BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

NGUYỄN ĐỨC LẠNG

PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN VÀ NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của Thầy GS. TS. Nguyễn Bường.

Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Các kết quả được công bố chung đã được đồng tác giả cho phép sử dụng trong luận án.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Đức Lạng

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu sinh Nguyễn Đức Lạng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học GS. TS. Nguyễn Bường, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã định hướng nghiên cứu cho nghiên cứu sinh, sự chỉ bảo ân cần của thầy GS. TS. Nguyễn Bường đã giúp cho nghiên cứu sinh có ý thức trách nhiệm và quyết tâm cao trong suốt quá trình làm luận án.

Nghiên cứu sinh xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà khoa học thầy: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, GS. TS. Trần Vũ Thiệu, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, PGS. TS. Cung Thế Anh, PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn, PGS. TS. Phạm Hiến Bằng, PGS. TS. Phạm Việt Đức, PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, PGS. TS. Phạm Ngọc Anh, PGS. TS. Nông Quốc Chinh, PGS. TS. Lê Lương Tài, PGS. TS. Hà Trần Phương, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, TS. Trương Minh Tuyên, TS. Vũ Mạnh Xuân, TS. Đào Thị Liên, TS. Nguyễn Công Điều, v.v ... đã cho những ý kiến đóng góp quí báu trong suốt thời gian nghiên cứu sinh học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám đốc, Ban Đào tạo (Bộ phận Sau đại học) Đại học Thái Nguyên; Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo (Bộ phận Sau đại học), Ban Chủ nhiệm Khoa Toán, Bộ môn Giải tích trường Đại học Sư phạm; Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học; các thầy cô, bạn bè đồng nghiệp đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin cảm ơn kính tặng bố, mẹ, vợ, con và những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Đức Lạng

Mục lục

Trang bìa phụ **i**

Lời cam đoan **ii**

Lời cảm ơn **iii**

Mục lục **iv**

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt **vi**

Mở đầu **1**

Chương 1 Một số kiến thức chuẩn bị **7**

1.1. Một số khái niệm, phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn 7

1.1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản về không gian Hilbert 7

1.1.2. Một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn 10

1.2. Nửa nhóm không giãn và một số phương pháp tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn 14

1.3. Một số bổ đề bổ trợ 18

Chương 2 Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của

ánh xạ không giãn **20**

2.1. Phương pháp xấp xỉ gắn kết cải biên 21

2.2. Phương pháp lặp Mann - Halpern cải biên 29

2.3. Phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp cho ánh xạ không giãn 35

2.4. Điểm bất động chung cho hai ánh xạ không giãn trên hai tập 37

2.5. Ví dụ tính toán minh họa 43

Chương 3 Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn **54**

3.1. Điểm bất động của một nửa nhóm không giãn 54

3.2. Điểm bất động của hai nửa nhóm không giãn 63

3.3. Ví dụ tính toán minh họa 69

Kết luận chung và đề xuất **74**

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án **75**

Tài liệu tham khảo **76**

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng
$\|x\|$	chuẩn của phần tử x trong H
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	mọi x
$\exists x$	tồn tại x
I	ánh xạ đồng nhất
$\cap$	phép giao
$\circ$	phép hợp của 2 ánh xạ
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$\inf A$	cận dưới đúng của tập hợp A
$\sup A$	cận trên đúng của tập hợp A
$\max A$	số lớn nhất trong tập hợp A
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	tập hợp các số tự nhiên khác 0
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
E	không gian Banach
H	không gian Hilbert
$P_C(x)$	hình chiếu của x lên tập hợp C
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x

$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x
$F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\{T(t) : t \geq 0\}$	nửa nhóm không giãn
$\mathcal{F}$	tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn

MỞ ĐẦU

Lý thuyết điểm bất động trong các không gian mêtric đã thực sự lôi cuốn sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước trong hàng chục năm qua. Điều đó không chỉ vì lý thuyết điểm bất động đóng vai trò quan trọng trong toán học mà còn vì những ứng dụng của nó trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân, lý thuyết tối ưu, lý thuyết xấp xỉ, các mô hình toán học và lý thuyết kinh tế. Nhiều nhà toán học tên tuổi như Brower E., Banach S., Bauschke H. H., Moudafi A., Xu H. K., Schauder J., Browder F. E., Ky Fan K., Kirk W. A., Nguyễn Bường, Phạm Kỳ Anh, Lê Dũng Mưu, v.v ... đã mở rộng các kết quả về bài toán điểm bất động của ánh xạ co trong không gian hữu hạn chiều cho bài toán điểm bất động của ánh xạ liên tục Lipschitz, ánh xạ giả co, ánh xạ không giãn, v.v ... trong không gian Hilbert, không gian Banach. Những kết quả mở rộng này không chỉ đề cập đến sự tồn tại điểm bất động mà còn đề cập đến vấn đề xấp xỉ điểm bất động của một ánh xạ. Gần đây những nghiên cứu về bài toán tìm điểm bất động của lớp các ánh xạ không giãn đã trở thành một trong những hướng nghiên cứu hết sức sôi động của giải tích phi tuyến. Một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động kinh điển phải kể đến là phương pháp lặp Krasnosel'skii [20], phương pháp lặp Mann [22], phương pháp lặp Halpern [16], phương pháp lặp Ishikawa [17], v.v .... Một số nhà nghiên cứu trong nước cũng có những công trình thú vị về tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert và không gian Banach (xem [3] - [5], [36] - [43], v.v ...).

Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. [27] đã đề xuất một cải biên của phương pháp lặp Mann dựa trên phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học (được đề xuất lần đầu tiên vào năm 2000 bởi Solodov M. V., Svaiter B. F. [32]) ở dạng

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(x_n), \\ C_n = \{z \in C: \ \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C: \ \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \ge 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Họ đã chứng minh được rằng nếu dãy $\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ với $a \in [0, 1)$ thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.1) hội tụ mạnh về $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$ khi $n \to \infty$, trong đó $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$ là hình chiếu của x_0 trên tập điểm bất động $F(T)$ của ánh xạ không giãn T.

Năm 2000 Moudafi A. [26] đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ x_n = \dfrac{1}{1+\lambda_n} T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

và

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì}, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+\lambda_n} T(x_n) + \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn T, trong đó $f : C \to C$ là một ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0, 1)$ và $\{\lambda_n\}$ là một dãy số dương. Ông đã chứng minh rằng:

1) Nếu $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$ thì dãy lặp (0.2) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$x^* \in \mathrm{F}(T) \ \text{ sao cho } \ \langle (I - f)(x^*), x^* - x\rangle \le 0, \quad \forall x \in \mathrm{F}(T). \tag{0.4}$$

2) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{1}{\lambda_{n+1}} - \dfrac{1}{\lambda_n} \right| = 0$, thì dãy lặp (0.3) hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (0.4).

Năm 2007, Alber Y. I. [2] đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép

$$x_{n+1} = P_C\Big(x_n - \mu_n[x_n - T(x_n)]\Big), \quad n \geq 0, \tag{0.5}$$

và chứng minh rằng nếu dãy $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$, được chọn sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và dãy $\{x_n\}$ bị chặn, thì mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc tập điểm bất động của T.

