo, bằng các lập luận tương tự, ta có kết quả cho các bài toán tựa cân bằng yếu loại 1.

Định lý 2.4.4. *Giả sử* D, K *tương ứng là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff* X, Z, *ánh xạ đa trị* $G : K \times D \times D \to 2^Y$ *có giá trị không rỗng và* $G(y, x, x) \subseteq C$ *với mọi* $x \in D, y \in K$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S *là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng,* T *là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng lồi đóng;*

ii) Với $(x, y) \in D \times K$, *ánh xạ* $G(y, ., x) : D \to 2^Y$ *là* $C-$ *hemi liên tục dưới;*

iii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ *là* $C-$*giả đơn điệu yếu dưới;*

iv) Với $(x, y) \in D \times K$, $G(y, x, .)$ *là* $C-$*lồi trên (hoặc,* $C-$*giống tựa lồi trên);*

v) G *là ánh xạ* $C-$*liên tục dưới.*

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ *sao cho*

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-\text{int}C) = \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Chứng minh. Ta xét ánh xạ đa trị

$$H(x,y) = \{x' \in S(x,y) |\, G(y,z,x') \cap (-C) \neq \emptyset \,\text{với mọi}\, z \in S(x,y)\}.$$

Ta chứng minh $H(x,y)$ khác rỗng, lồi, đóng với mọi $(x,y) \in D \times K$.

Thật vậy, với mỗi $(x,y) \in D \times K$, ta định nghĩa ánh xạ $Q : S(x,y) \to 2^{S(x,y)}$ xác định bởi

$$Q_{xy}(z) = \{x' \in S(x,y) |\, G(y,z,x') \cap (-C) \neq \emptyset\}.$$

Lấy $z \in S(x,y)$ tùy ý, giả sử dãy $\{x'_\alpha\}$ là dãy suy rộng trong $Q_{xy}(z), x'_\alpha \to x'$. Khi đó, ta có

$$x'_\alpha \in S(x,y), G(y,z,x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \quad \text{với mọi}\, \alpha. \tag{2.8}$$

Do tập $S(x,y)$ đóng nên $x' \in S(x,y)$. Mặt khác, do $G(y,z,.)$ là ánh xạ C–liên tục trên nên với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại α_0 sao cho

$$G(y,z,x'_\alpha) \subseteq G(y,z,x') + C + V \,\text{với mọi}\, \alpha \geq \alpha_0.$$

Do C là nón đóng kết hợp với (2.8), ta suy ra $(G(y,z,x')) \cap (-C) \neq \emptyset$ (mâu thuẫn). Vậy $x' \in Q_{xy}(z)$, hay $Q_{xy}(z)$ đóng với mọi $z \in S(x,y)$. Ngoài ra, do $D, S(x,y)$ là tập compắc nên tập con đóng $Q_{xy}(z)$ compắc.

Tiếp theo, ta chỉ ra Q_{xy} là ánh xạ KKM. Giả sử tồn tại $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq S(x,y)$ sao cho

$$\text{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_{xy}(x_i).$$

Khi đó tồn tại x^*,

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \text{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

sao cho $x^* \notin Q_{xy}(x_i), i = \overline{1,n}$. Từ đó ta có

$$G(y, x_i, x^*) \cap (-C) = \emptyset \text{ với } i = \overline{1,n}.$$

Từ $G(y,.,.)$ là C–giả đơn điệu yếu dưới, ta có

$$G(y, x^*, x_i) \cap (-\text{int}C) \neq \emptyset \text{ với } i = \overline{1,n}.$$

Vì ánh xạ $G(y, x^*, .)$ là $C-$ lồi trên (hoặc $C-$ giống tựa lồi trên) nên

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(y, x^*, x_i) \subseteq G(y, x^*, x^*) + C,$$

(hoặc, tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho

$$G(y, x^*, x_i) \subseteq G(y, x^*, x^*) + C).$$

Từ đó

$$G(y, x^*, x^*) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \emptyset.$$

Điều này suy ra tồn tại $v \in G(y, x^*, x^*), v \in (-\mathrm{int}\mathcal{C}(y, x^*)$, tức là $v \notin C$ và như vậy $G(y, x^*, x^*) \nsubseteq C$. Điều này trái với giả thiết $G(y, x, x) \subseteq C$ với mọi $(x, y) \in D \times K$. Như vậy, ta có Q_{xy} là ánh xạ KKM. Sử dụng Bổ đề Fan-KKM (Định lý 1.2.2), ta có

$$\bigcap_{z \in S(x,y)} Q_{xy}(z) \neq \emptyset.$$

Nghĩa là tồn tại $x' \in S(x, y)$ sao cho $G(y, z, x') \cap (-C) \neq \emptyset$ với mọi $z \in S(x, y)$, hay $H(x, y) \neq \emptyset$.

Tiếp theo, ta chứng tỏ $H(x, y)$ là tập lồi. Thật vậy, lấy $x'_1, x'_2 \in H(x, y)$ và $\beta \in [0, 1]$. Do tập $S(x, y)$ lồi nên $\beta x'_1 + (1 - \beta)x'_2 \in S(x, y)$. Mặt khác, từ định nghĩa ánh xạ H, ta có

$$G(y, z, x'_1) \cap (-C) \neq \emptyset, \text{ và } G(y, z, x'_2) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(x, y).$$

Lại do ánh xạ $G(y, z, .)$ là C-lồi trên (hoặc, C-giống tựa lồi trên), ta có

$$\beta G(y, z, x'_1) + (1-\beta) G(y, z, x'_2) \subseteq G(y, z, \beta x'_1 + (1-\beta)x'_2) + C \text{ với mọi } z \in S(x, y),$$

(hoặc, tồn tại $i \in \{1, 2\}$ sao cho

$$G(y, z, x'_i) \subseteq G(y, z, \beta x'_1 + (1 - \beta)x'_2) + C \text{ với mọi } z \in S(x, y)).$$

Từ đó,

$$G(y, z, \beta x'_1 + (1 - \beta)x'_2) \cap (-C) \neq \emptyset, \text{ với mọi } z \in S(x, y).$$

Như vậy ta có $\beta x'_1 + (1 - \beta)x'_2 \in H(x, y)$ và $H(x, y)$ là tập lồi.

Để chứng minh H là ánh xạ đóng, ta lấy dãy suy rộng $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ hội tụ tới (x, y), dãy suy rộng $\{x'_\alpha\}$ hội tụ tới x', với $x'_\alpha \in H(x_\alpha, y_\alpha)$ với mọi α. Ta cần chứng tỏ rằng $x' \in H(x, y)$.

Thật vậy, từ $x'_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha)$ và tính nửa liên tục trên với giá trị đóng của S ta có $x' \in S(x, y)$. Do $x'_\alpha \in H(x_\alpha, y_\alpha)$ nên

$$G(y_\alpha, z, x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(x_\alpha, y_\alpha). \tag{2.9}$$

Với mỗi $z \in S(x, y)$, do ánh xạ S nửa liên tục dưới, tồn tại dãy suy rộng $\{z_\alpha\}, z_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha)$ với mọi α, $z_\alpha \to z$. Khi đó, từ (2.9) ta có

$$G(y_\alpha, z_\alpha, x'_\alpha) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } \alpha.$$

Từ giả thiết ánh xạ G là C- liên tục trên, với mỗi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại chỉ số α_0 sao cho với mọi $\alpha \geq \alpha_0$ ta có

$$G(y_\alpha, z_\alpha, x'_\alpha) \subseteq G(y, z, x') + C + V.$$

Điều đó kéo theo

$$(G(y, z, x') + C + V) \cap (-C) \neq \emptyset.$$

Do C là nón đóng, ta suy ra

$$G(y, z, x') \cap (-C) \neq \emptyset.$$

Nghĩa là, $x' \in H(x, y)$ và ánh xạ H đóng.

Ta xét ánh xạ đa trị $P : D \times K \to 2^{D \times K}$, $P(x, y) = H(x, y) \times T(x, y)$. Dễ thấy ánh xạ đa trị P có giá trị không rỗng, lồi, đóng, cùng với tính compắc của tập hợp $D \times K$ ta suy ra ánh xạ P nửa liên tục trên. Do Định lý điểm bất động Ky Fan (Định lý 1.2.1), tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $(\bar{x}, \bar{y}) \in P(\bar{x}, \bar{y})$. Khi đó, $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$G(\bar{y}, z, \bar{x}) \cap (-C) \neq \emptyset \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Áp dụng kết quả Bổ đề 2.4.2, ta có

$$G(\bar{y}, \bar{x}, z) \cap (-\text{int}C) = \emptyset, \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.4.5. *Giả sử D, K lần lượt là các tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, ánh xạ đa trị $G : K \times D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng và $G(y, x, x) \cap C \neq \emptyset$ với mọi $x \in D, y \in K$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) S là ánh xạ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng, T là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng lồi đóng;

ii) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $G(y, ., x) : D \to 2^Y$ là $C-$ hemi liên tục trên;

iii) Với $y \in K$, $G(y, ., .)$ là $C-$giả đơn điệu yếu trên;

iv) Với $(x, y) \in D \times K$, $G(y, x, .)$ là $C-$lồi dưới (hoặc, $C-$giống tựa lồi dưới);

v) G là ánh xạ $C-$liên tục dưới.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D, \bar{y} \in K$ sao cho

$$\begin{aligned} &\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \\ &G(\bar{y}, \bar{x}, z) \not\subseteq (-\text{int}C) \text{ với mọi } z \in S(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

2.4.5.2. Các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 2.

Trong mục này ta xét các ánh xạ $P_1 : D \to 2^D, P_2 : D \to 2^D, P : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$, $G : D \times D \to 2^Y$ và ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$. Các bài toán tựa cân bằng Pareto trên (dưới) và yếu trên (dưới) loại 2 lần lượt được phát biểu như sau:

1. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
   $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \not\subseteq -(\mathcal{C}(\bar{x}) \setminus \{0\})$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

2. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
   $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \cap -(\mathcal{C}(\bar{x}) \setminus \{0\}) = \emptyset$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

3. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
   $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \not\subseteq -\text{int}\mathcal{C}(\bar{x})$ với mọi $x \in P(\bar{x})$;

4. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho
   $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $G(\bar{x}, x) \cap -\text{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset$ với mọi $x \in P(\bar{x})$.

Tiếp theo ta sẽ đưa ra điều kiện đủ để các bài toán trên có nghiệm.

Định lý 2.4.6. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P : D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Và giả sử ánh xạ đa trị $G : D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng, $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $G(x,x) \subseteq \mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Với $t \in D$, $G(.,t) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục mạnh dưới;

ii) Với $x \in D, y \in K$, tập

$$A = \{t \in D|\, G(x,t) \cap (-\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset\} \text{ là đóng trong } D;$$

iii) G là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu mạnh dưới;

iv) G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và
$G(\bar{x},t) \cap (-\mathcal{C}(\bar{x})\backslash\{0\}) = \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x})$.

Chứng minh. Ta định nghĩa ánh xạ $M : D \to 2^D$ và $F : D \times D \to 2^Y$,

$$M(t) = \{x \in D|\ G(t,x) \cap -\mathcal{C}(t) \neq \emptyset\}, t \in D,$$

$$F(x,t) = x - M(t), (x,t) \in D \times D.$$

Vì với $t \in D$ cố định, tập hợp A đóng nên tập

$$B = \{x \in D|\ 0 \notin F(x,t)\}$$

là mở trong D.

Cho $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ là tập con hữu hạn tùy ý trong D và $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i t_i, \alpha_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,2,...,n\}, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Ta chỉ ra rằng, tồn tại $i \in \{1,2,...,n\}$ sao cho $0 \in F(x,t_i)$. Giả sử $0 \notin F(y,x,t_i)$ với mọi $i \in \{1,2,...,n\}$, hay $G(y,t_i,x) \cap (-\mathcal{C}(y,t_i)) = \emptyset$ với mọi $i \in \{1,2,...,n\}$. Từ G là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu yếu dưới suy ra

$G(x,t_i) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ với mọi $i \in \{1,2,...,n\}$. Nếu G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(x,t_i) \subseteq G(x,x) + \mathcal{C}(x).$$

Ta có,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[G(x,t_i) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x)\right] &\subseteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(x,t_i) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) \\ &\subseteq (G(x,x) + \mathcal{C}(x) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra rằng

$$(G(x,x) + \mathcal{C}(x)) \cap (-\mathrm{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset \text{ hay } G(x,x) \cap (-\mathrm{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset,$$

mâu thuẫn với giả thiết $G(x,x) \cap (-\mathrm{int}\mathcal{C}(x)) = \emptyset$ với mọi $x \in D$.

Lập luận tương tự, ta thấy rằng trong trường hợp G là $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai ta cũng có $G(x,x) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) \neq \emptyset$, mâu thuẫn với $G(x,x) \subseteq \mathcal{C}(x)$. Vì vậy, tồn tại $j \in \{1,2,...,n\}$ để $0 \in F(x,t_j)$ và do đó F là ánh xạ $Q-$KKM với $Q \equiv D$. Cuối cùng, áp dụng Hệ quả 2.3.1 với D, P, Q và F ta thấy, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $0 \in F(\bar{x},t)$, với mọi $t \in P(\bar{x})$. Điều này chỉ ra $\bar{x} \in M(t)$ với mọi $t \in P(\bar{x})$ và do vậy $G(t,\bar{x}) \cap (-\mathcal{C}(t)) \neq \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x})$. Áp dụng kết quả Bổ đề 2.4.2 với D thay bởi $P(\bar{x})$, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Lập luận tương tự, ta thu được kết quả cho bài toán tựa cân bằng Pareto trên loại 2.

Định lý 2.4.7. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P: D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Và giả sử ánh xạ đa trị $G: D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng, $\mathcal{C}: D \to 2^Y$ là ánh xạ nón với $G(x,x) \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Với $t \in D$, $G(.,t): D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục mạnh trên;

ii) Với $x \in D$, tập hợp $A = \{t \in D \mid G(x,t) \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ đóng trong D;

iii) G là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu mạnh trên;

iv) G là $\mathcal{C}$-lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và
$G(\bar{x}, t) \nsubseteq -(\mathcal{C}(\bar{x}) \backslash \{0\})$ *với mọi* $t \in P(\bar{x})$.

Định lý 2.4.8. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P : D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng, ánh xạ $G : D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng, ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ thỏa mãn $G(x, x) \subseteq \mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$ và:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ $G(., t) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục dưới;

ii) Với $x \in D$, tập $A = \{t \in D |\ G(x, t) \cap -\mathcal{C}(x) \neq \emptyset\}$ đóng trong D;

iii) G là $\mathcal{C}$- giả đơn điệu yếu dưới;

iv) G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và
$G(\bar{x}, t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset$ *với mọi* $t \in P(\bar{x})$.

Chứng minh. Ta định nghĩa ánh xạ $M : D \to 2^D$ và $F : D \times D \to 2^Y$,

$$M(t) = \{x \in D |\ G(t, x) \cap -\mathcal{C}(t) \neq \emptyset\}, t \in D,$$
$$F(x, t) = x - M(t), (x, t) \in D \times D.$$

Vì với $t \in D$ cố định, tập hợp A đóng nên tập $B = \{x \in D |\ 0 \notin F(x, t)\}$ là mở trong D.

Cho $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ là tập con hữu hạn tùy ý trong D và $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i, \alpha_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Ta chỉ ra rằng, tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $0 \in F(x, t_i)$. Giả sử $0 \notin F(x, t_i)$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$ hay $G(t_i, x) \cap (-\mathcal{C}(t_i)) = \emptyset$ với $i = 1, 2, ..., n$. Từ G là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu yếu dưới suy ra $G(x, t_i) \cap$

$-int\mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ với $i = 1, 2, ..., n$. Nếu G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(x, t_i) \subseteq G(x, x) + \mathcal{C}(x).$$

Ta có,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[G(x, t_i) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x)\right] \subseteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(x, t_i) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x)$$
$$\subseteq (G(x, x) + \mathcal{C}(x) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset.$$

Từ đó ta suy ra rằng

$$(G(x, x) + \mathcal{C}(x)) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset \text{ hay } G(x, x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset,$$

mâu thuẫn với giả thiết $G(x, x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) = \emptyset$ với mọi $x \in D$.

Lập luận tương tự, ta thấy rằng trong trường hợp G là $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai ta cũng có $G(x, x) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x) \neq \emptyset$, mâu thuẫn với $G(x, x) \subseteq \mathcal{C}(x)$. Vì vậy, tồn tại $j \in \{1, 2, ..., n\}$ để $0 \in F(x, t_j)$ và do đó F là ánh xạ $Q-$KKM với $Q \equiv D$. Cuối cùng, áp dụng Hệ quả 2.3.1 với D, P, Q và F ta thấy, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $0 \in F(\bar{x}, t)$, với mọi $t \in P(\bar{x})$. Điều này chỉ ra $\bar{x} \in M(t)$ với mọi $t \in P(\bar{x})$ và do vậy $G(t, \bar{x}) \cap (-\mathcal{C}(t)) \neq \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x})$. Áp dụng Bổ đề 2.4.2 với D thay bởi $P(\bar{x})$, ta có điều cần chứng minh. □

Định lý 2.4.9. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P : D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng, ánh xạ đa trị $G : D \times D \to 2^Y$ có giá trị không rỗng, ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ thỏa mãn $G(x, x) \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$, với mọi $x \in D$ và:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ $G(., t) : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục trên;

ii) Với $x \in D$, tập $A = \{t \in D |\ G(x, t) \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ đóng trong D;

iii) G là $\mathcal{C}$- giả đơn điệu yếu trên;

iv) G là $\mathcal{C}$-lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \nsubseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Chú ý. *Nếu các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) Ánh xạ đa trị $G : D \times D \longrightarrow 2^Y$ có giá trị không rỗng compắc;

ii) Với $x \in D$ ánh xạ $G(x, .) : D \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị $\mathcal{C}$-liên tục dưới;

iii) $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị với giá trị đóng,

thì với $x \in D$, tập $A = \{t \in D|\ G(x, t) \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ đóng trong D.

Thật vậy, giả sử $t_\alpha \in A, t_\alpha \to t$, ta có $G(x, t_\alpha) \subseteq -\mathcal{C}(x)$. Từ tính $\mathcal{C}$-liên tục dưới của ánh xạ $G(x, .)$ suy ra rằng, với mọi lân cận V của gốc O trong Y ta có

$$G(x, t) \subseteq G(x, t_\alpha) + V - \mathcal{C}(x).$$

Từ đó ta có $G(x, t) \subseteq V - \mathcal{C}(x)$. Hơn nữa, từ $G(x, t)$ là tập compắc và $\mathcal{C}(x)$ là tập đóng, ta có $G(x, t) \subseteq -\mathcal{C}(x)$. Vì vậy, A đóng trong D.

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán tựa cân bằng yếu mà không cần các điều kiện $\mathcal{C}$-giả đơn điệu, tuy nhiên ở đây đòi hỏi tính liên tục mạnh hơn.

Hệ quả 2.4.7. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P : D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Cho ánh xạ nón đa trị $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ nửa liên tục dưới, ánh xạ đa trị $G : D \times D \to 2^Y$ với giá trị compắc, không rỗng sao cho với mọi $t \in D$ cố định, ánh xạ $G(., t) : D \to 2^Y$ là $(-\mathcal{C})$-liên tục dưới. Giả sử:*

i) $G(x, x) \nsubseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$;

ii) G là $\mathcal{C}$- lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ để $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset, \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Chứng minh. Ta định nghĩa các ánh xạ $M : D \to 2^D, F : D \times D \to 2^D$,

$$\begin{aligned} M(t) &= \{x \in D|\ G(x, t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) = \emptyset\}, t \in D, \\ F(x, t) &= x - M(t), (x, t) \in D \times D. \end{aligned}$$

Với mỗi $t \in D, y \in K$ cố định, ta chứng tỏ tập B mở trong D, với

$$B = \{x \in D|\ 0 \notin F(x,t)\ \} = \{x \in D|\ G(x,t) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset\}.$$

Thật vậy, lấy $x_0 \in B$. Từ đó suy ra, với mọi lân cận V của gốc trong Y, ta có $(G(x_0,t) + V) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x_0)) \neq \emptyset$. Từ tính chất $(-\mathcal{C})$-liên tục dưới của $G(.,t)$ suy ra rằng có tồn tại lân cận U_1 của điểm x_0 trong X sao cho $G(x_0,t) \subseteq G(x,t)+V+\mathcal{C}(x_0)$, với mọi $x \in U_1$. Do $G(x_0,t)$ compắc và $G(x,t)+V+\mathcal{C}(x_0)$ mở, nên tồn tại lân cận V_0 của gốc trong Y sao cho $G(x_0,t)+V_0 \subseteq G(x,t)+V+\mathcal{C}(x_0)$. Do $(G(x_0,t)+V_0) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x_0) \neq \emptyset$ nên $(G(x,t)+V+\mathcal{C}(x_0)) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x_0) \neq \emptyset$. Từ đó suy ra $(G(x,t)+V) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x_0)) = (G(x,t)+V) \cap (-\mathcal{C}(x_0) - \text{int}\mathcal{C}(x_0)) \neq \emptyset$ với mọi V. Cùng với $G(x,t)$ compắc, ta có được $G(x,t) \cap -\text{int}\mathcal{C}(x_0) \neq \emptyset$. Ngoài ra, do ánh xạ nón $\mathcal{C}$ nửa liên tục dưới nên với mọi lân cận V của gốc trong Y, tồn tại lân cận U_2 của x_0 sao cho $\mathcal{C}(x_0) \subseteq \mathcal{C}(x), \forall x \in U_2$, và như vậy, $-\text{int}\mathcal{C}(x_0) \subseteq -\text{int}\mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in U_2$. Do $G(x,t) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x_0)) \neq \emptyset$ nên

$$G(x,t) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset, \text{ với mọi } \ x \in U, U = U_1 \cap U_2.$$

Điều này suy ra rằng $U \subseteq B$ và tập B mở.

Cho tập hợp $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ gồm hữu hạn các phần tử tùy ý trong D và $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i, \alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1,2,...,n\}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Ta giả sử rằng $0 \notin F(x,t_i)$, với mọi $i = 1,2,...,n$ hay $G(x,t_i) \cap -\text{int}\mathcal{C}(y,x) \neq \emptyset$, với mọi $i = 1,2,...,n$. Nếu G là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[G(x,t_i) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x))\right] &\subseteq \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G(x,t_i)\right] \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \\ &\subseteq (G(x,x) + \mathcal{C}(x)) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x))\,.\end{aligned}$$

Từ đó, $(G(x,x) + \mathcal{C}(x)) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset$, hay $G(x,x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset$, mâu thuẫn với giả thiết $G(x,x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) = \emptyset$ với mọi $x \in D$.

Nếu G là $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta suy ra tồn tại $i \in \{1,2,...,n\}$ sao cho $G(x,t_i) \subseteq G(x,x) + \mathcal{C}(x)$. Lập luận tương tự như trên, ta suy ra rằng $G(x,x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) \neq \emptyset$, mâu thuẫn với giả thiết $G(x,x) \cap (-\text{int}\mathcal{C}(x)) = \emptyset$ với mọi $x \in D$. Như vậy, tồn tại $j \in \{1,2,...,n\}$ để $0 \in F(x,t_j)$, nghĩa là F là ánh xạ Q-KKM với $Q \equiv K$.

Cuối cùng, vận dụng Định lý 2.3.1 (hoặc Định lý 2.3.2) với $D, P = P_i, i = 1, 2, Q$ và F, ta khẳng định, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $0 \in F(\bar{x}, t)$ với mọi $t \in P(\bar{x})$. Từ đó suy ra $\bar{x} \in M(t)$ với mọi $t \in P(\bar{x})$ và do vậy $G(\bar{x}, t) \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset$, với mọi $t \in P(\bar{x})$. $\square$

Hệ quả 2.4.8. *Giả sử D là tập con không rỗng lồi compắc của không gian X, ánh xạ $P : D \to 2^D$ liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Cho ánh xạ nón đa trị $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ nửa liên tục dưới, ánh xạ đa trị $G : D \times D \to 2^Y$ với giá trị compắc, không rỗng sao cho với mọi $t \in D$, ánh xạ $G(., t) : D \to 2^Y$ là $(-\mathcal{C})$-liên tục trên. Giả sử:*

i) $G(x, x) \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$;

ii) G là $\mathcal{C}$- lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$G(\bar{x}, t) \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}), \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

2.4.6. Các bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ

Phần tiếp theo, chúng tôi áp dụng các kết quả trong Mục 2.4.5 vào các bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ tổng quát. Ta biết rằng lý thuyết bất đẳng thức biến phân véctơ đã được nghiên cứu khởi đầu bởi Giannessi và sau đó trở thành công cụ hữu dụng cho việc nghiên cứu lớp các bài toán tối ưu véctơ... Lý thuyết này đã trở thành công cụ hữu hiệu để giải nhiều bài toán tối ưu véctơ và đã được mở rộng và phát triển mạnh mẽ trong những năm gần đây.

Cho X, Y là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, $L(X, Y)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y và $\langle l, x\rangle$ là giá trị của l tại x, với $l \in L(X, Y), x \in X$. Cho K là tập con không rỗng lồi compắc của không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff Z và cho $D \subseteq X$, $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ là ánh xạ nón đa trị, $P : D \to 2^D, G : D \to 2^{L(X,Y)}$, $\theta : D \times D \to X$ là một ánh xạ phi tuyến. Các bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ Pareto và yếu tổng quát được phát biểu như sau:

1. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \not\subseteq -\mathcal{C}(\bar{x})\backslash\{0\}$ với mọi $t \in P(\bar{x})$;

2. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \cap -\mathcal{C}(\bar{x})\backslash\{0\} = \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x})$;

3. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x})$ với mọi $t \in P(\bar{x})$;

4. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và $\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x})$.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của các bài toán trên, chúng ta sử dụng các khái niệm ánh xạ đa trị giả đơn điệu mở rộng sau đây:

Định nghĩa 2.4.3. i) Ánh xạ $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ được gọi là $(\mathcal{C}, \theta)$- *giả đơn điệu yếu trên* nếu với mỗi $x, t \in D$,

$$\langle G(x), \theta(x, t)\rangle \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) \Rightarrow \langle G(t), \theta(t, x)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(t);$$

ii) Ánh xạ $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ được gọi là $(\mathcal{C}, \theta)$- *giả đơn điệu yếu dưới* nếu với mỗi $x, t \in D$,

$$\langle G(x), \theta(x, t)\rangle \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(x) = \emptyset \Rightarrow \langle G(t), \theta(t, x)\rangle \cap -\mathcal{C}(t) \neq \emptyset;$$

iii) Ánh xạ $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ được gọi là $(\mathcal{C}, \theta)$- *giả đơn điệu mạnh* trên nếu với mỗi $x, t \in D$,

$$\langle G(x), \theta(x, t)\rangle \not\subseteq -(\mathcal{C}(x)\backslash\{0\}) \Rightarrow \langle G(t), \theta(t, x)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(t);$$

iv) Ánh xạ $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ được gọi là $(\mathcal{C}, \theta)$- *giả đơn điệu mạnh dưới* nếu với mỗi $x, t \in D$,

$$\langle G(x), \theta(x, t)\rangle \cap -(\mathcal{C}(x)\backslash\{0\}) = \emptyset \Rightarrow \langle G(t), \theta(t, x)\rangle \cap -\mathcal{C}(t) \neq \emptyset.$$

Ta thấy rằng, G là $(\mathcal{C}, \theta)$ - giả đơn điệu yếu trên (yếu dưới, mạnh trên, mạnh dưới) nếu ánh xạ đa trị $F : D \times D \to 2^Y$ xác định bởi $F(x, t) = \langle G(x), \theta(x, t)\rangle$ là $\mathcal{C}$-giả đơn điệu yếu trên (yếu dưới, mạnh trên, mạnh dưới, tương ứng).

Các hệ quả sau đây là sự tổng quát hóa các kết quả của Fang Y. P. và Huang N. J. đưa ra trong tài liệu [21]. Phần chứng minh của chúng cũng có thể suy ra trực tiếp từ các Định lý 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8 và 2.4.9, với $F(x,t) = \langle G(x), \theta(x,t)\rangle$, $(x,t) \in D \times D$.

Hệ quả 2.4.9. *Cho D là tập con không rỗng lồi compắc trong không gian X, ánh xạ đa trị $P : D \to 2^D$ có giá trị không rỗng lồi đóng. Ánh xạ phi tuyến $\theta : X \times X \to X$, ánh xạ đa trị $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ và ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ với $\langle G(x), \theta(x,x)\rangle \subseteq \mathcal{C}(x)$ với mọi $x \in D$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) Với $t \in D$, ánh xạ $\langle G(.), \theta(.,t)\rangle : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục lý tưởng trên;

ii) Với $x \in D$, tập $A = \{t \in D | \ \langle G(x), \theta(x,t)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ là đóng trong D;

iii) G là $(\mathcal{C}, \theta)$-giả đơn điệu mạnh dưới;

iv) Ánh xạ $F : D \times D \to 2^Y$ xác định bởi $F(x,t) = \langle G(x), \theta(x,t)\rangle$ là $\mathcal{C}$-lồi trên theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi trên theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\bar{x} \in P(\bar{x})$ và

$$\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x},t)\rangle \cap -(\mathcal{C}(\bar{x}) \setminus \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}).$$

Hệ quả 2.4.10. *Cho D là tập con không rỗng lồi compắc trong không gian X, ánh xạ đa trị $P : D \to 2^D$ có giá trị không rỗng lồi đóng. Ánh xạ phi tuyến $\theta : X \times X \to X$, ánh xạ đa trị $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ và ánh xạ nón $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ với $\langle G(x), \theta(x,x)\rangle \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in D$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn :*

i) Với $t \in D$, ánh xạ $\langle G(.), \theta(.,t)\rangle : D \to 2^Y$ là $\mathcal{C}$-hemi liên tục lý tưởng dưới;

ii) Với $x \in D$, tập $A = \{t \in D | \ \langle G(x), \theta(x,t)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ đóng trong D;

iii) G là $(\mathcal{C}, \theta)$-giả đơn điệu mạnh trên;

iv) Ánh xạ $F : D \times D \to 2^Y$, xác định bởi $F(x,t) = \langle G(x), \theta(x,t)\rangle$, với mỗi $x, t \in D$, là $\mathcal{C}$-lồi dưới theo đường chéo (hoặc, $\mathcal{C}$-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ *sao cho* $\bar{x} \in P(\bar{x})$ *và*

$\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \not\subseteq -(\mathcal{C}(\bar{x})\backslash\{0\})$ *với mọi* $t \in P(\bar{x})$.

Hệ quả 2.4.11. *Cho* D *là tập con không rỗng lồi compắc của* X*, ánh xạ đa trị* $P : D \to 2^D$ *liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Giả sử các ánh xạ đa trị* $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ *có giá trị không rỗng,* $\theta : D \times D \to X$ *phi tuyến,* $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ *là ánh xạ nón sao cho* $\langle G(x), \theta(x, x)\rangle \subseteq \mathcal{C}(x)$ *với mọi* $x \in D$*, chúng thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Với $t \in D$*, ánh xạ đa trị* $\langle G, \theta(., t)\rangle : D \to 2^Y$ *là* $\mathcal{C}$*-hemi liên tục dưới;*

ii) Với $x \in D$*, tập* $A = \{t \in D|\ \langle G(x), \theta(x, t)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ *là đóng trong* D*;*

iii) G *là* $(\mathcal{C}, \theta)$*- giả đơn điệu yếu dưới;*

iv) Ánh xạ đa trị $F : D \times D \to 2^Y$ *xác định bởi* $F(x, t) = \langle G(x), \theta(x, t)\rangle$ *là* $\mathcal{C}$*-lồi trên (hoặc,* $\mathcal{C}$*-giống tựa lồi trên) theo đường chéo đối với biến thứ hai.*

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ *sao cho* $\bar{x} \in P(\bar{x})$ *và*

$\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \cap -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x}) = \emptyset$ *với mọi* $t \in P(\bar{x})$.