Mở rộng cho bài toán tìm điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$, năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. [27] đã đề xuất phương pháp

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x_n ds, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - x_0, z - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{0.6}$$

trong đó $\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ với $a \in [0, 1)$ và $t_n \to +\infty$. Với một số điều kiện thích hợp cho dãy $\{\alpha_n\}$ và $\{t_n\}$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.6) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, ở đây $\mathcal{F} = \cap_{t>0} F(T(t))$ được giả thiết là khác rỗng.

Năm 2008, Takahashi W. và các cộng sự [35] đề xuất một dạng đơn giản của (0.6) như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}(x_0), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n(x_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

Họ đã chỉ ra trong [35] rằng nếu $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$, $0 < \lambda_n < \infty$ với mọi $n \geq 1$ và $\lambda_n \to \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.7) hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$.

Cũng trong thời điểm đó, Saejung S. [29] đã xét quá trình lặp tương tự mà không cần dùng đến tích phân Bochner

$$\begin{cases} x_0 \in H,\ C_1 = C,\ x_1 = P_{C_1}(x_0), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(t_n)x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{0.8}$$

trong đó $0 \le \alpha_n \le a < 1$, $\liminf\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n > 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.8) hội tụ mạnh tới điểm bất động chung $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$ của nửa nhóm ánh xạ không giãn.

Nếu $C \equiv H$ thì C_n và Q_n hoặc C_{n+1} trong (0.1), (0.6)-(0.8) là các nửa không gian. Do vậy, hình chiếu của x_0 trên $C_n \cap Q_n$ hoặc C_{n+1} trong các phương pháp đó được xác định bằng công thức hiện trong [32]. Trong trường hợp C là một tập con thực sự của H thì C_n và Q_n hoặc C_{n+1} trong các phương pháp này không là các nửa không gian, nên việc tính toán hình chiếu trên đó gặp nhiều khó khăn. Nguyễn Bường đã đưa ra ý tưởng thực hiện chiếu lên các nửa không gian thay vì chiếu lên các tập lồi, đóng trong những phương pháp lai ghép trước đây là một nét mới và sáng tạo (xem [10] - [12]). Dựa trên ý tưởng này chúng tôi đề xuất kỹ thuật thay thế các tập lồi, đóng C_n và Q_n bằng các nửa không gian.

Một số nghiên cứu cải biên của các phương pháp lặp nêu trên mặc dù thu được sự hội tụ mạnh, nhưng các điều kiện đặt lên tham số còn chặt chẽ. Chúng tôi sẽ cải tiến nhằm giảm nhẹ điều kiện đặt lên các tham số của dãy lặp. Cụ thể:

1. Nghiên cứu và đề xuất một cải biên của phương pháp xấp xỉ gắn kết, phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

2. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp Mann - Halpern để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trên một tập lồi, đóng, khác rỗng và tìm điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn trên hai tập lồi, đóng, có giao khác rỗng trong không gian Hilbert H. Đồng thời đưa ra một số ví dụ số minh họa cho các phương pháp đề xuất.

3. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp Mann - Halpern để tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn trên một tập lồi, đóng, khác rỗng và tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trên hai tập lồi, đóng, có giao khác rỗng trong không gian Hilbert H. Cuối cùng là một số ví dụ số minh họa cho các phương pháp đề xuất.

Luận án được cấu trúc như sau. Ngoài phần mở đầu, kết luận chung và đề xuất, luận án chia làm ba chương

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Chương 3: Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn.

Ở Chương 1, chúng tôi giới thiệu về ánh xạ không giãn và nửa nhóm ánh xạ không giãn cùng một số phương pháp lặp tìm điểm bất động của loại ánh xạ này.

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu mới của mình về xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn và điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn. Mở đầu là kết quả cải biên của phương pháp xấp xỉ gắn kết và phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Sau đó, chúng tôi đề xuất và chứng minh sự hội tụ mạnh của hai phương pháp lặp mới trên cơ sở kết hợp phương pháp lặp Mann - Halpern xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn và điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn trên hai tập trong không gian Hilbert. Phần cuối của chương là một số kết quả số minh họa cho các phương pháp đề xuất.

Chương 3, trên cơ sở phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp dạng đường dốc lai ghép chúng tôi đề xuất phương pháp lặp mới tìm điểm bất động của một nửa nhóm không giãn, và tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trên hai tập trong không gian Hilbert. Phần cuối của chương là một số kết quả số minh họa cho các phương pháp đề xuất.

Hiện nay, lý thuyết điểm bất động vẫn đang phát triển hết sức mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng trong thực tế. Chúng tôi hy vọng rằng luận án này sẽ góp phần làm phong phú thêm trong việc xây dựng các phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert và lý thuyết điểm bất động nói chung.

Các kết quả của luận án được tác giả công bố bài báo trên các tạp chí quốc tế (1), (2), (3), (4). Các kết quả này được báo cáo tại:

- Seminar của bộ môn Giải tích, khoa Toán, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

- Seminar của Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

- Hội thảo "Một số hướng nghiên cứu mới trong Toán học giải tích và ứng dụng", trường Đại học Hồng Đức, 24-5-2012.

- Hội thảo Quốc gia lần thứ XV "Một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và Truyền thông", Viện Công nghệ Thông tin, 3-12-2012.

- Hội thảo "Bài toán cân bằng và điểm bất động: Lý thuyết và thuật toán", Viện nghiên cứu cao cấp về toán, 25-8-2014.

- Hội thảo Quốc gia lần thứ XVII "Một số vấn đề chọn lọc của Công nghệ thông tin và Truyền thông", trường Đại học Tây Nguyên, Buôn Ma Thuột - Đăk Lăk, 30-10-2014.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi đề cập đến các vấn đề sau. Trong mục 1.1 chúng tôi trình bày một số phương pháp tìm điểm bất động cho ánh xạ không giãn. Tiếp theo trong mục 1.2 đề cập đến một số phương pháp tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn. Mục cuối trong chương này chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ quan trọng, thường xuyên sử dụng đến trong việc chứng minh các kết quả nghiên cứu đạt được ở các chương sau của luận án.

1.1. Một số khái niệm, phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

1.1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản về không gian Hilbert

Trong luận án chúng tôi luôn giả thiết rằng H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng được ký hiệu $\langle .,. \rangle$ và chuẩn được xác định bởi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ với mọi $x \in H$.
Trong mục này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về hội tụ mạnh, hội tụ yếu, tập lồi, tập đóng, tập compact, vv ...

Định nghĩa 1.1 Cho H là không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \to x$, nếu $||x_n - x|| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.2 Dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ khi $n \to \infty$ với mọi $y \in H$.

Chú ý 1.1 a) Trong không gian Hilbert H, hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng.

b) Mọi không gian Hilbert đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H thỏa mãn các điều kiện $\|x_n\| \to \|x\|$ và $x_n \rightharpoonup x$, thì $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.3 Cho C là tập con của không gian Hilbert H. Khi đó C được gọi là

(a) tập lồi nếu $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ với mọi $x, y \in C$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$;

(b) tập đóng nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \to x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(c) tập đóng yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(d) tập compact nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ về một phần tử thuộc C;

(e) tập compact tương đối nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ;

(f) tập compact yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu về một phần tử thuộc C;

(g) tập compact tương đối yếu nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu.

Nhận xét 1.1 (a) Mọi tập compact đều là tập compact tương đối, nhưng điều ngược lại không đúng.

(b) Mọi tập đóng yếu đều là tập đóng, nhưng điều ngược lại không đúng.