Hệ quả 2.4.12. *Cho* D *là tập con không rỗng lồi compắc của* X*, ánh xạ đa trị* $P : D \to 2^D$ *liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng. Giả sử các ánh xạ đa trị* $G : D \to 2^{L(X,Y)}$ *có giá trị không rỗng,* $\theta : D \times D \to X$ *phi tuyến,* $\mathcal{C} : D \to 2^Y$ *là ánh xạ nón sao cho* $\langle G(x), \theta(x, x)\rangle \cap \mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ *với mọi* $x \in D$*, chúng thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Với $t \in D$*, ánh xạ đa trị* $\langle G(.), \theta(., t)\rangle : D \to 2^Y$ *là* $\mathcal{C}(.)$*-hemi liên tục trên;*

ii) Với $x \in D$*, tập* $A = \{t \in D|\ \langle G(x), \theta(x, t)\rangle \subseteq -\mathcal{C}(x)\}$ *là đóng trong* D*;*

iii) G *là* $(\mathcal{C}, \theta)$*- giả đơn điệu yếu trên;*

iv) Ánh xạ đa trị $F : D \times D \to 2^Y$ *xác định bởi* $F(x, t) = \langle G(x), \theta(x, t)\rangle$ *là* $\mathcal{C}$*-lồi dưới (hoặc,* $\mathcal{C}$*-giống tựa lồi dưới) theo đường chéo đối với biến thứ hai.*

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in D$ *sao cho* $\bar{x} \in P(\bar{x})$ *và*

$\langle G(\bar{x}), \theta(\bar{x}, t)\rangle \not\subseteq -\mathrm{int}\mathcal{C}(\bar{x})$ *với mọi* $t \in P(\bar{x})$.

Chú ý.

1) Nếu với mỗi $x \in D$ cố định, ánh xạ $\theta(x,.) : D \to X$ liên tục thì điều kiện ii) của Hệ quả 2.4.10 (tương ứng, 2.4.9 – 2.4.11) xảy ra.

2) Nếu với mỗi $x \in D$ cố định, ánh xạ $\theta(x,.) : D \to X$ tuyến tính, thì điều kiện iv) của Hệ quả 2.4.10 (tương ứng, 2.4.9 – 2.4.11) xảy ra.

3) Nếu $Y = \mathbb{R}, \mathcal{C}(\bar{x}) \equiv \mathbb{R}^+$ và $G : D \to X^*$ là ánh xạ hemi liên tục và đơn điệu; $P(x) = D, \theta(x,t) = t - x$, với mọi $x, t \in D$, thì Hệ quả 2.4.10 trở thành: Tồn tại $\bar{x} \in D$ sao cho $\langle G(\bar{x}), t - \bar{x}\rangle \geq 0$,

$$\text{(điều này tương đương với } \langle G(t), \bar{x} - t\rangle \geq 0) \text{ với mọi } t \in D). \qquad (2.10)$$

Đây chính là bất đẳng thức biến phân Stampacchia (cũng là bất đẳng thức biến phân Minty) cổ điển.

2.5 Sự ổn định của các tập nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát

Cho $X, Z, D, K, Y, \mathcal{C}$ như ở các mục trước, Λ, Γ, Σ là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff, các ánh xạ đa trị $P_i : D \times \Lambda \to 2^D$ với $i = 1, 2, Q : D \times D \times \Gamma \to 2^K$ và $F : K \times D \times D \times \Sigma \to 2^Y$. Ta xét bài toán tựa cân bằng tổng quát phụ thuộc tham số: Tìm $\bar{x} \in P_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $0 \in F(y, \bar{x}, t, \mu)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x}, \lambda), y \in Q(\bar{x}, t, \gamma)$.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda, \mu \in \Gamma, \gamma \in \Sigma$, ta đặt $E(\lambda) = \{x \mid x \in P_1(x, \lambda)\}$; $M(\lambda, \gamma, \mu) = \{x \in D \mid x \in E(\lambda) \text{ và } 0 \in F(y, x, t, \mu) \text{ với mọi } t \in P_1(x, \lambda), y \in Q(x, t, \gamma)\}$. Trong Mục 2.3, ta đã tìm được điều kiện đủ để $M(\lambda, \gamma, \mu) \neq \emptyset$. Dưới đây, ta sẽ tìm điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm có các tính chất ổn định như: Tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới theo nghĩa của Berge đối với các biến (λ, γ, μ).

Định lý 2.5.1. *Cho $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0) \in \Lambda \times \Gamma \times \Sigma$, và giả sử:*

i) P_1 là ánh xạ nửa liên tục trên, có giá trị compắc, P_2 là ánh xạ nửa liên tục dưới;

ii) Q là ánh xạ nửa liên tục dưới với ảnh compắc;

iii) Tập $A = \{(y, x, \lambda, \gamma, \mu) \mid x \in E(\lambda), 0 \in F(y, x, t, \gamma)$ *với mọi* $t \in P_2(x, \lambda), y \in Q(x, t, \mu)\}$ *là đóng.*

Khi đó, ánh xạ M *là nửa liên tục trên và đóng tại* $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh M là đóng tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Ta giả sử M không đóng, tức là tồn tại dãy $(x_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \to (x_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$, với $x_\alpha \in M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha), x_0 \notin M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Ta có $x_\alpha \in E(\lambda_\alpha)$ cùng với tính đóng của E ta suy ra $x_0 \in E(\lambda_0)$. Do $x_\alpha \in M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)$ nên

$$0 \in F(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \mu_\alpha) \text{ với mọi } t_\alpha \in P_2(x_\alpha, \lambda_\alpha), y_\alpha \in Q(x_\alpha, t_\alpha).$$

Mặt khác, $(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha) \in D$ là tập compắc nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $y_\alpha \to y_0, x_\alpha \to x_0, t_\alpha \to t_0$. Ta có $(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \in A$ và $(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \to (y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$, kéo theo $(y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0) \in A$. Từ đó, ta suy ra $x_0 \in M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Ta có mâu thuẫn. Vậy ánh xạ M đóng tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$.

Bây giờ, ta chứng minh rằng ánh xạ $M : \Lambda \times \Gamma \times \Sigma \to 2^D$ là nửa liên tục trên tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Thật vậy, giả sử ngược lại, M không là nửa liên tục trên tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Khi đó, tồn tại tập mở U chứa tập $M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$ sao cho mọi dãy $\{(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)\}$ hội tụ đến $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$ đều tồn tại $x_\alpha \in M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha), x_\alpha \notin U$. Do P_1 và có giá trị compắc nên P_1 đóng kéo theo E đóng. Ta có thể giả thiết $x_\alpha \to x_0$ và như vậy $x_0 \in E(\lambda_0)$. Nếu $x_0 \notin M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$ thì tồn tại $t_0 \in P_2(x_0, \lambda_0), y_0 \in Q(x_0, t_0, \gamma_0)$ để

$$0 \notin F(y_0, x_0, t_0, \mu_0). \tag{2.11}$$

Vì $(x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (x_0, \lambda_0)$, P_2 nửa liên tục dưới tại (x_0, λ_0), ta suy ra tồn tại $t_\alpha \in P_2(x_\alpha, \lambda_\alpha), t_\alpha \to t_0$. Vì Q là nửa liên tục dưới tại (x_0, t_0, γ_0) nên tồn tại $y_\alpha \in Q(x_\alpha, t_\alpha, \gamma_\alpha), y_\alpha \to y_0$. Vì $x_\alpha \in M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)$ nên ta suy ra $0 \in F(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \mu_\alpha)$. Vì $(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \to (y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$, $x_\alpha \in E(\lambda_\alpha), t_\alpha \in P_2(x_\alpha, \lambda_\alpha)$, $y_\alpha \in Q(x_\alpha, t_\alpha, \mu_\alpha)$, $0 \in F(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \mu_\alpha)$ và A đóng nên ta suy ra

$$(y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0) \in A.$$

Điều này chứng tỏ

$$x_0 \in E(\lambda_0);$$
$$0 \in F(y_0, x_0, t_0, \mu_0), t_0 \in P_2(x_0, \lambda_0), y_0 \in Q(x_0, t_0, \mu_0).$$

Điều này mâu thuẫn với (2.11). Vậy ta suy ra M là nửa liên tục trên. Vậy định lý được chứng minh. □

Định lý 2.5.2. *Ta giả thiết:*

i) E là ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới tại λ_0;

ii) Ánh xạ Q nửa liên tục trên và nhận giá trị compắc;

iii) P_2 là ánh xạ đóng;

iv) Tập $A = \{(y, x, t, \lambda, \gamma, \mu) \in D \times D \times D \times \Lambda \times \Gamma \times \Sigma \mid x \in P_1(x, \lambda), 0 \notin F(y, x, t, \lambda, \gamma, \mu), t \in P_2(x, \lambda), y \in Q(x, t, \mu)\}$ là tập đóng.

Khi đó, M là ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$.

Chứng minh. Ta giả sử M không nửa liên tục dưới tại $(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Tức là, tồn tại dãy $(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \to (\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$, tồn tại $x_0 \in M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$ để với mọi $x_\alpha \in M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha), x_\alpha \not\to x_0$. Vì E nửa liên tục dưới, $x_0 \in E(\lambda_0), \lambda_\alpha \to \lambda_0$ nên tồn tại $x'_\alpha \in E(\lambda_\alpha), x'_\alpha \to x_0, x'_\alpha \notin M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)$, (như ở trên ta đã thấy, không có dãy nào thuộc $M(\lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)$ hội tụ tới x_0). Từ đó, ta suy ra tồn tại $t_\alpha \in P_2(x'_\alpha, \lambda_\alpha), y_\alpha \in Q(x'_\alpha, t_\alpha, \mu_\alpha)$ để $0 \notin F(y_\alpha, x'_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha)$. Vì Q nửa liên tục trên với ảnh compắc, P_2 là ánh xạ đóng và $\{t_\alpha\} \subseteq D, \{y_\alpha\} \subseteq K$ là compắc tương đối, nên ta có thể giả thiết $y_\alpha \to y_0, t_\alpha \to t_0$ và $y_0 \in Q(x_0, t_0, \mu_0), t_0 \in P_2(x_0, \lambda_0)$. Ta có $(y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \in A, (y_\alpha, x_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha, \mu_\alpha) \to (y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Vậy $(y_0, x_0, t_0, \lambda_0, \gamma_0, \mu_0) \in A$, tức là

$$0 \notin F(y_0, x_0, t_0, \mu_0), x_0 \in P_1(x_0, \lambda_0), t_0 \in P_2(x_0, \lambda_0), y_0 \in Q(x_0, t_0, \mu_0).$$

Điều này mâu thuẫn với $x_0 \in M(\lambda_0, \gamma_0, \mu_0)$. Vậy định lý được chứng minh. □

KẾT LUẬN

Trong chương này, ở các Mục 2.3 và 2.4 chúng tôi đã chứng minh điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 và các bài toán liên quan như: bài toán tựa cân bằng vô hướng, bao hàm thức tựa biến phân, bài toán tựa quan hệ biến phân và đặc biệt là các bài toán tựa cân bằng Pareto và yếu loại 1 và loại 2, các bài toán bất đẳng thức tựa biến phân véctơ. Phần cuối chương, Mục 2.5, chứng minh tính ổn định của tập nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát.

Chương 3

BÀI TOÁN BAO HÀM THỨC TỰA BIẾN PHÂN PARETO HỖN HỢP

Năm 2004, Nguyễn Xuân Tấn [48] đã mở rộng bất đẳng thức biến phân Stampacchia, bất đẳng thức biến phân Minty sang trường hợp véctơ và trường hợp ánh xạ đa trị, trường hợp miền ràng buộc luôn luôn ở dạng động và đặt tên là bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại trên và dưới. Cùng năm đó, Nguyễn Xuân Tấn và Đinh Thế Lục [38] cũng đã mở rộng những bất đẳng thức biến phân này cho trường hợp tương tự với miền ràng buộc cũng luôn biến dạng qua các ánh xạ đa trị khác nhau và đặt tên cho chúng là bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng loại 2. Ta nhắc lại các bài toán này qua ngôn ngữ toán học như sau:

Cho X, Y, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. Giả sử $D \subset X, K \subset Z$ là các tập con không rỗng và $C \subseteq Y$ là nón lồi, đóng. Các ánh xạ đa trị $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, P : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$ và $F : K \times D \times D \to 2^Y$.

1. Bài toán: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

   $$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}) \text{ và}$$
   $$F(\bar{y}, \bar{x}, t) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

   được gọi là *bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên loại 1.*

2. Bài toán: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

   $$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}) \text{ và}$$
   $$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \subseteq F(\bar{y}, \bar{x}, t) - C \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}),$$

được gọi là *bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới loại 1.*

3. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\bar{x} \in P(\bar{x}) \text{ và } F(y, \bar{x}, t) \subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}) + C \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t),$$

được gọi là *bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng trên loại 2.*

4. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\bar{x} \in P(\bar{x}) \text{ và } F(y, \bar{x}, \bar{x}) \subseteq F(y, \bar{x}, t) - C \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t),$$

được gọi là *bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng dưới loại 2.*

Tương tự, các loại bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto, thực sự, yếu cũng được nghiên cứu.

Năm 2012, Trương Thị Thùy Dương, trong luận án tiến sĩ của mình, đã nghiên cứu các bài toán bao hàm thức tựa biến phân lý tưởng hỗn hợp loại 1 và loại 2 và đã thu được một số kết quả lý thú, có ý nghĩa khoa học cao và đã công bố trên tạp chí Journal of Global Optimization có uy tín trên thế giới. Tuy nhiên tác giả mới chỉ xét được cho những lớp ánh xạ đa trị giống tựa lồi. Lớp các ánh xạ đa trị lồi theo nón vẫn chưa được xét đến. Các điều kiện khác được xét trong bài báo đó khá chặt. Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp với các điều kiện đơn giản hơn.

3.1 Đặt bài toán

Ta thường gặp bài toán thực tế sau: Cho hai công ty A, B, trong đó công ty A chuyên sản xuất hàng tiêu dùng và công ty B chuyên tiêu thụ hàng. Hai công ty này có quan hệ hợp tác với nhau. Công ty A có tập chiến lược D, công ty B có tập chiến lược K. Sự thành bại của mỗi công ty phụ thuộc vào chiến lược của người lãnh đạo. Với mỗi chiến lược $x \in D, y \in K$, lãnh đạo công ty A có tập chỉ đạo $S(x, y)$, lãnh đạo công ty mẹ của công ty A có tập chỉ đạo $P(x)$, thuế kinh doanh là $Q(x, t)$. Lãnh đạo công ty B có tập chỉ đạo trực tiếp là $T(x, y)$. Mục tiêu sản xuất của công ty A được biểu thị qua ánh xạ F_2, mục tiêu kinh doanh của công ty B được biểu thị qua ánh xạ F_1.

Mục đích của việc hợp tác làm ăn của cả hai công ty là tìm ra một phương án sản xuất, kinh doanh thông qua chỉ đạo của lãnh đạo công ty mình và đối tác sao cho:

1) Hoạt động kinh doanh của công ty B không bao giờ rơi vào tình trạng bất ổn, với mọi tiêu chí chỉ đạo T của lãnh đạo công ty.

2) Sản xuất của công ty A không bị mất cân bằng, với mọi tiêu chí chỉ đạo P của lãnh đạo công ty mẹ, sau khi trừ các loại thuế Q.

Ta có thể mô tả bài toán trên qua mô hình toán học sau đây:

Cho X, Y, Y_1, Y_2, Z là các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff. Giả sử $D \subset X, K \subset Z$ là các tập con không rỗng và $C_i \subseteq Y_i, i = 1, 2$, là các nón lồi, đóng. Kí hiệu 2^A là tập hợp các tập con của tập hợp A. Các ánh xạ đa trị $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K; P : D \to 2^D, Q : K \times D \to 2^K$ và $F_1 : K \times K \times D \to 2^{Y_1}, F_2 : K \times D \times D \to 2^{Y_2}$, ta có các bài toán sau:

1. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-trên

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

2. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-dưới

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-trên

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

4. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới-dưới

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Nhận xét.

i) Nếu $S(x,y) = P(x) \equiv D, T(x,y) = Q(x,t) \equiv K$ với mọi $x, t \in D, y \in K$, F_1, F_2 là các ánh xạ đa trị thỏa mãn $F_1(y,y,x) \subseteq C_1$ và $F_2(y,x,x) \subseteq C_2$ với mọi $(x,y) \in D \times K$, thì bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên - trên trở thành bài toán cân bằng sau đây: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq -(C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in K,$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq -(C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in D, y \in K.$$

Thật vậy, ta có $-(C_1 \backslash \{0\} \subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \cap C_1 - F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \cap C_1 - (C_1 \setminus \{0\}))$ $\subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \cap C_1 - C_1 - (C_1 \setminus \{0\})) \subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \cap C_1 - (C_1 \setminus \{0\})) \subseteq$ $F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})$. Từ đó ta suy ra rằng

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq -(C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in K.$$

Tương tự, ta có $F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq -(C_2 \setminus \{0\})$ với mọi $t \in D, y \in K$.

ii) Khi các ánh xạ F_1, F_2 là những ánh xạ đơn trị thì bốn bài toán này trùng nhau. Khi ấy, chúng trở thành một bài toán tựa tối ưu Pareto hỗn hợp. Hơn nữa, nếu $S(x,y) = P(x) \equiv D, T(x,y) = Q(x,t) \equiv K$, với mỗi $x, t \in D, y \in K$, thì các bài toán trên trở thành: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \notin F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in K,$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \notin F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in D, y \in K.$$

Điều này cho thấy

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \in \text{PMin}\,(F_1(\bar{y}, K, \bar{x})|C_1) \text{ và } F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \in \text{PMin}\,(F_2(y, \bar{x}, D)|C_2)\,.$$

iii) Nếu $Y_1 = Y_2 = \mathbb{R}$, không gian các số thực và $C = \mathbb{R}_+$, tập các số thực không âm, thì ta có

$$\begin{aligned} F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) &\geq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \text{ với mọi } v \in K \\ \text{và } F_2(y, \bar{x}, t) &\geq F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \text{ với mọi } t \in D, y \in K. \end{aligned}$$

Điều này cho thấy $(\bar{x}, \bar{y})$ là nghiệm của hệ các bài toán tối ưu.

iv) Khi F_1 là ánh xạ hằng, bài toán trên trở thành bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 2.
Khi F_2 là ánh xạ hằng, chỉ cần đổi vai trò x và y, S và T, D và K cho nhau, bài toán trên trở thành bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1. Các bài toán này đã được Bùi Thế Hùng và Nguyễn Xuân Tấn xét đến trong [26].

Ta cũng có nhận xét tương tự với các bài toán còn lại. Mục đích của chương này là tìm các điều kiện đủ cho việc tồn tại nghiệm của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp nêu trên.

Ta nhắc lại một số kết quả sau, chúng được ứng dụng trực tiếp trong chứng minh sự tồn tại nghiệm của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp.

Mệnh đề 3.1.1. ([?]) *Cho X, D và Y như trong định nghĩa trên, $C \subseteq Y$ là nón và $\xi \in C'$, $F : D \to 2^Y$.*

i) Nếu F là ánh xạ đa trị C -liên tục trên (dưới) với giá trị không rỗng compắc yếu thì hàm $f : D \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi

$$f(x) = \max_{z \in F(x)} < \xi, z >$$

là nửa liên tục trên (dưới) (tại $x_0 \in domF$).

ii) Nếu F là ánh xạ đa trị C -liên tục trên (dưới) với giá trị không rỗng compắc yếu thì hàm $g : D \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi

$$g(x) = \min_{z \in F(x)} < \xi, z >$$

là nửa liên tục dưới (trên) (tại $x_0 \in domF$).

Mệnh đề 3.1.2. ([?]) *Cho* X, D, C, F *và* Y *như trong mệnh đề trên,* $\xi \in C'$.

Nếu F *là ánh xạ đa trị* C *-lồi trên (dưới) với giá trị không rỗng compắc yếu thì hàm* f *(tương ứng,* g*) định nghĩa như trên là hàm lồi.*

3.2 Sự tồn tại nghiệm

3.2.1. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên-trên

Cho các ánh xạ đa trị S, T, P, Q và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.

Định lý 3.2.1. *Giả thiết các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S *là ánh xạ có giá trị không rỗng lồi và có nghịch ảnh mở,* T *là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập* $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ *là đóng;*

iii) P *có nghịch ảnh mở và* $P(x) \subseteq S(x, y)$*, với mọi* $(x, y) \in A$*. Với* $t \in D$*,* $Q(., t) : D \to 2^K$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) Ánh xạ F_1, F_2 *có giá trị không rỗng, compắc yếu. Ánh xạ* F_1 *là* $(-C_1)-$ *liên tục trên và* C_1- *liên tục dưới; Với* $t \in D$*, ánh xạ* $F_2(., ., t)$ *là* $(-C_2)$*-liên tục trên và với* $y \in K$*, ánh xạ đa trị* $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ *được xác định bởi* $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ *là* C_2-*liên tục dưới;*

v) Với $(x, y) \in D \times K$*, ánh xạ* $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ *là* C_1- *lồi dưới (hoặc,* C_1-*giống tựa lồi dưới) và với* $y \in K$*, ánh xạ* $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ *là* C_2*-lồi dưới theo đường chéo (hoặc,* C_2*-giống tựa lồi dưới theo đường chéo) đối với biến thứ hai.*

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Cho các phiếm hàm tuyến tính liên tục $\xi_i \in C_i'^{+}, i = 1, 2$ và $\epsilon > 0$ tùy ý. Vì ξ_i liên tục, tồn tại lân cận V của gốc trong Y_i sao cho $\xi_i(V) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}), i = 1, 2$. Ta định nghĩa ánh xạ $H_1 : D \times K \to 2^K$, $H_1(x, y) = \{y' \in T(x, y) | \max\limits_{z \in F_1(y, y', x)} \langle \xi_1, z\rangle \leq \max\limits_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle$ với mọi $v \in T(x, y)\}$.

Với mỗi $(x, y) \in D \times K$, trước hết, ta chỉ ra rằng $H_1(x, y)$ là tập không rỗng. Thật vậy, $(x, y) \in D \times K, T(x, y)$ là tập compắc, áp dụng Mệnh đề 3.1.1 với $D = T(x, y)$ và $F = F_1(y, ., x)$ ta có hàm $f : T(x, y) \to \mathbb{R}$,

$$f(v) = \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle,$$

là hàm nửa liên tục dưới. Vì vậy tồn tại $y' \in T(x, y)$ sao cho $f(y') = \min\limits_{v \in T(x, y)} f(v)$. Từ đó, ta suy ra

$$\max_{z \in F_1(y, y', x)} \langle \xi_1, z\rangle \leq \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y) \text{ và } y' \in H_1(x, y).$$

Hơn nữa, với $(x, y) \in D \times K$, ta chỉ ra rằng $H_1(x, y)$ là tập lồi. Thật vậy, cho $y_1', y_2' \in H_1(x, y)$ và $\lambda \in [0, 1]$. Do tập $T(x, y)$ là lồi, ta suy ra $\lambda y_1' + (1 - \lambda) y_2' \in T(x, y)$,

$$\begin{aligned} \max_{z \in F_1(y, y_1', x)} \langle \xi_1, z\rangle &\leq \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle, \\ \max_{z \in F_1(y, y_2', x)} \langle \xi_1, z\rangle &\leq \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y). \end{aligned}$$

Nếu $F_1(y, ., x)$ là ánh xạ C_1-lồi dưới, ta có

$$F_1(y, \lambda y_1' + (1 - \lambda) y_2', x) \subseteq \lambda F_1(y, y_1', x) + (1 - \lambda) F_1(y, y_2', x) - C_1.$$

Điều này kéo theo

$$\max_{z \in F_1(y, \lambda y_1' + (1-\lambda) y_2', x)} \langle \xi_1, z\rangle \leq \lambda \max_{z \in F_1(y, y_1', x)} \langle \xi_1, z\rangle + (1 - \lambda) \max_{z \in F_1(y, y_2', x)} \langle \xi_1, z\rangle,$$

và do đó

$$\max_{z \in F_1(y, \lambda y_1' + (1-\lambda) y_2', x)} \langle \xi_1, z\rangle \leq \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z\rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y).$$

Vậy, $\lambda y_1' + (1 - \lambda) y_2' \in H_1(x, y)$ và vì vậy $H_1(x, y)$ là tập lồi.

Nếu $F_1(y,.,x)$ là ánh xạ C_1- giống như tựa lồi dưới, ta có

$$\begin{aligned} F_1(y,\lambda y_1'+(1-\lambda)y_2',x) &\subseteq F_1(y,y_1',x)-C_1,\\ \text{hoặc, } F_1(y,\lambda y_1'+(1-\lambda)y_2',x) &\subseteq F_1(y,y_2',x)-C_1. \end{aligned}$$

Trong cả hai trường hợp, ta đều suy ra

$$\max_{z\in F_1(y,\lambda y_1'+(1-\lambda)y_2',x)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_1(y,v,x)}\langle\xi_1,z\rangle \text{ với mọi } v\in T(x,y).$$

Như vậy, $\lambda y_1'+(1-\lambda)y_2'\in H_1(x,y)$ và $H_1(x,y)$ là tập lồi.

Tiếp theo, ta chứng tỏ rằng H_1 là ánh xạ đóng. Cho $x_\alpha\to x, y_\alpha\to y, y_\alpha'\in H_1(x_\alpha,y_\alpha), y_\alpha'\to y'$. Ta chỉ ra $y'\in H_1(x,y)$. Thật vậy, từ $y_\alpha'\in T(x_\alpha,y_\alpha)$ và T là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị đóng ta có $y'\in T(x,y)$. Từ $y_\alpha'\in H_1(x_\alpha,y_\alpha)$, ta có

$$\max_{z\in F_1(y_\alpha,y_\alpha',x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_1(y_\alpha,v,x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle \text{ với mọi } v\in T(x_\alpha,y_\alpha).$$

Với $v\in T(x,y)$, do T nửa liên tục dưới, tồn tại $v_\alpha\in T(x_\alpha,y_\alpha)$ sao cho $v_\alpha\to v$. Ta có

$$\max_{z\in F_1(y_\alpha,y_\alpha',x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_1(y_\alpha,v_\alpha,x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle \text{ với mọi } \alpha.$$

Vì F_1 là ánh xạ $(-C_1)-$ liên tục trên và C_1- liên tục dưới, tồn tại chỉ số α_0 sao cho

$$\begin{aligned} F_1(y_\alpha,v_\alpha,x_\alpha) &\subseteq F_1(y,v,x)+V-C_1 \text{ với mọi } \alpha\ge\alpha_0,\\ F_1(y,y',x) &\subseteq F_1(y_\alpha,y_\alpha',x_\alpha)+V-C_1 \text{ với mọi } \alpha\ge\alpha_0. \end{aligned}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} \max_{z\in F_1(y_\alpha,v_\alpha,x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle &\le \max_{z\in F_1(y,v,x)}\langle\xi_1,z\rangle+\tfrac{\epsilon}{2},\\ \max_{z\in F_1(y,y',x)}\langle\xi_1,z\rangle &\le \max_{z\in F_1(y_\alpha,y_\alpha',x_\alpha)}\langle\xi_1,z\rangle+\tfrac{\epsilon}{2} \text{ với mọi } \alpha\ge\alpha_0. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\max_{z\in F_1(y,y',x)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_1(y,v,x)}\langle\xi_1,z\rangle+\epsilon$$

$$\text{hay, } \max_{z\in F_1(y,y',x)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_1(y,v,x)}\langle\xi_1,z\rangle \qquad \text{với mọi } v\in T(x,y).$$

Ta suy ra $y' \in H_1(x,y)$ và ánh xạ H_1 đóng. Do K compắc nên ta khẳng định H_1 là ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị không rỗng lồi đóng.

Ta khẳng định tập hợp $A' = \{(x,y) \mid x \in S(x,y), y \in H_1(x,y)\}$ đóng. Thật vậy, giả sử rằng $x_\alpha \to x, y_\alpha \to y, x_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha), y_\alpha \in H_1(x_\alpha, y_\alpha)$. Từ đó ta suy ra $x_\alpha \in S(x_\alpha, y_\alpha), y_\alpha \in T(x_\alpha, y_\alpha)$. Vì $A = \{(x,y) \mid x \in S(x,y), y \in T(x,y)\}$ là tập đóng, nên $x \in S(x,y)$ $y \in T(x,y)$. Do H_1 là ánh xạ đa trị đóng và $y_\alpha \in H_1(x_\alpha, y_\alpha); (x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y)$, ta có $y \in H_1(x,y)$. Vì vậy, $x \in S(x,y), y \in H_1(x,y)$.

Tiếp theo, ta định nghĩa ánh xạ $M_1 : D \to 2^D$,

$$M_1(x) = \left\{ t \in P(x) | \max_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle > \max_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với } \; y \in Q(x,t) \right\}.$$

Ta chỉ ra rằng M_1 có nghịch ảnh mở và với mọi $x \in D, x \notin coM_1(x)$. Thật vậy, ta thấy rằng

$$M_1(x) = \left\{ t \in D | \max_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle > \max_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với } \; y \in Q(x,t) \right\} \cap P(x).$$

Với mỗi $t \in D$, ta có

$$M_1^{-1}(t) = \left\{ x \in D | \max_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle > \max_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với } \; y \in Q(x,t) \right\} \cap P^{-1}(t).$$

Ta đặt $B(t) = \left\{ x \in D | \max_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle > \max_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với } y \in Q(x,t) \right\}.$

Trước hết ta chỉ ra rằng $B(t)$ là tập mở trong D. Xét tập

$$D \backslash B(t) = \left\{ x \in D | \max_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle \leq \max_{z \in F_2(y,x,t)} < \xi_2, z > \text{ với mọi } \; y \in Q(x,t) \right\}.$$

Cho $x_\alpha \in D \setminus B(t)$ và $x_\alpha \to x$. Ta chỉ ra $x \in D \setminus B(t)$. Thật vậy, từ $x_\alpha \in D \setminus B(t)$, ta có

$$\max_{z \in F_2(y,x_\alpha,x_\alpha)} \langle \xi_2, z \rangle \leq \max_{z \in F_2(y,x_\alpha,t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với mọi } \; y \in Q(x_\alpha, t).$$

Lấy tùy ý $y \in Q(x,t)$. Do $Q(.,t) : D \to 2^K$ là nửa liên tục dưới, tồn tại $y_\alpha \in Q(x_\alpha, t)$ với $y_\alpha \to y$. Vì tính C_2-liên tục dưới của ánh xạ N_2 và $(-C_2)-$liên tục trên của $F_2(.,.,t)$, ta suy ra với mọi lân cận V của gốc trong Y_2, tồn tại α_1

sao cho

$$\begin{aligned} F_2(y,x,x) &\subseteq F_2(y_\alpha,x_\alpha,x_\alpha)+V-C_2,\\ F_2(y_\alpha,x_\alpha,t) &\subseteq F_2(y,x,t)+V-C_2 \text{ với mọi } \alpha\ge\alpha_1. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\max_{z\in F_2(y,x,x)}\langle\xi_2,z\rangle \le \max_{z\in F_2(y,x,t)}\langle\xi_2,z\rangle \text{ với mọi } \ y\in Q(x,t),$$

và $x\in D\setminus B(t)$. Cho nên $D\setminus B(t)$ là tập con đóng của D và $B(t)$ là tập con mở trong D. Như vậy, $M_1^{-1}(t)=B(t)\cap P^{-1}(t)$ là tập mở với mọi $t\in D$, nghĩa là ánh xạ M_1 có nghịch ảnh mở.

Hơn nữa, giả sử tồn tại $x\in D$ sao cho $x\in coM_1(x)$. Khi đó tồn tại $t_1,t_2,...,t_n\in M_1(x)$ sao cho $x=\sum_{i=1}^n\alpha_it_i,\alpha_i\ge 0,\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$. Điều này suy ra

$$\max_{z\in F_2(y_i,x,x)}\langle\xi_2,z\rangle > \max_{z\in F_2(y_i,x,t_i)}\langle\xi_2,z\rangle \text{ với } \ y_i\in Q(x,t_i). \tag{3.1}$$

Mặt khác, nếu $F_2(y,.,.)$ là C_2-lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai, ta có

$$F_2(y,x,x)\subseteq\sum_{j=1}^n\alpha_jF_2(y,x,t_j)-C_2 \ \text{ với mọi } y\in K.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\max_{z\in F_2(y,x,x)}\langle\xi_2,z\rangle &\le \max_{z\in\sum_{j=1}^n\alpha_jF_2(y,x,t_j)-C_2}\langle\xi_2,z\rangle\\ &\le \max_{j=1,...,n}\max_{z_j\in F_2(y,x,t_j)}\langle\xi_2,z\rangle \text{ với mọi } \ y\in K.\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (3.1).