Mệnh đề 1.1 (xem [23]) *Cho H là một không gian Hilbert. Khi đó, với mọi $x, y \in H$ và mọi $\lambda \in [0,1]$ ta đều có*

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;

(b) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x-y, y\rangle$;

(c) $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$.

Mệnh đề 1.2 (xem [6]) *Cho H là không gian Hilbert thực và C là một tập con của H. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(a) *Nếu C là tập lồi, đóng thì C là tập đóng yếu;*

(b) *Nếu C là tập bị chặn thì C là tập compact tương đối yếu.*

Cho C là một tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert thực H. Ta biết rằng với mỗi $x \in H$, đều tồn tại duy nhất một phần tử $P_C(x) \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Phần tử $P_C(x)$ được xác định như trên được gọi là hình chiếu của x lên C và ánh xạ $P_C : H \to C$ biến mỗi phần tử $x \in H$ thành $P_C(x)$ được gọi là phép chiếu mêtric từ H lên C. Đặc trưng của phép chiếu mêtric được cho bởi mệnh đề dưới đây

Mệnh đề 1.3 (xem [25]) *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, ánh xạ $P_C : H \to C$ là phép chiếu mêtric từ H lên C khi và chỉ khi*

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0 \quad \text{với mọi} \quad y \in C.$$

Nhận xét 1.2 Về phương diện hình học, với mọi $y \in C$, nếu ta gọi α là góc tạo bởi các véc tơ $x - P_C(x)$ và $y - P_C(x)$, thì $\alpha \geq \pi/2$.

1.1.2. Một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert H thực, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn tức là $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, với mọi $x, y \in C$. Phần tử $x \in C$ được gọi là một điểm bất động của ánh xạ T nếu $Tx = x$, tập điểm bất động của T ký hiệu là $F(T)$.

Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.1 (xem [1]) *Cho C là tập con lồi, đóng, bị chặn của không gian Hilbert H và $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Khi đó, T có ít nhất một điểm bất động.*

Nhận xét 1.3 Từ tính lồi chặt của không gian Hilbert H và tính liên tục của ánh xạ không giãn T, ta thấy nếu tập điểm bất động $F(T)$ khác rỗng thì nó là tập lồi và đóng.

Vấn đề xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ không giãn là đề tài mang tính thời sự và thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Dưới đây, chúng tôi đề cập đến một số phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Bài toán: Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H, $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn. Hãy tìm $x^* \in C :\ T(x^*) = x^*$.

Chú ý 1.2 Nếu $T : C \to C$ là ánh xạ co, thì dãy lặp Picard xác định bởi $x_0 \in C$ và $x_{n+1} = T(x_n)$ hội tụ mạnh về điểm bất động duy nhất của T. Tuy nhiên điều này không còn đúng đối với lớp ánh xạ không giãn.

Phương pháp lặp Mann

Năm 1953, Mann W. R. [22] đã nghiên cứu và đề xuất phương pháp lặp sau

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

ở đây $\{\alpha_n\}$ là một dãy số thực thỏa mãn $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_n < 1$, $n \geq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Dãy lặp (1.1) được gọi là dãy lặp Mann. Mann W. R. đã chứng minh rằng, nếu dãy $\{\alpha_n\}$ được chọn thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.1) sẽ hội tụ yếu tới một điểm bất động của ánh xạ T. Chú ý rằng nếu H là không gian Hilbert vô hạn chiều thì dãy lặp (1.1) chỉ cho sự hội tụ yếu.

Phương pháp lặp Halpern

Một trong những phương pháp lặp cổ điển hiệu quả nhất tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn, đảm bảo sự hội tụ mạnh của dãy lặp, là phương pháp lặp do Halpern B. [16] đề xuất vào năm 1967:

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)T(x_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

ở đây $u \in C$ và $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$. Dãy lặp (1.2) được gọi là dãy lặp Halpern. Ông đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp (1.2) về điểm bất động của ánh xạ không giãn T với điều kiện $\alpha_n = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Vì cấu trúc đơn giản, dãy lặp Halpern đã được sử dụng rộng rãi để xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn và các lớp ánh xạ phi tuyến khác. Năm 1977, Lions P. L. [21] đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ về một điểm bất động của ánh xạ không giãn T trong không gian Hilbert nếu dãy số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\text{(C1)} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

$$\text{(C2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty,$$

$$\text{(C3)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_{n+1}^2} = 0.$$

Tuy nhiên, với các kết quả của Halpern B., Lions P. L. thì dãy chính tắc $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$ lại bị loại trừ. Năm 1992, Wittmann R. [45] đã mở rộng kết quả của Halpern B. và giải quyết được vấn đề trên. Ông đã chỉ ra rằng nếu dãy số $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn các điều kiện (C1), (C2) và điều kiện

$$\text{(C4)}\ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} |\alpha_{\mathrm{n}+1} - \alpha_{\mathrm{n}}| < \infty,$$

thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (1.2) hội tụ mạnh về một điểm bất động của ánh xạ không giãn T.

Phương pháp lặp Ishikawa

Năm 1974, Ishikawa S. [17] đưa ra một mở rộng của dãy lặp Mann

$$\begin{cases} x_0 \in C \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T(x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T(y_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực trong đoạn $[0,1]$ thỏa mãn $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1$, $n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n = \infty$. Dãy lặp (1.3) gọi là dãy lặp Ishikawa.

Chú ý 1.3 Trong trường hợp $\beta_n = 1$ với mọi n thì phương pháp lặp Ishikawa (1.3) trở thành phương pháp lặp Mann (1.1) và với phương pháp này, người ta cũng chỉ thu được sự hội tụ yếu mà không hội tụ mạnh.

Năm 1996, Bauschke H. H. [7] đã mở rộng kết quả của Wittmann R. cho bài toán xác định một điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Phương pháp lặp xấp xỉ gắn kết

Năm 2000, Moudafi A. [26] đã đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết, để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn T trong không gian Hilbert.

Định lý 1.2 (xem [26]) *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H, T là ánh xạ không giãn trên C thỏa mãn*

$F(T) \neq \emptyset$, f là ánh xạ co trên C với hệ số $\tilde{\alpha} \in [0,1)$, dãy $\{x_n\}$ là dãy sinh bởi: $x_1 \in C$ và

$$x_n = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\lambda_n} T x_n, \quad n \geq 1, \tag{1.4}$$

$$x_{n+1} = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\lambda_n} T x_n, \quad n \geq 1, \tag{1.5}$$

trong đó $\lambda_n \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(L1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

(L2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$;

(L3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right| = 0.$

Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) hội tụ mạnh tới $p^* \in F(T)$, ở đây $p^* = P_{F(T)} f(p^*)$. Ngoài ra nếu dãy $\{\lambda_n\}$ thỏa mãn điều kiện (L1) thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.4) hội tụ tới p^*.

Chú ý 1.4 Khi $f(x) = u$ với mọi $x \in C$, thì phương pháp xấp xỉ gắn kết của Moudafi A. trở về phương pháp lặp của Halpern B..

Phương pháp dạng đường dốc lai ghép

Năm 2007, Alber Ya. I. [2] đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn T trên tập con lồi, đóng C ở dạng

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \mu_n[x_n - T(x_n)]), \quad n \geq 0, \tag{1.6}$$

và chứng minh rằng nếu dãy $\{\mu_n\}$, $\mu_n > 0$ được chọn sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và dãy $\{x_n\}$ bị chặn, thì:

(a) tồn tại một điểm tụ yếu $x^* \in C$ của dãy dãy $\{x_n\}$;

(b) mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ thuộc tập các điểm bất động $F(T)$ của T;

(c) nếu $F(T)$ chỉ gồm một phần tử tức là $F(T) = \{x^*\}$, thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x^*.