Nếu $F_2(y,.,.)$ là C_2-giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai, tồn tại chỉ số $j\in\{1,...,n\}$ sao cho $F_2(y,x,x)\subseteq F_2(y,x,t_j)-C_2$ với mọi $y\in K$. Từ đó, ta suy ra

$$\max_{z\in F_2(y,x,x)}\langle\xi_1,z\rangle \le \max_{z\in F_2(y,x,t_j)}\langle\xi_1,z\rangle \text{ với mọi } y\in K, \text{ mâu thuẫn với } (3.1).$$

Trong cả hai trường hợp, ta có $x\notin coM_1(x)$ với mọi $x\in D$.

Như vậy, S, T, H_1 và M_1 thỏa mãn các giả thiết của Định lý 1.2.5. Từ đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in H_1(\bar{x}, \bar{y})$ và $S(\bar{x}, \bar{y}) \cap M_1(\bar{x}) = \emptyset$. Ta suy ra $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ và

$$\max_{z \in F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x})} \langle \xi_1, z \rangle \leq \max_{z \in F_1(\bar{y}, v, \bar{x})} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}). \tag{3.2}$$

Và, với mọi $t \in P(\bar{x})$ ta có $t \in S(\bar{x}, \bar{y})$ và $t \notin M_1(\bar{x})$. Vì vậy, ta có

$$\max_{z \in F_2(y, \bar{x}, \bar{x})} \langle \xi_2, z \rangle \leq \max_{z \in F_2(y, \bar{x}, t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với mọi } \ y \in Q(\bar{x}, t).$$

Ta sẽ chỉ ra $F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})$ với mọi $v \in T(\bar{x}, \bar{y})$. Giả sử tồn tại $v^* \in T(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho

$$F_1(\bar{y}, v^*, \bar{x}) \subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}).$$

Từ đó, ta suy ra

$$\max_{z \in F_1(\bar{y}, v^*, \bar{x})} \langle \xi_2, z \rangle < \max_{z \in F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x})} \langle \xi_2, z \rangle, \text{ mâu thuẫn với (3.2)}.$$

Như vậy, ta có $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}).$$

Lập luận tương tự, ta được

$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

3.2.2. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp trên - dưới

Cho các ánh xạ đa trị S, T, P, Q và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.

Định lý 3.2.2. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) *S là ánh xạ có giá trị lồi không rỗng và có nghịch ảnh mở. T là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng, lồi, đóng và tập $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ đóng;*

iii) *P có nghịch ảnh mở và $P(x) \subseteq S(x, y)$ với mọi $(x, y) \in A$. Với $t \in D$, $Q(., t) : D \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) *Ánh xạ F_1 là $(-C_1)-$ liên tục trên và C_1- liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc yếu. Với mỗi $t \in D$ cố định, ánh xạ $F_2(., ., t)$ là $(-C_2)$- liên tục dưới và với mỗi $y \in K$ cố định, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ là C_2-liên tục trên;*

v) *Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi dưới (hoặc, C_1-giống tựa lồi dưới) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc, C_2-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

Khi đó tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Lập luận tương tự Định lý 3.2.1 với $H_2 \equiv H_1$ và M_1 thay bởi $M_2 : D \to 2^D$,

$$M_2(x) = \{t \in P(x) | \min_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle < \min_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle, \text{ với } y \in Q(x, t)\}.$$

□

3.2.3. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới - trên

Định lý 3.2.3. *Cho các ánh xạ đa trị S, T, P, Q và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.*

Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) *D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S là ánh xạ có giá trị lồi không rỗng và có nghịch ảnh mở; T là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ đóng;

iii) P có nghịch ảnh mở và $P(x) \subseteq S(x, y)$ với mọi $(x, y) \in A$. Với $t \in D$, $Q(., t) : D \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;

iv) Ánh xạ F_1, F_2 có giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ F_1 là C_1- liên tục trên và $(-C_1)-$ liên tục dưới. Với $t \in D$, ánh xạ $F_2(., ., t)$ là $(-C_2)$- liên tục trên và với mỗi $y \in K$, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ là C_2-liên tục dưới;

v) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi trên (hoặc, C_1-giống tựa lồi trên) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc, C_2-giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Phần chứng minh định lý tương tự như Định lý 3.2.1 với H_1, M_1 thay bởi $H_3 : D \times K \to 2^K, M_3 : D \to 2^D$,

$$H_3(x, y) = \{y' \in T(x, y) | \min_{z \in F_1(y, y', x)} \langle \xi_1, z \rangle \le \min_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y)\}$$

$$\text{và } M_3(x) = \{t \in P(x) | \max_{z \in F_2(y, x, x)} \langle \xi_2, z \rangle > \max_{z \in F_2(y, x, t)} \langle \xi_2, z \rangle \text{ với } y \in Q(x, t)\}.$$

□

3.2.4. Bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp dưới - dưới

Cho các ánh xạ đa trị S, T, P, Q và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu.

Định lý 3.2.4. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) S là ánh xạ có giá trị không rỗng lồi và có nghịch ảnh mở; T là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập $A = \{(x,y) \in D \times K | (x,y) \in S(x,y) \times T(x,y)\}$ đóng;

iii) P có nghịch ảnh mở và $P(x) \subseteq S(x,y)$, với mọi $(x,y) \in A$. Với $t \in D$, $Q(.,t) : D \to 2^K$ là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;

iv) Ánh xạ F_1, F_2 có các giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ F_1 là C_1- liên tục trên và $(-C_1)-$ liên tục dưới. Với $t \in D$, ánh xạ $F_2(.,.,t)$ là $(-C_2)-$ liên tục dưới và với $y \in K$, ánh xạ đa trị $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ xác định bởi $N_2(y,x) = F_2(y,x,x)$ là C_2–liên tục trên;

v) Với $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y,.,x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi trên (hoặc, C_1-giống tựa lồi trên) và với $y \in K$, ánh xạ $F_2(y,.,.) : D \times D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc, C_2-giống tựa lồi trên theo đường chéo đối với biến thứ hai).

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(y, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Chứng minh. Ta định nghĩa ánh xạ $H_4 : D \times K \to 2^K, M_4 : D \to 2^D$,

$$H_4(x,y) = \{y' \in T(x,y) | \min_{z \in F_1(y,y',x)} \langle \xi_1, z \rangle \leq \min_{z \in F_1(y,v,x)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(x,y)\}$$

và $M_4(x) = \{t \in P(x) | \min_{z \in F_2(y,x,x)} \langle \xi_2, z \rangle > \min_{z \in F_2(y,x,t)} \langle \xi_2, z \rangle$ với $y \in Q(x,t)\}$.

Chứng minh định lý này cũng hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 3.2.1 với H_1, M_1 lần lượt được thay bởi H_4, M_4. □

Chú ý.

Giả sử các giả thiết của các Định lý 3.2.1–3.2.4 được thỏa mãn trừ *i)* và *iii)* (tương ứng) được thay bởi:

i') S là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị không rỗng, lồi;

iii') P là ánh xạ nửa liên tục dưới và $P(x) \subseteq S(x,y)$ với $x \in S(x,y), y \in T(x,y)$ và tập con $A = \{(x,y) \in D \times K | (x,y) \in S(x,y) \times T(x,y)\}$ đóng.

Khi đó, kết luận của các định lý trên vẫn đúng.

Chứng minh. Cho $\mathcal{U}$ là cơ sở lân cận lồi đóng của gốc trong không gian X và $\cap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$. Với mỗi $U \in \mathcal{U}$, ta định nghĩa ánh xạ đa trị $S_U : D \times K \to 2^D, P_U : D \to 2^D$,

$$S_U(x,y) = (S(x,y) + U) \cap D, P_U(x) = (P(x) + U) \cap D, x \in D, y \in K.$$

Ta thấy rằng $S_U^{-1}(t)$ là các tập mở trong $D \times K$, $P_U^{-1}(t)$ là các tập mở trong D với mỗi $t \in D$ và tập $A = \{(x,y) \mid x \in S_U(x,y), y \in T(x,y)\}$ đóng. Vì vậy, tất cả các điều kiện của các Định lý 3.2.1- 3.2.4 đối với các ánh xạ S_U, P_U, T, Q và F_1, F_2 được thỏa mãn, tức là tồn tại $(\bar{x}_U, \bar{y}_U) \in D \times K$ sao cho

$$\begin{aligned}
&\bar{x_U} \in S_U(\bar{x_U}, \bar{y_U}), \bar{y_U} \in T(\bar{x_U}, \bar{y_U}),\\
&F_1(\bar{y_U}, v, \bar{x_U}) \not\subseteq F_1(\bar{y_U}, \bar{y_U}, \bar{x_U}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x_U}, \bar{y_U}),\\
&F_2(y, \bar{x_U}, t) \not\subseteq F_2(y, \bar{x_U}, \bar{x_U}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x_U}), y \in Q(\bar{x_U}, t).
\end{aligned}$$

Do D, K compắc, không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\bar{x}_U$ hội tụ tới $\bar{x}$ và $\bar{y}_U$ hội tụ $\bar{y}$ khi U thắt dần. Từ tính đóng của tập A ta suy ra điều cần chứng minh. □

3.3 Một số bài toán liên quan

3.3.1. Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto.

Tiếp theo, cho các ánh xạ đa trị S, T và $F_i, i = 1, 2$ với giá trị không rỗng như trong phần mở đầu, ta xét các bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto như sau:

1. Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên-trên loại 1

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$\begin{aligned}
&F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),\\
&F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).
\end{aligned}$$

2. Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto trên-dưới loại 1

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

3. Hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto dưới-dưới loại 1

Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ thỏa mãn: $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Dưới đây ta chỉ ra một số điều kiện để tồn tai nghiệm cho các hệ loại này.

Định lý 3.3.1. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) Các ánh xạ S và T liên tục với giá trị không rỗng lồi đóng;

iii) Ánh xạ F_i là $(-C_i)-$ liên tục trên và C_i- liên tục dưới với giá trị compắc không rỗng, $i = 1, 2$;

iv) Với $(x, y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi dưới (hoặc C_1-giống tựa lồi dưới) và ánh xạ $F_2(y, x, .) : D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi dưới (hoặc C_2-giống tựa lồi dưới).

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Chứng minh. Cho $\xi_i \in C_i'^{+}, i = 1, 2$ và $\epsilon > 0$ tùy ý. Từ $\xi_i, i = 1, 2$, liên tục, tồn tại lân cận V của gốc trong Y sao cho $\xi_i(V) \subseteq (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$. Ta định nghĩa ánh xạ $H_i : D \times K \to 2^K, i = 1, 2$, bởi

$$H_1(x, y) = \{y' \in T(x, y) | \max_{z \in F_1(y, y', x)} \langle \xi_1, z \rangle \leq \max_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y)\},$$

$$H_2(x,y) = \{x' \in S(x,y) | \max_{z \in F_2(y,x,x')} \langle \xi_1, z \rangle \leq \max_{z \in F_1(y,x,t)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } t \in S(x,y)\}.$$

Bằng lập luận tương tự như trong Định lý 3.2.1, ta được $H_i, i = 1, 2$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên với giá trị compắc lồi không rỗng. Xét ánh xạ $G : D \times K \to 2^{D \times K}$, $G(x,y) = H_2(x,y) \times H_1(x,y)$, $(x,y) \in D \times K$. Khi đó, G cũng là một ánh xạ nửa liên tục trên với giá trị lồi, compắc, không rỗng. Áp dụng Định lý điểm bất động Ky Fan, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $(\bar{x}, \bar{y}) \in G(\bar{x}, \bar{y})$. Từ đó suy ra $\bar{x} \in H_2(\bar{x}, \bar{y})$ và $\bar{y} \in H_1(\bar{x}, \bar{y})$ và khi đó

$$\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) \not\subseteq F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$ □

Định lý 3.3.2. *Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) D, K là các tập con không rỗng lồi compắc;

ii) Các ánh xạ S và T liên tục với giá trị không rỗng, lồi, đóng;

iii) Ánh xạ F_1 là $(-C_1)-$ liên tục trên và C_1- liên tục dưới với giá trị không rỗng, compắc yếu; Ánh xạ F_2 là $(-C_2)-$ liên tục dưới và C_2- liên tục trên với giá trị không rỗng, compắc yếu;

iv) Với $(x,y) \in D \times K$, ánh xạ $F_1(y,.,x) : K \to 2^{Y_1}$ là C_1- lồi dưới (hoặc C_1-giống tựa lồi dưới) và ánh xạ $F_2(y,x,.) : D \to 2^{Y_2}$ là C_2-lồi trên (hoặc C_2-giống tựa lồi trên).

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Chứng minh. Lập luận tương tự Định lý 3.3.1 với

$$H_1(x,y) = \{y' \in T(x,y) | \max_{z \in F_1(y,y',x)} \langle \xi_1, z \rangle \leq \max_{z \in F_1(y,v,x)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(x,y)\},$$

$$H_2(x,y) = \{x' \in S(x,y) | \min_{z \in F_2(y,x,x')} \langle \xi_1, z \rangle \leq \min_{z \in F_1(y,x,t)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } t \in S(x,y)\},$$

ta có điều cần chứng minh. □

Định lý 3.3.3. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) Các ánh xạ S *và* T *liên tục với giá trị lồi không rỗng đóng;*

iii) Ánh xạ F_i *là* $(C_i)-$ *liên tục trên và* $(-C_i)-$ *liên tục dưới với giá trị không rỗng compắc yếu,* $i = 1, 2$*;*

iv) Với $(x, y) \in D \times K$*, ánh xạ* $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ *là* C_1- *lồi trên (hoặc* C_1-*giống tựa lồi trên) và ánh xạ* $F_2(y, x, .) : D \to 2^{Y_2}$ *là* C_2*-lồi trên (hoặc* C_2*-giống tựa lồi trên).*

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

$$F_1(\bar{y}, \bar{y}, \bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) + (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \not\subseteq (F_2(\bar{y}, \bar{x}, t) + (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

Chứng minh. Lập luận tương tự Định lý 3.3.1 với

$$H_1(x, y) = \{y' \in T(x, y) | \min_{z \in F_1(y, y', x)} \langle \xi_1, z \rangle \leq \min_{z \in F_1(y, v, x)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } v \in T(x, y)\},$$

$$H_2(x, y) = \{x' \in S(x, y) | \min_{z \in F_2(y, x, x')} \langle \xi_1, z \rangle \leq \min_{z \in F_1(y, x, t)} \langle \xi_1, z \rangle \text{ với mọi } t \in S(x, y)\},$$

ta có điều cần chứng minh. □

3.3.2. Bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp

Trong các Định lý 3.2.1 – 3.2.4, nếu bổ sung thêm điều kiện $F_1(y, y, x) \subseteq C_1$ và $F_2(y, x, x) \subseteq C_2$ với mọi $(x, y) \in D \times K$, thì ta có các kết quả cho các bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp.

Bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp trên trên.

Định lý 3.3.4. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S *là ánh xạ có giá trị lồi không rỗng và có nghịch ảnh mở,* T *là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập* $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ *đóng;*

iii) P *có nghịch ảnh mở và* $P(x) \subseteq S(x,y)$ *với mọi* $(x,y) \in A$. *Với* $t \in D$, $Q(.,t) : D \to 2^K$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) Ánh xạ F_1, F_2 *có giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ* F_1 *là* C_1- *liên tục dưới và* $(-C_1)-$ *liên tục trên. Với* $t \in D$, *ánh xạ* $F_2(.,.,t)$ *là* $(-C_2)$-*liên tục trên và với* $y \in K$, *ánh xạ đa trị* $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ *xác định bởi* $N_2(y,x) = F_2(y,x,x)$ *là* C_2-*liên tục dưới;*

v) Với $(x,y) \in D \times K$, *ánh xạ* $F_1(y,.,x) : K \to 2^{Y_1}$ *là* C_1- *lồi dưới (hoặc,* C_1-*giống tựa lồi dưới) và với mỗi* $y \in K$, *ánh xạ* $F_2(y,.,.) : D \times D \to 2^{Y_2}$ *là* C_2-*lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc,* C_2-*giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

vi) Với $(x,y) \in D \times K$, $F_1(y,y,x) \subseteq C_1$ *và* $F_2(y,x,x) \subseteq C_2$.