1.2. Nửa nhóm không giãn và một số phương pháp tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn

Trước hết trong mục này chúng tôi giới thiệu khái niệm nửa nhóm không giãn trên không gian Hilbert thực H.

Định nghĩa 1.4 Cho $T(t) : C \to C$ là một ánh xạ từ tập con lồi, đóng, khác rỗng C của không gian Hilbert H vào chính nó với mỗi $t \geq 0$. Họ ánh xạ $\{T(t) : t \geq 0\}$, được gọi là nửa nhóm không giãn trên C nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) với mỗi $t \geq 0$, ánh xạ $T(t)$ là không giãn trên C;

(b) $T(0)x = x$ với mọi $x \in C$;

(c) $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \circ T(t_2)$ với mọi $t_1 \geq 0$ và $t_2 \geq 0$;

(d) với mỗi $x \in C$, ánh xạ $T(.)x$ từ $(0, \infty)$ vào C liên tục.

Ví dụ 1.1 Trên không gian các số thực $\mathbb{R}$, họ các ánh xạ $\{T(t) : t \geq 0\}$ được xác định bởi $T(t)x = e^{-t}x$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$, là nửa nhóm không giãn trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2 (xem [15]) Cho $A : \ D(A) \subseteq H \to H$ là một toán tử đơn điệu, tức là

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq 0 \text{ với mọi } x, y \in D(A).$$

Nếu A thỏa mãn điều kiện hạng $\overline{D(A)} \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$, thì họ các ánh xạ $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ xác định bởi

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} (I + t/nA)^{-n} \tag{1.7}$$

là một nửa nhóm không giãn trên $\overline{D(A)}$.

Định lý dưới đây khẳng định sự tồn tại điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn.

Định lý 1.3 (xem [24]) *Cho E là không gian Banach lồi đều, C là tập con khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn của E, $\{T(t)\}$ là một họ giao hoán các ánh xạ không giãn từ C vào C. Khi đó, họ $\{T(t)\}$ có ít nhất một điểm bất động chung trong C.*

Từ Định lý 1.3, ta thấy nếu $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên tập con lồi, đóng, khác rỗng và bị chặn C của không gian Hilbert H, thì từ tính chất $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \circ T(t_2)$ với mọi $t_1 \geq 0$ và $t_2 \geq 0$ suy ra $\{T(t)\}$ là một họ giao hoán các ánh xạ và do đó tồn tại ít nhất một điểm bất động chung của họ $\{T(t)\}$. Trong luận án, ta ký hiệu tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$ bởi $\mathcal{F}$.

Nhận xét 1.4 Từ Nhận xét 1.3, suy ra $\mathcal{F}$ luôn là tập lồi và đóng.

Ví dụ 1.3 Xét nửa nhóm không giãn $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ trong Ví dụ 1.1, ta thấy tập điểm bất động chung của họ này là $\mathcal{F} = \{0\}$.

Dựa trên thuật toán của Solodov M. V., Svaiter B. F. [32], kết hợp với phương pháp dạng đường dốc lai ghép của Albert Y. I. [2] và khắc phục được nhược điểm trong kết quả của Nakajo K., Takahashi W. cũng như một số kết quả khác. Năm 2010 Nguyễn Bường [11] đã nghiên cứu phương pháp lặp mới như sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = x_n - \mu_n[x_n - T_n P_C(x_n)], \\ \mu_n \in (a, b], \ 0 < a < b < 1, \ n \in \mathbb{N}, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó T_n được xác định bởi $T_n x = T(t_n)x$ với mọi $x \in C$. Nguyễn Bường chỉ ra sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (1.8) bởi định lý sau.

Định lý 1.4 (xem [11]) *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Hilbert thực H và cho $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Khi đó nếu $\liminf_{n\to\infty} t_n = 0$; $\limsup_{n\to\infty} t_n > 0$; $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$, thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi* (1.8) *hội tụ mạnh tới $z_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chú ý 1.5 Nếu trong (1.8) ta sử dụng phương pháp lặp Mann thay vì phương pháp dạng đường dốc lai ghép của Albert Y. I., thì

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_n P_C(x_n)$$

như (0.7) và (0.8), ta có

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - x_n + \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_n P_C(x_n) \\ &= x_n - \mu_n (x_n - T_n P_C(x_n)),\ \mu_n = 1 - \alpha_n. \end{aligned}$$

Năm 2010, Nguyễn Bường đưa ra kết quả mới tốt hơn các kết quả của Nakajo K., Takahashi W. và Saejung S. bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.5 (xem [11]) *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Hilbert thực H và cho $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_n P_C(x_n), \\ \alpha_n \in (a, b],\ 0 < a < b < 1, \\ H_n = \{z \in H : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Nếu $\liminf_{n\to\infty} t_n = 0$; $\limsup_{n\to\infty} t_n > 0$; $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$, thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (1.9) *hội tụ mạnh tới $z_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Dựa trên phép lặp của Ishikawa S. với một chút thay đổi và thuật toán của Solodov M. V., Svaiter B. F. [32], năm 2011, Nguyễn Bường [13] đã đề xuất phương pháp lặp mới như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ x_n^1 = P_C(x_n), \\ z_n = \alpha_n x_n^1 + (1-\alpha_n) T_n x_n^1, \\ y_n = \beta_n x_n^1 + (1-\beta_n) T_n z_n, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là hai dãy trong $[0,1]$, $\{t_n\}$ là dãy các số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = 0;\ \limsup_{n\to\infty} t_n > 0;\ \lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0; \tag{1.11}$$

hoặc

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty; \tag{1.12}$$

và T_n được định nghĩa bởi

$$T_n y = T(t_n) y; \tag{1.13}$$

hoặc

$$T_n y = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s) y ds,\ \forall y \in C. \tag{1.14}$$

Sự hội tụ mạnh của phương pháp (1.10), (1.11), (1.13) và (1.10), (1.12), (1.14) cho bởi các định lý sau.

Định lý 1.6 (xem [13]) *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn* *trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong [0,1] thỏa mãn $\alpha_n \to 1$ và $\beta_n \leq 1-\beta$, với mọi $\beta \in (0,1)$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi* (1.10), (1.11), (1.13) *cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Định lý 1.7 (xem [13]) *Giả sử điều kiện trong Định lý 1.6 thỏa mãn. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi* (1.10), (1.12), (1.14) *cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

1.3. Một số bổ đề bổ trợ

Để thuận tiện hơn cho việc trình bày các kết quả ở các chương sau của luận án, chúng tôi giới thiệu một số bổ đề sau.

Bổ đề 1.1 (xem [49]) *Giả sử T là ánh xạ không giãn trên tập con lồi, đóng, khác rỗng C của không gian Hilbert H. Khi đó $I-T$ là nửa đóng trên C, nghĩa là nếu dãy $\{x_n\} \subset C$ hội tụ yếu tới $x \in C$ và dãy $\{(I-T)x_n\}$ hội tụ mạnh tới y thì $(I-T)x = y$.*

Bổ đề 1.2 (xem [31]) *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert H và cho $T : C \to H$ là một ánh xạ không giãn từ C vào H. Nếu $F(T) \neq \emptyset$, thì $F(T) = F(P_C T)$.*

Bổ đề 1.3 (xem [48]) *Cho F là một ánh xạ L-Lipschitz liên tục và η-đơn điệu mạnh trên không gian Hilbert H. Khi đó, với $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$, $\lambda \in (0,1)$, thì ta luôn có*

$$\|T^\lambda x - T^\lambda y\| \leq (1-\lambda\tau)\|x-y\|,$$

trong đó $\tau = 1 - \sqrt{1-\mu(2\eta - \mu L^2)} \in (0,1)$ và $T^\lambda x = (I - \lambda\mu F)\,x$ với mọi $x \in H$.

Bổ đề 1.4 (xem [46]) *Cho dãy $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy bị chặn trong không gian Hilbert H sao cho*

$$x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n,\ n \geq 1,$$

trong đó $\{\beta_n\} \subset [0,1]$, *thỏa mãn*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1.$$

Nếu $\limsup_{n\to\infty}(\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$, *thì* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.

Bổ đề 1.5 (xem [46]) *Cho* $\{a_n\}$ *là dãy số thực không âm thỏa mãn điều kiện*

$$a_{n+1} \leq (1 - b_n)a_n + b_n c_n, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

trong đó $\{b_n\}, \{c_n\}$ *là các dãy số thực dương thỏa mãn*

(i) $b_n \in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} c_n \leq 0$.

Khi đó $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kết luận

Trong chương này chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản nhất phục vụ cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu trong các chương sau của luận án. Dựa trên thuật toán của Solodov M. V. và Svaiter B. F., kết hợp với phương pháp dạng đường dốc lai ghép của Albert Y. I. và khắc phục được nhược điểm trong kết quả của Nakajo K., Takahashi W. cũng như các tác giả khác, năm 2010, Nguyễn Bường đã nghiên cứu phương pháp lặp mới (1.8), (1.9). Dựa trên phép lặp của Ishikawa S. với một chút thay đổi và thuật toán Solodov và Svaiter, năm 2011, Nguyễn Bường đã đề xuất phương pháp lặp mới (1.10), (1.11), (1.13), (1.14). Trong các chương tiếp theo của luận án chúng tôi sẽ cải tiến một số phương pháp lặp mà vẫn thu được sự hội tụ mạnh của dãy lặp về điểm bất động nhưng ưu điểm hơn là điều kiện đặt lên các tham số rất rộng rãi, đồng thời chúng tôi cũng đề xuất một số phương pháp lặp mới để tìm điểm bất động, điểm bất động chung của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn.

Chương 2

Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn

Năm 2000, Moudafi A. đề xuất phương pháp xấp xỉ gắn kết (0.2), (0.3), dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân. Năm 2003, để thu được sự hội tụ mạnh của (1.1) Nakajo K. và Takahashi W. đã đề xuất một cải tiến của phương pháp lặp Mann dựa trên phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học. Năm 2007, Alber Y. I. đã đề xuất phương pháp dạng đường dốc lai ghép (0.5) thì mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc tập điểm bất động của T .

Nếu $C \equiv H$ thì C_n và Q_n là các nửa không gian. Trong trường hợp C là một tập con thực sự của H thì C_n và Q_n trong các phương pháp này không là các nửa không gian, nên việc tính toán hình chiếu trên đó gặp nhiều khó khăn.

Trên cơ sở ý tưởng thay thế các tập lồi, đóng C_n, Q_n bằng các nửa không gian, trong chương này và chương sau chúng tôi đề xuất một số cải biên của các phương pháp nêu trên tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Chương này gồm 5 mục. Mục 2.1 và mục 2.2 lần lượt trình bày phương pháp xấp xỉ gắn kết cải biên và phương pháp lặp Mann - Halpern cải biên cho bài toán xác định điểm bất động của một ánh xạ không giãn. Mục 2.3

dành cho việc trình bày phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp để tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn. Mục 2.4 dựa trên tư tưởng của Nguyễn Bường chúng tôi đề xuất nghiên cứu phương pháp lặp tìm điểm bất động chung cho hai ánh xạ không giãn trên hai tập. Mục 2.5 giới thiệu ví dụ số đơn giản nhằm minh họa thêm cho các kết quả lý thuyết thu được. Các kết quả chương này được lấy từ các bài báo (1), (2), (3), (4) trong danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Phương pháp xấp xỉ gắn kết cải biên

Vấn đề mở rộng và đưa ra những cải tiến của phương pháp xấp xỉ gắn kết đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, các kết quả nổi bật về nội dung này có thể tham khảo trong các tài liệu [14], [18], [33], [34], [47].

Sau đây chúng tôi đề xuất một cải biên của phương pháp xấp xỉ gắn kết (0.2), (0.3) cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : C \to C$ từ tập con lồi và đóng C trong không gian Hilbert H vào chính nó và gọi là phương pháp xấp xỉ gắn kết cải biên dựa trên một ánh xạ co f.

Chúng tôi dựa trên phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann (xem [20], [22]) tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Trước hết, tương ứng với phương pháp lặp (0.2), chúng tôi đề xuất phương pháp lặp ẩn cải biên dưới đây

$$x_n = T^n x_n, \quad T^n := T_1^n T_0^n, \quad \text{và} \quad T^n := T_0^n T_1^n, \quad n \in (0,1), \tag{2.1}$$

với T_i^n được xác định bởi

$$\begin{aligned} T_0^n &= (1-\lambda_n\mu)I + \lambda_n\mu f, \\ T_1^n &= (1-\beta_n)I + \beta_n T, \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó f là ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0,1)$, $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$

và các tham số $\{\lambda_n\} \subset (0,1)\,, \{\beta_n\} \subset (\alpha,\beta)\,,$ với mọi $n \in (0,1)\,,$ $\alpha, \beta \in (0,1)$ thỏa mãn điều kiện $\lambda_n \to 0$ khi $n \to 0$.

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp xác định bởi (2.1), (2.2) về điểm bất động của T thể hiện qua định lý sau.

Định lý 2.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0,1)$. Cho T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Cho $\mu \in \big(0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2\big)$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.1), (2.2) hội tụ mạnh tới phần tử $p^* \in F(T)$, đồng thời p^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle (I-f)(p^*), p^* - p\rangle \leq 0,\ \forall p \in F(T).$$

Chứng minh. Trước hết, ta xét trường hợp $T^n := T_1^n T_0^n$. Rõ ràng T^n là ánh xạ không giãn trên C và $T_0^n = I - \lambda_n \mu D$, ở đây $D = I - f$. Theo (2.2) và Bổ đề 1.3 ta có:

$$\begin{aligned}
\|T^n x - T^n y\| &= \|T_1^n T_0^n x - T_1^n T_0^n y\| \\
&= \|(1-\beta_n)T_0^n x + \beta_n T_0^n x - [(1-\beta_n)T_0^n y + \beta_n T_0^n y]\| \\
&= \|(1-\beta_n)(T_0^n x - T_0^n y) + \beta_n (T_0^n x - T_0^n y)\| \\
&= \|T_0^n x - T_0^n y\| \leq (1-\lambda_n \tau)\|x-y\|,\ \forall x, y \in C,
\end{aligned}$$

trong đó, τ được xác định trong Bổ đề 1.3 với $\eta = 1-\tilde{\alpha}, L = 1+\tilde{\alpha}$. Suy ra, T^n là ánh xạ co trên C. Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, tồn tại duy nhất $x_n \in C$ sao cho $x_n = T^n x_n$, với mọi $n \in (0,1)$.