Khi đó, tồn tại $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq -(C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(y,\bar{x},t) \not\subseteq -(C_2 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x},t).$$

Chứng minh. Theo Định lý 3.3.1, tồn tại $(\bar{x},\bar{y}) \in D \times K$ sao cho $\bar{x} \in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x},\bar{y})$,

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq (F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}),$$
$$F_2(y,\bar{x},t) \not\subseteq (F_2(y,\bar{x},\bar{x}) - (C_2 \setminus \{0\})) \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x},t).$$

Giả sử tồn tại $v^* \in T(\bar{x},\bar{y})$ thỏa mãn $F_1(\bar{y},v^*,\bar{x}) \subseteq -(C_1 \setminus \{0\})$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} F_1(\bar{y},v^*,\bar{x}) &\subseteq F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}) \\ &\subseteq F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - C_1 - (C_1 \setminus \{0\}) \\ &\subseteq F_1(\bar{y},\bar{y},\bar{x}) - (C_1 \setminus \{0\}), \end{aligned}$$

ta có mâu thuẫn. Vì vậy,

$$F_1(\bar{y},v,\bar{x}) \not\subseteq (-C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x},\bar{y}).$$

Tương tự, ta có $F_2(y,\bar{x},t) \not\subseteq -(C_2 \setminus \{0\}) = \emptyset$ với mọi $t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x},t)$. $\square$

Bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp trên dưới.

Định lý 3.3.5. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn:*

i) D, K *là các tập con không rỗng lồi compắc;*

ii) S *là ánh xạ có giá trị không rỗng lồi và có nghịch ảnh mở,* T *là ánh xạ đa trị liên tục với các giá trị không rỗng lồi đóng và tập* $A = \{(x, y) \in D \times K | (x, y) \in S(x, y) \times T(x, y)\}$ *là đóng;*

iii) P *có nghịch ảnh mở và với* $(x, y) \in A$, $P(x) \subseteq S(x, y)$. *Với* $t \in D$, $Q(., t) : D \to 2^K$ *là ánh xạ nửa liên tục dưới với giá trị compắc;*

iv) Ánh xạ F_1, F_2 *có giá trị không rỗng compắc yếu. Ánh xạ* F_1 *là* C_1- *liên tục dưới và* $(-C_1)-$ *liên tục trên. Với* $t \in D$, *ánh xạ* $F_2(., ., t)$ *là* $(-C_2)-$ *liên tục trên và với* $y \in K$, *ánh xạ đa trị* $N_2 : K \times D \to 2^{Y_2}$ *xác định bởi* $N_2(y, x) = F_2(y, x, x)$ *là* C_2-*liên tục dưới;*

v) Với $(x, y) \in D \times K$, *ánh xạ* $F_1(y, ., x) : K \to 2^{Y_1}$ *là* C_1- *lồi dưới (hoặc,* C_1-*giống tựa lồi dưới) và với* $y \in K$, *ánh xạ* $F_2(y, ., .) : D \times D \to 2^{Y_2}$ *là* C_2*-lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai (hoặc,* C_2*-giống tựa lồi dưới theo đường chéo đối với biến thứ hai).*

vi) Với $(x, y) \in D \times K$, $F_1(y, y, x) \subseteq C_1$ *và* $F_2(y, x, x) \subseteq C_2$.

Khi đó, tồn tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ *sao cho* $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}); \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$;

$$F_1(\bar{y}, v, \bar{x}) \nsubseteq -(C_1 \setminus \{0\}) \text{ với mọi } v \in T(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$F_2(y, \bar{x}, t) \cap -(C_2 \setminus \{0\}) = \emptyset \text{ với mọi } t \in P(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t).$$

Lập luận tương tự, ta có các kết luận cho các bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp còn lại.

Trong các ví dụ sau, cho D, K lần lượt là các tập con không rỗng của các không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff X, Z. Cho C là nón lồi, đóng, nhọn trong không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương Hausdorff Y.

Ví dụ 3.3.1. Cho $N : D\times K \to X^*, M : D\times K \to Z^*$ là các ánh xạ liên tục. Các ánh xạ $f_1 : D\times D \to Y, f_2 : K\times D\times D \to Y, g : D\times D \to \mathbb{R}, h : K\times D\times D \to \mathbb{R}$. Ta định nghĩa các ánh xạ $S : D \times K \to 2^D, T : D \times K \to 2^K, P_1 : D \to 2^D, i = 1, 2, Q : D \times D \to 2^K$ như sau:

$$S(x, y) = \{z \in D \,|\langle N(x, y), t - z\rangle \geq 0, \forall t \in D\},$$

$$T(x, y) = \{v \in K \,|\langle M(x, y), w - v\rangle \geq 0 \ \forall w \in K\},$$

$$P_1(x) = \{t \in D|g(x, t) < 0\},\ P_2(x) = \{t \in D|g(x, t) \leq 0\},$$

$$Q(x, t) = \{y \in K|h(y, x, t) \leq 0\}.$$

Xét bài toán: Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ sao cho

1) $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

2) $f_1(\bar{x}, y) \notin f_1(\bar{x}, \bar{y}) - (C \setminus \{0\})$ với mọi $y \in T(\bar{x}, \bar{y})$,

3) $f_2(y, \bar{x}, t) \notin f_2(y, \bar{x}, \bar{x}) - (C \setminus \{0\})$ với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$.

Bài toán này là trường hợp đặc biệt của một trong bốn bài toán hỗn hợp đầu tiên. Khi $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y})$ ta thấy $\bar{x}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân $\langle N(\bar{x}, \bar{y}), t - \bar{x}\rangle \leq 0$ với mọi $t \in D$, và $\bar{y}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân $\langle M(\bar{x}, \bar{y}), w - \bar{y}\rangle \leq 0$ với mọi $w \in K$.

Vì vậy, bài toán này có thể coi như bài toán tối ưu Pareto trên tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân. Định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán này suy từ các ánh xạ trên thỏa mãn các tính chất của một trong bốn định lý: Định lý 3.2.1- Định lý 3.2.4.

Ví dụ 3.3.2. Cho $R, Q : D \times K \to X^*, S : D \times K \to 2^D$. Bài toán: Tìm $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho $\langle R(\bar{x}, \bar{y}), v - \bar{y}\rangle \geq 0$ với mọi $v \in S(\bar{x}, \bar{y})$ với

$$S(x, y) = \{u \in D|\langle Q(x, y), v - u\rangle \geq 0 \text{ với mọi } v \in D\},$$

được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Bài toán này được nghiên cứu trong ([5], [27]), là trường hợp đặc biệt của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp khi $F_1(y, v, x) = \langle R(x, y), v - y\rangle, (y, v, x) \in K \times K \times D, F_2(y, x, t) = a \in Y$, là một hằng số, với $(y, x, t) \in K \times D \times D$ và x thay bởi y, T thay bởi S.

Ví dụ 3.3.3. Ánh xạ $f : D \times D \to \mathbb{R}, S_f = \{u \in D | f(u, v) \geq 0 \text{ với mọi } v \in D\}$.

Bài toán: Tìm $\bar{x} \in S_f$ sao cho $\langle R(\bar{x}, \bar{y}), v - \bar{y}\rangle \geq 0$ với mọi $v \in S_f$, được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán cân bằng và cũng là trường hợp riêng của các bài toán đã xét ở trên. (Đặt $S(x, y) = \{u \in D | f(u, v) \geq 0 \text{ với mọi } v \in D\}, (x, y) \in D \times K, F_1, F_2$ như Ví dụ 3.3.2).

Ví dụ 3.3.4. Cho ánh xạ $f : D \to D, S_f = \{t \in D | \langle f(x) - t, z - x\rangle, \forall z \in D\}$.

Bài toán: Tìm $\bar{x} \in S_f$ sao cho $\langle R(\bar{x}, \bar{y}), v - \bar{y}\rangle \geq 0$ với mọi $v \in S_f$, được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán điểm bất động và cũng là trường hợp riêng của các bài toán đã xét ở trên. (Đặt $S(x, y) = \{t \in D | \langle f(x) - t, z - x\rangle \forall z \in D\}, (x, y) \in D \times K, F_1, F_2$ như Ví dụ 3.3.2). Trong Chương 4, chúng ta sẽ xây dựng thuật toán tìm nghiệm cho dạng bài toán này.

KẾT LUẬN

Trong chương này, chúng tôi đặt ra các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp giữa loại 1 và loại 2. Ở Mục 3.2 và 3.3, chúng ta chứng minh điều kiện đủ để các bài toán đó tồn tại nghiệm và ứng dụng vào các bài toán hệ bao hàm thức tựa biến phân Pareto loại 1 và bài toán tựa cân bằng Pareto hỗn hợp.

Chương 4

PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM NGHIỆM BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

4.1 Giới thiệu bài toán

Các bài toán tựa cân bằng tổng quát muốn đưa vào ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của cuộc sống thì sau khi biết chúng có nghiệm, ta phải xây dựng được thuật toán để tìm ra nghiệm. Như ta đã trình bày, các chứng minh của các kết quả tồn tại nghiệm, cốt lõi đều dựa vào các định lý điểm bất động Ky Fan, Browder - Ky Fan và các biến thể của chúng. Rất tiếc, cho tới nay, các thuật toán để tìm các điểm bất động loại này vẫn còn đang bế tắc và đang mong chờ sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới. Trong khuôn khổ của luận án, chúng tôi quan tâm tới việc tìm thuật toán để giải bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển: Cho không gian Hilbert X với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$, D là tập con khác rỗng trong X, ánh xạ đơn trị $G : D \to X$. Tìm $\bar{x} \in D$ sao cho

$$\langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in D. \tag{4.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân (4.1) đã được Stampacchia nghiên cứu đầu tiên trong [30], sau đó bài toán đã được nghiên cứu rộng rãi và có nhiều ứng dụng trong phương trình đạo hàm riêng, điều khiển tối ưu, tối ưu hóa, lý thuyết phương trình, cơ khí, tài chính,... (xem [30], [57]).

Trong một số trường hợp, ta thường xét bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển mà miền ràng buộc

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i,$$

với $D_i, i \in I$ là họ nào đó các tập con khác rỗng trong không gian Hilbert X. Ở đây các tập D_i có thể cho dạng hiện như các hình cầu, không gian con,..., nhưng cũng có thể được cho dạng ẩn như tập nghiệm của bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn, ánh xạ giả co chặt hay tập nghiệm của bài toán cân bằng,... Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra phương pháp lặp tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trong trường hợp tập chấp nhận được D là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Bài toán có thể phát biểu như sau: Tìm $\overline{x} \in D$ sao cho

$$\begin{aligned} &\langle G(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle \geq 0, \forall x \in D, \\ &T_i\left(\overline{x}\right) = \overline{x}, i = 1, 2, ..., N, \end{aligned} \tag{4.2}$$

với $N \in \mathbb{N}, T_i : D \to D, i = 1, 2, ..., N$, là các ánh xạ không giãn. Tức là, bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên giao của tập các điểm bất động chung của họ các ánh xạ không giãn $T_i, i = 1, 2, ..., N$.

Nếu ta định nghĩa ánh xạ đa trị $P_1, P_2 : D \to 2^D$ như sau:

$$P_1(x) = \{t \in D : \langle T_i(x) - t, x - y\rangle \geq 0, \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n, y \in D\},$$

$$P_2(x) = \{t \in D : \langle T_i(x) - t, x - y\rangle > 0, \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n, y \in D\},$$

và $F(y, x, t) = \langle G(x), y - t\rangle - \mathbb{R}_+, y, x, t \in D$.
Đặt $K = D, Q(x, t) = D$. Ta xét bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2: Tìm $\bar{x} \in D, \bar{x} \in P_1(\bar{x})$, $0 \in F(y, \bar{x}, t)$ với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$. Nếu bài toán này có nghiệm $\bar{x}$ thì ta được $\bar{x} \in P_1(\bar{x})$. Tức là

$$\langle T_i(\bar{x}) - \bar{x}, \bar{x} - y\rangle \geq 0, \text{ với mọi } y \in D, i = 1, 2, ..., n.$$

Lấy $y = T_i(\bar{x}), i = 1, 2, ..., n$, ta suy ra $\langle T_i(\bar{x}) - \bar{x}, \bar{x} - T_i(\bar{x})\rangle \geq 0$, hay $\| T_i(\bar{x}) - \bar{x} \| \leq 0$. Ta kết luận $T_i(\bar{x}) = \bar{x}, i = 1, 2, ..., n$. Từ $0 \in F(y, \bar{x}, t)$, với mọi $t \in P_2(\bar{x}), y \in Q(\bar{x}, t)$, ta suy ra $\langle G(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle \geq 0$, với mọi $y \in D$. Tức là, $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (4.2).

Ngược lại, nếu $\bar{x}$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên giao của tập tất cả các điểm bất động của các ánh xạ $T_i, i = 1, 2, ..., N$, thì hiển nhiên $\bar{x}$ cũng là nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 nói trên.

Ngoài ra, bài toán (4.2) cũng có thể phát biểu dưới dạng một bài toán tựa cân bằng trên tập nghiệm của họ bài toán cân bằng: Tìm $\bar{x} \in D, \bar{x} \in P_1(\bar{x})$ sao cho $F_0(y, \bar{x}, t) \geq 0$ và $\varphi_i(\bar{x}, t) \geq 0, i = 1, 2, ..., N,$ với mọi $t \in P_2(\bar{x})$, ở đây $F_0(y, x, t) = \langle G(x), y - t\rangle, \varphi_i(x, t) = \langle T_i(x) - x, x - t\rangle, i = \overline{1, N}$.

Cho X là một không gian Hilbert thực, tập con $D \subseteq X$, $\{T_i\}_{i=1}^N$ là họ hữu hạn ánh xạ không giãn từ D vào D, kí hiệu $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in D : x = Tx\}$. Năm 2001, để tìm phần tử $p \in \cap_{i=1}^N Fix(T_i)$, Xu H. K. và Ori R.G. đưa ra một phương pháp lặp ẩn trong [52]. Cụ thể, các tác giả đưa ra dãy lặp $\{x_k\}$,

$$\begin{aligned} &x_0 \in D \text{ cho trước tùy ý}, \\ &x_k = \beta_k x_{k-1} + (1 - \beta_k) T_{[k]} x_k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

với $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \subset (0, 1)$, dãy $T_{[n]} = T_{n \bmod N}$, với các số nguyên $n \geq 1$, với hàm mod lấy giá trị trong tập $\{1, 2, \cdots, N\}$, và chứng minh kết quả sau:

Định lý 4.1.1. *Cho X là không gian Hilbert thực và D là tập con khác rỗng, lồi, đóng trong X. Cho $N \in \mathbb{N}, \{T_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ không giãn trên D sao cho $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(T_i) \neq \emptyset$. Cho $x_0 \in D$ và $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy trong $(0, 1)$ sao cho $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (4.3) hội tụ yếu tới điểm bất động chung của họ hữu hạn ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^N$.*

Ngoài ra, Zheng L.C. và Yao J.C. ([55]) đã đưa ra phương pháp lặp ẩn dưới đây:

$$\begin{aligned} &x_0 \in X \text{ tùy ý}, \\ &x_k = \beta_k x_{k-1} + (1 - \beta_k)[T_{[k]} x_k - \lambda_k \mu F(T_{[k]} x_k)], \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Định lý 4.1.2. *Cho X là một không gian Hilbert thực, với $L, \eta > 0$, ánh xạ $F : X \to X$ là L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh. Cho $\{T_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ không giãn trên X sao cho $D = \cap_{i=1}^N Fix(T_i) \neq \emptyset$. Cho $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$, cho $x_0 \in X, \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset [0, 1)$ và $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \subset (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện: $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < \infty$ và $\alpha \leq \beta_k \leq \beta, k \geq 1$, với $\alpha, \beta \in (0, 1)$ nào đó. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (4.4) hội tụ yếu tới điểm bất động chung của họ ánh xạ $\{T_i\}_{i=1}^N$.*

Rõ ràng, từ $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < \infty$ ta có $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$.