Ta chỉ ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Thật vậy, vì T_1^n là ánh xạ không giãn và $T_1^n p = p$, nên với $p \in F(T)$ ta có:

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\| &= \|T^n x_n - p\| = \|T_1^n T_0^n x_n - T_1^n p\| \\
&\leq \|T_0^n x_n - p\| = \|T_0^n x_n - T_0^n p - \lambda_n \mu D(p)\| \\
&\leq (1-\lambda_n \tau)\,\|x_n - p\| + \lambda_n \mu \|D(p)\|.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\mu}{\tau}\big\|D(p)\big\|.$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ bị chặn và do đó các dãy $\{D(x_n)\}, \{y_n\}$ cũng bị chặn, trong đó $y_n = T_0^n x_n$. Hơn nữa, từ (2.1), (2.2) ta có:

$$x_n = (1-\beta_n)y_n + \beta_n T y_n, \tag{2.3}$$

và

$$\begin{aligned}\|x_n - p\|^2 &= \|(1-\beta_n)y_n + \beta_n T y_n - p\|^2 \\ &\leq \|y_n - p\|^2 = \|\left(I - \lambda_n \mu D\right) x_n - p\|^2 \\ &= \|x_n - p\|^2 - 2\lambda_n\mu \left\langle D(x_n),\, x_n - p\right\rangle + \lambda_n^2\mu^2\|D(x_n)\|^2.\end{aligned}$$

Như vậy

$$(1-\tilde{\alpha})\|x_n - p\|^2 + \langle D(p), x_n - p\rangle \leq \frac{\lambda_n\mu}{2}\big\|D(x_n)\big\|^2. \tag{2.4}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ khi $n \to 0$. Vì $\|y_n - x_n\| = \lambda_n\mu\|D(x_n)\| \to 0$ khi $n \to 0$ do $\lambda_n \to 0$ và dãy $\{D(x_n)\}$ bị chặn, nên để chỉ ra $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ ta chỉ cần chứng minh $\|y_n - Ty_n\| \to 0$ khi $n \to 0$.

Giả sử $\{n_k\} \subset (0,1)$ là một dãy bất kì thỏa mãn $n_k \to 0$, khi $k \to \infty$, ký hiệu $\lambda_k := \lambda_{n_k}$, $x_k := x_{n_k}$, $y_k := y_{n_k} = (1 - \lambda_k\mu)\, x_k + \lambda_k\mu f(x_k)$. Ta sẽ chứng minh $\|y_k - Ty_k\| \to 0$. Giả sử $\{x_l\}$ là dãy con của dãy $\{x_k\}$ và $\{x_{k_j}\}$ là dãy con của dãy $\{x_l\}$ sao cho:

$$\limsup_{k\to\infty}\|y_k - Ty_k\| = \lim_{l\to\infty}\|y_l - Ty_l\|,$$

$$\limsup_{l\to\infty}\|x_l - p\| = \lim_{j\to\infty}\|x_{k_j} - p\|.$$

Từ (2.3) và Mệnh đề 1.1 ta nhận được

$$\begin{aligned}\|x_{k_j} - p\|^2 &= \|(1-\beta_{k_j})(y_{k_j} - p) + \beta_{k_j}(Ty_{k_j} - p)\|^2 \\ &\leq \|y_{k_j} - p\|^2 = \|(I - \lambda_{k_j}\mu D)x_{k_j} - p\|^2 \\ &\leq \|x_{k_j} - p\|^2 + 2\lambda_{k_j}\mu\|D(x_{k_j})\|\|y_{k_j} - p\|.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - p\| = \lim_{j\to\infty} \|y_{k_j} - p\|, \tag{2.5}$$

vì $\lambda_{k_j} \to 0$ và dãy $\left\{D(x_{k_j})\right\}, \left\{y_{k_j}\right\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 1.1

$$\begin{aligned}\|x_{k_j} - p\|^2 &= \left(1 - \beta_{k_j}\right) \left\|y_{k_j} - p\right\|^2 + \beta_{k_j}\|Ty_{k_j} - p\|^2 \\ &\quad - \beta_{k_j}(1 - \beta_{k_j})\|y_{k_j} - Ty_{k_j}\|^2 \\ &\le (1 - \beta_{k_j})\|y_{k_j} - p\|^2 + \beta_{k_j}\|y_{k_j} - p\|^2 \\ &\quad - \beta_{k_j}(1 - \beta_{k_j})\|y_{k_j} - Ty_{k_j}\|^2 \\ &= \|y_{k_j} - p\|^2 - \beta_{k_j}(1 - \beta_{k_j})\|y_{k_j} - Ty_{k_j}\|^2.\end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết ta nhận được:

$$\alpha(1 - \beta)\|y_{k_j} - Ty_{k_j}\|^2 \le \|y_{k_j} - p\|^2 - \|x_{k_j} - p\|^2.$$

Điều này cùng với (2.5) suy ra

$$\lim_{j\to\infty} \|y_{k_j} - Ty_{k_j}\|^2 = 0.$$

Vậy $\|y_n - Ty_n\| \to 0$ khi $n \to 0$.

Giả sử $\{x_k\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $\tilde{p}$ khi $k \to \infty$. Khi đó, từ $\|x_k - Tx_k\| \to 0$ và Bổ đề 1.1, suy ra $\tilde{p} \in F(T)$ và từ (2.4) ta có:

$$\langle D(p),\, p - \tilde{p}\rangle \ge 0,\ \forall p \in F(T). \tag{2.6}$$

Vì p, $\tilde{p} \in F(T)$ và $F(T)$ là tập lồi và đóng, nên bằng cách thay p bởi $np + (1 - n)\tilde{p}$ trong bất đẳng thức trên, rồi chia cả hai vế cho n, sau đó cho $n \to 0$ ta thu được:

$$\langle D(\tilde{p}), p - \tilde{p}\rangle \ge 0,\ \forall p \in F(T). \tag{2.7}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.6) và (2.7), suy ra $p^* = \tilde{p}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$\langle (I - f)(p^*), p^* - p\rangle \le 0,\ \forall p \in F(T),$$

và do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về p^*.