Trong mục tiếp theo của luận án, chúng tôi xây dựng phương pháp lặp giải bài toán bất đẳng thức biến phân (4.2) cho kết quả hội tụ mạnh với điều kiện giảm nhẹ cho tham số λ_k, thay điều kiện $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \infty$ bởi điều kiện $\lambda_k \to 0$ khi $k \to \infty$.

4.2 Phương pháp lặp ẩn trên tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Cho không gian Hilbert X và ánh xạ $G : X \to X$; các tham số $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và $t \in (0,1), \{\lambda_t\}, \{\beta_t^i\} \subset (0,1)$, sao cho

$$\lambda_t \to 0, \text{khi} \quad t \to 0 \quad \text{và} \quad 0 < \liminf_{t\to 0} \beta_t^i \le \limsup_{t\to 0} \beta_t^i < 1, 2, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.5}$$

Dãy lặp $\{x_t\}$ xác định bởi

$$x_t = T^t x_t, \quad T^t := T_0^t T_N^t ... T_1^t, \quad t \in (0,1), \tag{4.6}$$

với ánh xạ $T_i^t : X \to X$,

$$T_i^t x = (1-\beta_t^i)x + \beta_t^i T_i x, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \quad T_0^t y = (I - \lambda_t \mu G)y, \ x, y \in X. \tag{4.7}$$

Định lý 4.2.1. *Giả thiết rằng ánh xạ G là L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh, với các hằng số $L, \eta > 0$ nào đó, $\{T_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ không giãn trên X sao cho $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(T_i) \neq \emptyset$. Khi đó, dãy suy rộng $\{x_t\}$ xác định bởi* (4.5)-(4.7) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất $\bar{x}$ của* (4.2) *(với $D = X$).*

Chứng minh. Từ Mệnh đề 1.1.2, ta có

$$\begin{aligned} \|T^t x - T^t y\| &\le (1-\lambda_t\tau)\|T_N^t ... T_1^t x - T_N^t ... T_1^t y\| \\ &... \\ &\le (1-\lambda_t\tau)\|T_i^t ... T_1^t x - T_i^t ... T_1^t y\| \\ &... \\ &\le (1-\lambda_t\tau)\|T_1^t x - T_1^t y\| \le (1-\lambda_t\tau)\|x - y\| \quad \forall x, y \in D. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Vì vậy, T^t là ánh xạ co trên X. Từ Nguyên lý ánh xạ co Banach, tồn tại thành phần duy nhất $x_t \in X$ sao cho $x_t = T^t x_t$ với mọi $t \in (0,1)$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng, dãy $\{x_t\}$ bị chặn. Thật vậy, với $x \in \mathcal{D}$ cố định, ta có $T_i^t x = x$ với $i = 1, 2, \cdots, N$, vì vậy

$$\begin{aligned}
\|x_t - x\| &= \|T^t x_t - x\| = \|T^t x_t - T_N^t ... T_1^t x\| \\
&= \|(I - \lambda_t \mu G) T_N^t ... T_1^t x_t - (I - \lambda_t \mu G) T_N^t ... T_1^t x - \lambda_t \mu G(x)\| \\
&\leq (1 - \lambda_t \tau) \|T_N^t ... T_1^t x_t - T_N^t ... T_1^t x\| + \lambda_t \mu \|G(x)\|
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \lambda_t \tau) \|T_{N-1}^t ... T_1^t x_t - T_{N-1}^t ... T_1^t x\| + \lambda_t \mu \|G(x)\| \\
&... \\
&\leq (1 - \lambda_t \tau) \|T_i^t ... T_1^t x_t - T_i^t ... T_1^t x\| + \lambda_t \mu \|G(x)\| \\
&... \\
&\leq (1 - \lambda_t \tau) \|T_1^t x_t - T_1^t x\| + \lambda_t \mu \|G(x)\| \\
&\leq (1 - \lambda_t \tau) \|x_t - x\| + \lambda_t \mu \|G(x)\|.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Từ đó,

$$\|x_t - x\| \leq \frac{\mu}{\tau} \|G(x)\|, \tag{4.11}$$

tức là dãy $\{x_t\}$ bị chặn và vì vậy, các dãy $\{G(y_t^N)\}, \{y_t^i\}, i = 1, 2, \cdots, N$ cũng bị chặn, với

$$\begin{aligned}
y_t^1 &= (1 - \beta_t^1) x_t + \beta_t^1 T_1 x_t, \\
y_t^2 &= (1 - \beta_t^2) y_t^1 + \beta_t^2 T_2 y_t^1, \\
&... \\
y_t^i &= (1 - \beta_t^i) y_t^{i-1} + \beta_t^i T_i y_t^{i-1}, \\
&... \\
y_t^N &= (1 - \beta_t^N) y_t^{N-1} + \beta_t^N T_N y_t^{N-1},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

và

$$x_t = (I - \lambda_t \mu G) y_t^N. \tag{4.13}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
\|x_t - x\|^2 &= \|(I - \lambda_t \mu G) y_t^N - x\|^2 \\
&= \|y_t^N - x\|^2 - 2\lambda_t \mu \langle G(y_t^N), y_t^N - x \rangle + \lambda_t^2 \mu^2 \|G(y_t^N)\|^2 \\
&\leq \|y_t^{N-1} - x\|^2 - 2\lambda_t \mu \langle G(y_t^N), y_t^N - x \rangle + \lambda_t^2 \mu^2 \|G(y_t^N)\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq ... \\
&\leq \|y_t^1 - x\|^2 - 2\lambda_t\mu\langle G(y_t^N), y_t^N - x\rangle + \lambda_t^2\mu^2\|G(y_t^N)\|^2 \\
&\leq \|x_t - x\|^2 - 2\lambda_t\mu\langle G(y_t^N), y_t^N - x\rangle + \lambda_t^2\mu^2\|G(y_t^N)\|^2
\end{aligned}
$$

Vì vậy,

$$
\eta\|y_t^N - x\|^2 + \langle G(x), y_t^N - x\rangle \leq \frac{\lambda_t\mu}{2}\|G(y_t^N)\|^2. \tag{4.14}
$$

Để đơn giản, ta đặt $y_t^0 = x_t$ và chứng minh rằng

$$
\|y_t^{i-1} - T_i y_t^{i-1}\| \to 0, \text{ khi } t \to 0 \text{ với } i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.15}
$$

Cho $\{t_k\} \subset (0, 1)$ là dãy tùy ý hội tụ tới 0 khi $k \to \infty$ và $x_k := x_{t_k}$. Ta phải chứng minh rằng $\|y_k^i - T_i y_k^{i-1}\| \to 0$, ở đây y_k^i được định nghĩa bởi (4.12) với $t = t_k$ và $y_k^i = y_{t_k}^i$. Lấy dãy con $\{x_l\}$ của $\{x_k\}$ sao cho

$$
\limsup_{k\to\infty} \|y_k^i - T_i y_k^{i-1}\| = \lim_{l\to\infty} \|y_l^i - T_i y_l^{i-1}\|. \tag{4.16}
$$

Lấy dãy con $\{x_{k_j}\}$ của $\{x_l\}$ sao cho

$$
\limsup_{k\to\infty} \|x_k - x\| = \lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x\|. \tag{4.17}
$$

Từ (4.13) và Mệnh đề 1.1.1, ta suy ra rằng

$$
\begin{aligned}
\|x_{k_j} - x\|^2 &= \|(I - \lambda_{k_j}\mu F)y_{k_j}^N - x\|^2 \\
&\leq \|y_{k_j}^N - x\|^2 - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle \\
&= \|(1 - \beta_{k_j}^N)(y_{k_j}^{N-1} - x) + \beta_{k_j}^N(T_N y_{k_j}^{N-1} - T_N x)\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle \\
&\leq (1 - \beta_{k_j}^N)\|y_{k_j}^{N-1} - x\|^2 + \beta_{k_j}^N\|T_N y_{k_j}^{N-1} - T_N x\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle \\
&\leq \|y_{k_j}^{N-1} - x\|^2 - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle \\
&\leq \cdots \leq \|y_{k_j}^1 - x\|^2 - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle \\
&\leq \|x_{k_j} - x\|^2 - 2\lambda_{k_j}\mu\langle F(y_{k_j}^N), x_{k_j} - x\rangle.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Vì vậy,

$$
\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x\| = \lim_{j\to\infty} \|y_{k_j}^i - x\|, \quad i = 1, \cdots, N. \tag{4.19}
$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1.1, ta có

$$
\begin{aligned}
\|y^i_{k_j} - x\|^2 &= (1-\beta^i_{k_j})y^{i-1}_{kj} + \beta^i_{k_j}T_i y^{i-1}_{kj} - x \\
&= (1-\beta^i_{k_j})\|y^{i-1}_{k_j} - x\|^2 + \beta^i_{k_j}\|T_i y^{i-1}_{k_j} - x\|^2 \\
&\quad - \beta^i_{k_j}(1-\beta^i_{k_j})\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 \\
&\le (1-\beta^i_{k_j})\|y^{i-1}_{k_j} - x\|^2 + \beta^i_{k_j}\|y^{i-1}_{k_j} - x\|^2 \\
&\quad - \beta^i_{k_j}(1-\beta^i_{k_j})\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 \\
&= \|y^{i-1}_{k_j} - x\|^2 - \beta^i_{k_j}(1-\beta^i_{k_j})\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 \\
&\le \cdots = \|y^0_{k_j} - x\|^2 - \beta^i_{k_j}(1-\beta^i_{k_j})\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 \\
&= \|x_{k_j} - x\|^2 - \beta^i_{k_j}(1-\beta^i_{k_j})\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2, \quad i = 1, 2, \cdots, N.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $\alpha \le \beta^i_t \le \beta$ với $\alpha, \beta \in (0,1)$. Khi đó, từ (4.20) ta có

$$\alpha(1-\beta)\|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 \le \|x_{k_j} - x\|^2 - \|y^i_{k_j} - x\|^2. \tag{4.21}$$

Cùng với (4.19) ta suy ra

$$\lim_{j\to\infty} \|y^i_{k_j} - T_i y^{i-1}_{k_j}\|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.22}$$

Mặt khác, cùng với (4.12), ta có

$$\|y^i_t - T_i y^{i-1}_t\| = (1-\beta^i_t)\|y^{i-1}_t - T_i y^{i-1}_t\|. \tag{4.23}$$

Do $0 < \alpha \le \beta^i_t \le \beta < 1$, ta được $\|y^{i-1}_t - T_i y^{i-1}_t\| \to 0$ khi $t \to 0$ với $i = 1, \cdots, N$. Tiếp theo, ta chỉ ra rằng $\|x_t - T_i x_t\| \to 0$ khi $t \to 0$. Trong trường hợp $i = 1$ ta có $y^0_t = x_t$. Vì vậy, $\|x_t - T_1 x_t\| \to 0$ khi $t \to 0$. Hơn nữa,

$$\|y^1_t - T_1 x_t\| = (1-\beta^1_t)\|x_t - T_1 x_t\| \tag{4.24}$$

và $\|x_t - T_1 x_t\| \to 0$, ta có $\|y^1_t - T_1 x_t\| \to 0$. Vì vậy, từ

$$\|x_t - y^1_t\| \le \|x_t - T_1 x_t\| + \|T_1 x_t - y^1_t\|$$

ta suy ra $\|x_t - y^1_t\| \to 0$ khi $t \to 0$. Mặt khác,

$$\|y^2_t - T_2 y^1_t\| = (1-\beta^2_t)\|y^1_t - T_2 y^1_t\| \to 0$$

và

$$\|y_t^2 - x_t\| \le (1-\beta_t^2)\|y_t^1 - x_t\| + \beta_t^2\|T_2 y_t^1 - x_t\|$$
$$\le (1-\beta_t^2)\|y_t^1 - x_t\| + \beta_t^2\|T_2 y_t^1 - y_t^1\| + \|y_t^1 - x_t\|,$$

ta khẳng định rằng $\|y_t^2 - x_t\| \to 0$ khi $t \to 0$. Do

$$\|x_t - T_2 x_t\| \le \|x_t - y_t^2\| + \|y_t^2 - T_2 y_t^1\| + \|T_2 y_t^1 - T_2 x_t\|$$
$$\le \|x_t - y_t^2\| + \|y_t^2 - T_2 y_t^1\| + \|y_t^1 - x_t\|$$

và $\|x_t - y_t^2\|, \|y_t^2 - T_2 y_t^1\|, \|y_t^1 - x_t\| \to 0$, ta có $\|x_t - T_2 x_t\| \to 0$. Như vậy, ta có $\|x_t - T_i x_t\| \to 0$, với $i = 1, 2, \cdots, N$ và $\|y_t^N - x_t\| \to 0$ khi $t \to 0$.

Giả sử $\{x_k\}$ là dãy con nào đó của dãy $\{x_t\}$ hội tụ yếu tới $\tilde{x}$ khi $k \to \infty$. Khi đó, $\|x_k - T_i x_k\| \to 0$, với $i = 1, 2, \cdots, N$ và $\{y_k^N\}$ cũng hội tụ yếu tới $\tilde{x}$. Từ Bổ đề 1.1.3, ta có $\tilde{x} \in \mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(T_i)$ và từ (4.14), ta suy ra

$$\langle F(x), x - \tilde{x} \rangle \ge 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Từ $x, \tilde{x} \in \mathcal{D}$, bằng cách thay x bởi $tx + (1-t)\tilde{x}$ trong bất đẳng thức cuối cùng với tham biến t và cho $t \to 0$, ta được

$$\langle F(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle \ge 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Do $\bar{x}$ trong (4.2) là duy nhất nên ta có $\tilde{x} = \bar{x}$. Cuối cùng, thay x trong (4.14) bởi $\bar{x}$, ta suy ra $\{x_t\}$ hội tụ mạnh. Ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng kết quả trên đối với họ các ánh xạ giả co chặt.

Định nghĩa 4.2.1. Ánh xạ $S : X \to X$ được gọi là γ-*giả co chặt* nếu tồn tại hằng số $\gamma \in [0, 1)$ sao cho

$$\|Sx - Sy\|^2 \le \|x - y\|^2 + \gamma\|(I - S)x - (I - S)y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Ta đã biết trong [56] rằng một ánh xạ $T : X \to X$ xác định bởi $Tx = \alpha x + (1-\alpha)Sx$ với $\alpha \in [\gamma, 1)$ cố định với mọi $x \in X$, là ánh xạ không giãn và $Fix(T) = Fix(S)$. Sử dụng kết quả này, chúng tôi mở rộng kết quả của mình trong trường hợp $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(S_i)$, với S_i là γ_i-giả co chặt, $\gamma_i \in [0, 1), i = \overline{1, N}$.

Cụ thể, cho $\alpha_i \in [\gamma_i, 1)$ là các số cố định. Khi đó, $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(\tilde{T}_i)$ với $\tilde{T}_i y = \alpha_i y + (1-\alpha_i)S_i y$ là các ánh xạ không giãn, với $i = 1, 2, \cdots, N$, và do vậy $\tilde{T}_i^t$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_i^t y &= (1-\beta_t^i)y + \beta_t^i \tilde{T}_i y \\ &= (1-\beta_t^i(1-\alpha_i))y + \beta_t^i(1-\alpha_i)S_i y, \quad i = 1, 2, \cdots, N,\end{aligned} \tag{4.25}$$

là các ánh xạ không giãn. Và chúng tôi có kết quả sau,

Định lý 4.2.2. *Cho $G : X \to X$ là ánh xạ L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh, với L, η là những số thực dương. Cho $\gamma_i \in [0,1), i = \overline{1,N}$, họ ánh xạ $\{S_i\}_{i=1}^N$ gồm N ánh xạ γ_i-giả co chặt trên X sao cho $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(S_i) \neq \emptyset$. Cho $\alpha_i \in [\gamma_i, 1), \mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và cho $t \in (0,1), \{\lambda_t\}, \{\beta_t^i\} \subset (0,1)$, như trong Định lý 4.2.1. Khi đó, dãy $\{x_t\}$ xác định bởi*

$$x_t = \tilde{T}^t x_t, \quad \tilde{T}^t := T_0^t \tilde{T}_N^t ... \tilde{T}_1^t, \quad t \in (0,1),$$

ở đây $\tilde{T}_i^t$, với $i = 1, 2, \cdots, N$, được định nghĩa bởi (4.25) và $T_0^t x = (I - \lambda_t \mu G)x$, hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất $\bar{x}$ của (4.2).

Ta đã biết trong [4] rằng $Fix(\tilde{S}) = \mathcal{D}$ ở đây $\tilde{S} = \sum_{i=1}^N \xi_i S_i$ với $\xi_i > 0$ và $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ với N ánh xạ $\{S_i\}_{i=1}^N$ là γ_i-giả co chặt. Hơn nữa, $\tilde{S}$ là ánh xạ γ-giả co chặt với $\gamma = \max\{\gamma_i : 1 \leq i \leq N\}$. Vì vậy, ta có kết quả sau.

Định lý 4.2.3. *Cho $G : X \to X$ là ánh xạ L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh với $L, \eta > 0$ nào đó. Cho $\{S_i\}_{i=1}^N$ là N ánh xạ γ_i-giả co chặt trên X thỏa mãn $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^N Fix(S_i) \neq \emptyset$. Cho $\alpha \in [\gamma, 1)$, ở đây $\gamma = \max\{\gamma_i : 1 \leq i \leq N\}$, $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và cho $t \in (0,1), \{\lambda_t\}, \{\beta_t\} \subset (0,1)$, sao cho*

$$\lambda_t \to 0, khi \quad t \to 0 \quad và \quad 0 < \liminf_{t\to 0} \beta_t \leq \limsup_{t\to 0} \beta_t < 1.$$

Khi đó, dãy $\{x_t\}$, xác định bởi

$$x_t = \tilde{T}^t x_t, \quad \tilde{T}^t := T_0^t((1-\beta_t(1-\alpha))I + \beta_t(1-\alpha)\sum_{i=1}^N \xi_i S_i), \quad t \in (0,1),$$

ở đây $T_0^t = (I - \lambda_t \mu G)$, $\xi_i > 0$ và $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất $\bar{x}$ của (4.2).

Ví dụ. Cho C_1, C_2 là các tập đóng lồi trong không gian Hilbert H. Bài toán tìm $p_* \in C_1 \cap C_2$ có chuẩn nhỏ nhất, tức là tìm sao cho

$$\varphi(p_*) = \min_{x \in C_1 \cap C_2} \varphi(x) \text{ với } \varphi(x) = \|x\|^2$$

Bài toán trên tương đương với

$$\langle F(p_*), p - p_* \rangle \geq 0,$$

với mọi $p \in C_1 \cap C_2, F(x) = \varphi'(x) = 2x$ là ánh xạ 2-Lipschitz liên tục và 1-đơn điệu mạnh. Với mọi $t \in (0,1)$, lấy $\lambda_t = t^3 \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_t\}$, $x_t = (I - \lambda_t F).(\alpha_N I + (1-\alpha_N)T_N).(\alpha_{N-1} I + (1-\alpha_{N-1})T_{N-1})...(\alpha_1 I + (1-\alpha_1)T_1)x_t$, với $\{T_i\}, i = 1, 2, ..., N$ là họ hữu hạn ánh xạ không giãn trên H, hội tụ mạnh tới $p_* = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán đã cho.

Ngoài ra, chúng tôi cũng xét bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của họ vô hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Banach:

Cho D là tập con khác rỗng, lồi, đóng trong không gian Banach X, ánh xạ đơn trị $F : D \to X$ và họ vô hạn các ánh xạ không giãn $T_i : D \to D, i = 1, 2, ..., n, ...$. Ánh xạ J từ X vào X^* là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc,

$$(J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|\|x^*\| \quad \text{và} \quad \|x^*\| = \|x\|\}).$$

Bài toán được phát biểu: *Tìm* $\overline{x} \in D$ *sao cho*

$$\begin{aligned} &\langle F(\overline{x}), J(x - \overline{x}) \rangle \geq 0, \forall x \in D; \\ &T_i(\overline{x}) = \overline{x}, i = 1, 2, ..., n, ... \end{aligned} \tag{4.26}$$

Chúng tôi đã đưa ra một phương pháp lặp ẩn mới dựa trên phương pháp lặp Krasnoselskii-Mann, phương pháp lặp Halpern và các phương pháp xấp xỉ mềm của Moudafi và tìm được nghiệm cho bài toán (4.26) với $F = I - A$, (A là ánh xạ co yếu trên D, D là một tập con lồi, đóng trong một không gian Banach thực phản xạ và lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux đều). Kết quả này đã được công bố trong bài báo [2] trong danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án.

KẾT LUẬN

Trong chương này, ở Mục 4.2, chúng tôi đã đưa ra phương pháp lặp ẩn tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert và mở rộng kết quả với họ các ánh xạ giả co chặt. Ngoài ra, để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach, chúng tôi đã đưa ra phương pháp xấp xỉ mềm cải biên với ánh xạ co yếu cho một họ vô hạn ánh xạ không giãn. Trong các kết quả của mình, chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của các dãy lặp với một số điều kiện đơn giản hơn so với một số kết quả trước đó của các tác giả khác.

Kết luận chung

Kết quả chủ yếu

Trong luận án này, chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau:

1) Thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát loại 2 và một số bài toán liên quan, đặc biệt là bài toán tựa cân bằng Pareto (yếu) trên (dưới); nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các bài toán đó.

2) Thiết lập một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của các bài toán bao hàm thức tựa biến phân Pareto hỗn hợp.

3) Xây dựng dãy lặp tìm nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân.

Một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

1) Tìm hiểu thêm về những ứng dụng của các kết quả vào một số bài toán trong kinh tế.

2) Tiếp tục nghiên cứu tính nửa liên tục trên, dưới và tính Hölder của nghiệm của bài toán tựa cân bằng tổng quát.

3) Tìm thuật toán giải bài toán tựa cân bằng tổng quát trong một vài trường hợp đặc biệt.

4) Nghiên cứu bài toán tựa cân bằng tổng quát trong trường hợp các tập D, K không compắc, chỉ lồi, đóng.

Danh mục công trình đã công bố liên quan đến luận án

---

[1] Nguyễn Thị Quỳnh Anh (2009), "Các bài toán tựa tối ưu loại 1 và loại 2", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Thái Nguyên*, **56**, no. 8, pp. 45-50.

[2] Nguyen Thi Quynh Anh (2014), "Modified viscosity approximation methods with weak contraction mapping for an infinite family of nonexpansive mappings", *East - West Journal of Mathematics*, **16**, no. 1, pp. 1-13.

[3] Nguyen Thi Quynh Anh and Nguyen Xuan Tan (2013), "On the existence of solutions to mixed Pareto quasivariational inclusion problems", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **16**, no. 2, pp. 1-22.

[4] Nguyen Buong and Nguyen Thi Quynh Anh (2011), "An implicit iteration method for variational inequalities over the set of common fixed points for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", Hindawi Publish Coporation, *Fixed Point Thoery Applications*, **2011**, article ID 276859, 10 pages, doi: 10.1155/2011/276859.

[5] Nguyen Xuan Tan and Nguyen Thi Quynh Anh (2011), "Generalized quasi-equilibrium problems of type 2 and their applications", *Vietnam Journal of Mathematics*, **39**, pp. 1-25.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Bá Minh (2006), *Một số vấn đề trong lý thuyết tối ưu đa trị*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Bá Minh (2007), *Lý thuyết các bài toán tối ưu*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Acedo, G. L. and Xu, H. K. (2007), "Iterative method for strict pseudocontractions in Hibert spaces", *Nonlinear Anal.*, **67**, pp. 2258-2271.

[5] Pham Ngoc Anh, Kim J. and Le Dung Muu (2012), "An extragradient algorithm for solving bilevel variational inequalities", *J. Global Optim.*, **52**, pp. 527-539.

[6] Aubin J. P. and Cellina, A. (1994), *Differential Inclusions*, Springer Verlag, BerLin, Gemany.

[7] Berge C. (1959), *Espaces Topologiques et Fontions Multivoques*, Dunod, Paris 1959.

[8] Bianchi M. and Pini R. (2005), "Coercivity conditions for equilibrium problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **124**, pp. 79-92.

[9] Blum E. and Oettli W. (1991), "Variational principles for equilibrium problems", *Parametric Optimization and Related Topies III* (Guestrow, 1991), 79-88, *Approx. Optim.* **3**, Lang, Frankfurt am Main, (1993).

[10] Blum E. and Oettli W. (1993), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *The Math. Student*, **64**, pp. 1-23.

[11] Browder F. E. (1984), "Coincidence theorems, minimax theorems and variational inequalities", *Amer. Math. Soc.*, Providence RI, **26**, pp. 67-80.

[12] Debreu G. (1954), "Valuation equilibrium and Pareto optimum", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **40**, pp. 588-592.

[13] Truong Thi Thuy Duong (2013), "Mixed generalized quasi-equilibrium problems", *J. Global Optim.*, **56**, no. 2, pp. 647–667.

[14] Truong Thi Thuy Duong and Nguyen Xuan Tan (2010), "On the existence of solutions to generalized quasi-equilibrium problems of type I and Related Problems", *Adv. Nonlinear Var. Inequal.* **13**, no. 2, pp. 29-47.

[15] Truong Thi Thuy Duong and Nguyen Xuan Tan (2011), "On the existence of solutions to generalized quasi-equilibrium problems of type II and related problems", *Acta Math. Vietnam.* **36**, 2, pp. 231–248.

[16] Truong Thi Thuy Duong and Nguyen Xuan Tan (2012), "On the existence of solutions to generalized quasi-equilibrium problems", *J. Global Optim.*, **52**, no. 4, pp. 711–728.

[17] Edgeworth F. Y. (1981), "Mathematical Psychics", *C. Kegan Paul Co.*, London, England.

[18] Fan K. (1952), "Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38**, pp. 121-126.

[19] Fan K. (1961), "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", *Mathematische Annalen* **142**, pp. 305-310.

[20] Fan K. (1972), "A minimax inequality and application", in *Inequalities III, O. Shisha (Ed)*, *Academic Press*, New York, pp. 103-113.

[21] Fang Y. P., Huang N. J. (2005), "Existence results for generalized implicit vector variational inequalities with multivalued mappings", *Indian J. Pure Appl. Math.*, *36*, pp. 629-640.

[22] Ferro F. (1989), "A minimax theorem for vector-valued functions", *J. Optim. Theory Appl.*, **60**, pp. 19-31.

[23] Goebel K., Kirk W. A. (1990), "Topics in Metric Fixed Point Theory", *Cambridge Studies in Advanced Math.*, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[24] Guerraggio A., Nguyen Xuan Tan (2002), "On general vector quasi-optimization problems", *Mathematical Methods of Operation Research*, **55**, pp. 347-358.

[25] Hadjisavvas, N. (2003), "Continuity and maximality properties of pseudomonotone operators", *J. Convex Anal.*, **10**, pp. 465-475.

[26] Bui The Hung, Nguyen Xuan Tan (2012), "On the existence of solutions to Pareto and weak quasivariational inclusion problems", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **15**, no. 2, pp. 1–16.

[27] Kalashnikov V. V. and Klashnikova, N. I. (1996), "Solving two-level variational inequality", *J. Global Optim.*, **8**, 289-294.

[28] Bùi Trọng Kiên (2013), "Second-order necessary optimality conditions for a class of semilinear elliptic optimal control problems with mixed pointwise constraints", *SIAM. J. Control Optim.*, **52**, no. 2, pp. 1166-1202.

[29] Kim, W.K and Tan K.K. (2001), "New existence theorems of equilibria and applications", *Nonlinear Analysis*, **47**, pp. 531-542.

[30] Kinderlehrer D. and Stampacchia G. (1980), "An introduction to variational inequalities and their applications", *Academic Press*, New York, NY.

[31] Kuhn H. N. and Tucker A. W. (1951), "Nonlinear programming", in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, pp. 481-492.

[32] Lin J. L. (2007), "Systems of generalized quasi-variational inclusion problems with applications to variational analysis and optimization problems", *J. Global Optim.*, **38**, pp. 21- 39.

[33] Lin L. J. and Nguyen Xuan Tan (2007), "On quasi-variational inclusion problems of type I and related problems. *J. Global Optim.*, **39**, no. 3, pp. 393-407.

[34] Lin L. J., Nguyen Xuan Tan (2009), "Quasi-equilibrium inclusion problems of Blum-Oetli type and related problems", *Acta Math. Vietnamica*, **34**, no. 1, pp. 111-123.

[35] Lions J. L., Stampacchia G. (1967), "Variational inequalities", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **20**, pp. 493-512.

[36] Dinh The Luc (1989), "Theory of vector optimization", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer Verlag, Berlin, Germany, **319**, 173 pages.

[37] Dinh The Luc (2008), "An abstract problem in variational analysis", *J. Optim. Theory Appl.*, **38**, pp. 65-76.

[38] Dinh The Luc and Nguyen Xuan Tan (2004), "Existence conditions in variational inclusions with constraints", *Optimization*, **53**, no. 5-6, pp. 505- 515.

[39] Marino G. and Xu H. K. (2007), "Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hibert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **329**, pp. 336-346.

[40] Nguyen Ba Minh and Nguyen Xuan Tan (2000), "Some sufficient conditions for the existence of equilibrium points concerning multivalued mappings", *Vietnam Journal of Mathematics*, **28**, pp. 295-310.

[41] Nguyen Ba Minh, Nguyen Xuan Tan (2005), "On the existence of solutions of quasi-variational inclusion problems of Stampacchia type", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **8**, pp. 1-16.

[42] Minty G. J. (1978), "On variational inequalities for monotone operators", *Advances in Mathematics*, **30**, pp. 1-7.

[43] Nash J. (1951), "Non - Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, **54**, no. 2, pp. 286-295.

[44] Pareto, V. (1909), "Manuel d'e'conomic politique".

[45] Park S. (2000), "Fixed points and quasi-equilibrium problems", *Nonlinear Oper. Theory. Math. And Com. Model.*, **32**, pp. 1297-1304.

[46] Pham Huu Sach, Le Anh Tuan (2007), "Existence results for set-valued vector quasi equilibrium problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **133**, pp. 229-240.

[47] Nguyen Xuan Tan (1985), "Quasi-variational inequalities in topological linear locally convex Hausdorff space", *Math. Nachr.*, **122**, pp. 231-245.

[48] Nguyen Xuan Tan (2004), "On the existence of of solutions of quasi-variational inclusion problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **123**, pp. 619-638.

[49] Nguyen Xuan Tan and Phan Nhat Tinh (1998), "On the existence of equilibrium points of vector functions", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **19**, pp. 141-156.

[50] Tian G. Q. and Zhou J. X. (1993), "Quasi- variational inequalities without the concavity assumption", *J. Math. Anal. Appl.*, **172**, 289-299.

[51] Le Anh Tuan and Pham Huu Sach (2009), "Generalizations of vector quasi-variational inclusion problems with set-valued mappings", *J. Global Optim.*, **43**, no. 1, pp. 23-45.

[52] Xu H. K. and Ori R. G. (2001), "An implicit iteration process for nonexpansive mappings", *Numer. Func. Anal. And Optim.*, **22**, pp. 767-773.

[53] Yamada Y. (2001), "The hybrid steepest-descent method for variational inequalities problems over the intesectionof the fixed point sets of nonexpansive mappings", *Inhently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, Edited by D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, North-Holland, Amsterdam, Holland, pp. 473-504.

[54] Yannelis N. C. and Prabhaker N. D. (1983), "Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces", *J. Math. Eco.*, **12**, pp. 233-245.

[55] Zheng L. C. and Yao J. C. (2006), "Implicit iteration scheme with perturbed mapping for common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings", *Nonl. Anal.*, **64**, pp. 2507-2515.

[56] Zhou H. (2008), "Convergence theorems of fixed points for k-strict pseudo-contractions in Hibert spaces", *Nonlinear Analysis*, **69**, pp. 456-462.

[57] Zeidler E. (1985), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, Springer, New York.