Trường hợp $T^n := T_0^n T_1^n$ được chứng minh tương tự. Ta có T^n cũng là ánh xạ co và do đó tồn tại duy nhất $x_n,\ n \in (0,1)$ sao cho $x_n = T_0^n T_1^n x_n$ và $\{x_n\}$ bị chặn. Đặt $y_n = T_1^n x_n$. Khi đó dãy $\{D(y_n)\}$ và $\{y_n\}$ cũng bị chặn. Hơn nữa, (2.3), (2.4) tương ứng được thay thế bởi

$$x_n = (I - \lambda_n \mu D)\, y_n,$$
$$(1-\tilde{\alpha})\,\|y_n - p\|^2 + \langle D(p), y_n - p\rangle \le \frac{\lambda_n \mu}{2}\|D(y_n)\|^2.$$

Từ bất đẳng thức trên, tính bị chặn của $\{D(y_n)\}$ và $\lambda_n \to 0$, suy ra $\|x_n - y_n\| \to 0$ khi $n \to 0$. Tiếp theo, ta chứng minh $\|x_n - Tx_n\| \to 0$, khi $n \to 0$. Giả sử $\{n_k\} \subset (0,1)$ là một dãy bất kì thỏa mãn $n_k \to 0$, khi $k \to \infty$ và đặt $x_k := x_{n_k}$. Ta sẽ chứng minh $\|x_k - Tx_k\| \to 0$. Giả sử $\{x_l\}$ là dãy con của dãy $\{x_k\}$, $\{x_{k_j}\}$ là dãy con của dãy $\{x_l\}$ sao cho:

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_k - Tx_k\| = \lim_{l\to\infty} \|x_l - Tx_l\|,$$
$$\limsup_{l\to\infty} \|x_l - p\| = \lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - p\|.$$

Thực hiện chứng minh tương tự trường hợp $T^n := T_1^n T_0^n$ ta nhận được điều phải chứng minh. □

Tiếp theo chúng tôi đưa vào hai cải tiến mới của (0.3) phương pháp lặp hiện cải biên ở dạng

$$\begin{cases} x_1 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = (1-\lambda_n\mu)x_n + \lambda_n\mu f(x_n), \\ x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T y_n, \quad n \ge 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

trong đó, các tham số $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$, $\{\gamma_n\} \subset (\alpha,\beta)$, với $\alpha, \beta \in (0,1)$ và

$$\begin{cases} x_1 \in C \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ x_{n+1} = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n[(1-\lambda_n\mu)y_n + \lambda_n\mu f(y_n)], \end{cases} \tag{2.9}$$

trong đó $\{\beta_n\} \subset (\alpha,\beta)$.

Định lý 2.2 *Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $H, f : C \to C$ là ánh xạ co với hệ số co $\tilde{\alpha} \in [0,1)$, T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\mu \in (0, 2(1-\tilde{\alpha})/(1+\tilde{\alpha})^2), \{\lambda_n\} \subset (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện* (L1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, (L2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ *(xem Định lý 1.1) và $\{\gamma_n\} \subset (\alpha, \beta)$ với $\alpha, \beta \in (0,1)$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi* (2.8) *hội tụ mạnh tới phần tử duy nhất $p^* \in F(T)$, đồng thời p^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân*

$$\langle (I-f)(p^*), p^* - p\rangle \leq 0,\ \forall p \in F(T).$$

Tương tự, nếu $\{\beta_n\} \subset (\alpha, \beta)$ thỏa mãn điều kiện $|\beta_{n+1} - \beta_n| \to 0$ khi $n \to \infty$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.9) *hội tụ mạnh về p^*.*

Chứng minh. Giả sử p^* là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$\langle (I-f)(p^*), p^* - p\rangle \leq 0,\ \forall p \in F(T), \tag{2.10}$$

hay $p^* = P_{F(T)} f(p^*)$.

Trước hết, xét phương pháp lặp (2.8). Ta chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Thật vậy, từ (2.8) với $p \in F(T)$ và $n \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\,(1-\gamma_n)\,x_n + \gamma_n T y_n - p\| \\
&\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \|y_n - p\| \\
&= (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \|(I - \lambda_n \mu D)x_n - p\| \\
&\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n[(1-\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \lambda_n \mu \|D(p)\|] \\
&= (1-\gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p\| + \gamma_n\lambda_n\tau\frac{\mu}{\tau}\big\|D(p)\big\|.
\end{aligned}$$

Đặt $M_p = \max\{\|x_1 - p\|, \frac{\mu}{\tau}\big\|D(p)\big\|\}$. Khi đó $\|x_1 - p\| \leq M_p$. Vậy nếu $\|x_n - p\| \leq M_p$ thì

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1-\gamma_n\lambda_n\tau)M_p + \gamma_n\lambda_n\tau M_p = M_p.$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{x_n\}$ bị chặn và do đó các dãy $\{D(x_n)\}, \{y_n\}$ và dãy $\{Ty_n\}$ cũng bị chặn.

Ta giả thiết $\max\{\|D(x_n)\|,\ \|y_n\|,\ \|Ty_n\|\} \leq M_1$, với M_1 là hằng số dương.

Đặt $z_n = Ty_n$. Từ (2.8) ta có $x_{n+1} = (1-\gamma_n)\, x_n + \gamma_n z_n$ và

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| &\leq \|y_{n+1} - y_n\| \\ &= \|(I - \lambda_{n+1}\mu D)x_{n+1} - (I - \lambda_n \mu D)x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + (\lambda_{n+1} + \lambda_n)\mu M_1.\end{aligned}$$

Vì $\lambda_n \to 0$, nên

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq 0.$$

Theo Bổ đề 1.4, $\|x_n - z_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$ và do đó $\|y_n - x_n\| \to 0$, vì $\|y_n - x_n\| \leq \lambda_n \mu M_1$ và $\lambda_n \to 0$. Suy ra $\|y_n - Ty_n\| \to 0$, $\|x_n - Tx_n\| \to 0$. Tiếp theo ta chứng minh

$$\limsup_{n\to\infty} \langle D(p^*), p^* - x_n\rangle \leq 0. \tag{2.11}$$

Thật vậy, giả sử $\left\{x_{n_j}\right\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới $\tilde{p}$ sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} \langle D(p^*), p^* - x_n\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle D(p^*), p^* - x_{n_j}\right\rangle.$$

Khi đó, từ $\|x_{n_j} - T_i x_{n_j}\| \to 0$ và Bổ đề 1.1, suy ra $\tilde{p} \in F(T)$. Do đó, từ (2.10), ta suy ra (2.11).

Cuối cùng ta có đánh giá

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p^*\|^2 &= \|\,(1-\gamma_n)\, x_n + \gamma_n T y_n - p^*\|^2 \\ &\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p^*\|^2 + \gamma_n \|y_n - p^*\|^2 \\ &= (1-\gamma_n)\|x_n - p^*\|^2 + \gamma_n \|(I - \lambda_n \mu D)x_n - p^*\|^2 \\ &= (1-\gamma_n)\|x_n - p^*\|^2 \\ &\quad + \gamma_n \|(I - \lambda_n\mu D)(x_n - p^*) - \lambda_n \mu D(p^*)\|^2 \\ &\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p^*\|^2 + \gamma_n\{(1-\lambda_n\tau)\|x_n - p^*\|^2 \\ &\quad - 2\lambda_n\mu\, \langle D(p^*), x_n - p^* - \lambda_n \mu D(x_n)\rangle\} \\ &\leq (1 - \gamma_n\lambda_n\tau)\|x_n - p^*\|^2 \\ &\quad + \gamma_n\lambda_n\tau\Big[\frac{2\mu}{\tau}\langle D(p^*), p^* - x_n\rangle + \lambda_n \frac{2\mu^2}{\tau}\big\|D(p^*)\big\|M_1\Big].\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.5 với $a_n = \|x_n - p^*\|$, $b_n = \gamma_n \lambda_n \tau$ và

$$c_n = \frac{2\mu}{\tau} \langle D(p^*), p^* - x_n \rangle + \lambda_n \frac{2\mu^2}{\tau} \big\| D(p^*) \big\| M_1,$$

$\|x_n - y_n\| \to 0,\ \lambda_n \to 0$ và (2.11) ta thu được $\|x_n - p^*\| \to 0$.

Sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.9) được chứng minh tương tự. Trước hết, ta có $\max\{\|D(y_n)\|, \|y_n\|, \|Tx_n\|\} \leq M_1$.
Đặt $z_n = (I - \lambda_n \mu D)\, y_n$, ta có

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z_n\| &= \|\,(I - \lambda_{n+1}\mu D)\, y_{n+1} - (I - \lambda_n \mu D)\, y_n\| \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + M_1 (\lambda_{n+1} + \lambda_n)\, \mu \\ &= \|(1 - \beta_{n+1})x_{n+1} + \beta_{n+1} T x_{n+1} - [(1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n]\| \\ &\quad + M_1(\lambda_{n+1} + \lambda_n)\mu \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + 2M_1 |\beta_{n+1} - \beta_n| + M_1 (\lambda_{n+1} + \lambda_n)\, \mu. \end{aligned}$$

Vì $\lambda_n \to 0$ và $|\beta_{n+1} - \beta_n| \to 0$, nên

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq 0.$$

Theo Bổ đề 1.4 $\|x_n - z_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$, hay $\|x_n - (I - \lambda_n \mu D)\, y_n\| \to 0$.
Từ đánh giá $\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - (I - \lambda_n \mu D) y_n\| + \lambda_n \mu M_1$ và $\lambda_n \to 0$ suy ra $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $\|x_n - Tx_n\| \to 0$. Giả sử $\{x_l\}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}$, $\{x_{n_j}\}$ là dãy con của dãy $\{x_l\}$ sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{l\to\infty} \|x_l - Tx_l\|,$$
$$\limsup_{l\to\infty} \|x_l - p\| = \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - p\|.$$

Từ đánh giá

$$\begin{aligned} \|x_{n_j} - p\| &\leq \|x_{n_j} - z_{n_j}\| + \|(I - \lambda_{n_j}\mu D) y_{n_j} - p\| \\ &\leq \|x_{n_j} - z_{n_j}\| + (1 - \lambda_n \tau)\|y_{n_j} - p\| + \lambda_{n_j}\mu \|D(p)\| \\ &\leq \|x_{n_j} - z_{n_j}\| + \|y_{n_j} - p\| + \lambda_{n_j}\mu \|D(p)\| \\ &\leq \|x_{n_j} - z_{n_j}\| + \|x_{n_j} - p\| + \lambda_{n_j}\mu \|D(p)\|, \end{aligned}$$

suy ra

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - p\| = \lim_{j\to\infty} \|y_{n_j} - p\|. \tag{2.12}$$

Theo Mệnh đề 1.1

$$\begin{aligned}\|y_{n_j} - p\|^2 &= (1-\beta_{n_j})\|x_{n_j} - p\|^2 + \beta_{n_j}\|Tx_{n_j} - p\|^2 \\ &\quad - (1-\beta_{n_j})\beta_{n_j}\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\|^2 \\ &\le (1-\beta_{n_j})\|x_{n_j} - p\|^2 + \beta_{n_j}\|x_{n_j} - p\|^2 \\ &\quad - (1-\beta_{n_j})\beta_{n_j}\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\|^2 \\ &= \|x_{n_j} - p\|^2 - \left(1-\beta_{n_j}\right)\beta_{n_j}\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\|^2.\end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết, ta nhận được

$$\alpha\left(1-\beta\right)\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\|^2 \le \|x_{n_j} - p\|^2 - \|y_{n_j} - p\|^2.$$

Điều này cùng với (2.12) kéo theo $\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\| \to 0$ khi $j \to \infty$. Quá trình chứng minh tiếp theo được thực hiện tương tự như chứng minh của trường hợp phương pháp (2.8). Định lý được chứng minh. □

2.2. Phương pháp lặp Mann - Halpern cải biên

Gần đây Nguyễn Bường (xem [10], [11] và [12]) đã thay các tập lồi, đóng C_n và Q_n trong phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, được đề xuất lần đầu tiên bởi các tác giả Solodov M. V., Svaiter B. F. trong tài liệu [32], bằng các nửa không gian. Một cách tương tự, chúng tôi đưa vào một số phương pháp lặp mới trên cơ sở phương pháp lặp Mann-Halpern để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H. Cụ thể hơn chúng tôi đã đề xuất phương pháp lặp mới dưới đây.

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ z_n = \alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n) P_C T P_C(x_n), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) P_C T z_n, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 \\ \qquad +\beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0. \end{cases}$$

Ta có định lý sau.

Định lý 2.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong* [0,1] *sao cho $\alpha_n \to 1$ và $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi* (2.13) *hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Trước hết, chú ý rằng

$$\|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle),$$

tương đương với

$$\langle (1-\beta_n)x_n + \beta_n x_0 - y_n, z\rangle \le \langle x_n - y_n, x_n\rangle - \frac{1}{2}\|y_n - x_n\|^2 + \frac{\beta_n}{2}\|x_0\|^2.$$

Vì vậy, H_n là nửa không gian. Rõ ràng $F(T_1) = F(T_1P_C) := \{p \in H : T_1P_C(p) = p\}$ với mọi ánh xạ T_1 từ C vào C. Theo Bổ đề 1.2, $F(P_CT) = F(T)$ và do đó $F(T) = F(P_CTP_C)$. Do đó, từ tính lồi của $\|.\|^2$ và tính không giãn của P_C, với bất kì $p \in F(T)$, tức là $p = P_CTP_C(p)$ ta thu được:

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|^2 &= \|\alpha_n P_C(x_n) - p + (1-\alpha_n)P_CTP_C(x_n)\|^2 \\ &= \|\alpha_n(P_C(x_n) - P_C(p)) \\ &\quad + (1-\alpha_n)[P_CTP_C(x_n) - P_CTP_C(p)]\|^2 \\ &\le \alpha_n\|x_n - p\|^2 \\ &\quad + (1-\alpha_n)\|P_C(x_n) - P_C(p)\|^2 \\ &\le \|x_n - p\|^2. \end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự và Bổ đề 1.1 với $x = x_0 - p$ và $y = x_n - p$, ta thu được:

$$\begin{aligned}\|y_n - p\|^2 &= \|\beta_n x_0 + (1-\beta_n)P_C T z_n - p\|^2\\ &\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|P_C T z_n - P_C T p\|^2\\ &\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|z_n - p\|^2\\ &\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^2\\ &= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0 - p\|^2 - \|x_n - p\|^2)\\ &= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, p\rangle).\end{aligned}$$

Do đó, $p \in H_n$ với mọi $n \ge 0$. Điều đó có nghĩa là $F(T) \subset H_n$ với mọi $n \ge 0$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $F(T) \subset H_n \cap W_n$ với mỗi $n \ge 0$ bằng qui nạp. Với $n = 0$, ta có $W_0 = H$ do đó $F(T) \subset H_0 \cap W_0$. Giả sử x_i đã biết và $F(T) \subset H_i \cap W_i$ với $i > 0$. Tồn tại duy nhất phần tử $x_{i+1} \in H_i \cap W_i$ sao cho $x_{i+1} = P_{H_i \cap W_i}(x_0)$. Do đó, theo Mệnh đề 1.3 ta có:

$$\langle x_{i+1} - x_0, p - x_{i+1}\rangle \ge 0,$$

với mỗi $p \in H_i \cap W_i$. Vì $F(T) \subset H_i \cap W_i$ nên $F(T) \subset W_{i+1}$. Vậy, ta có $F(T) \subset H_{i+1} \cap W_{i+1}$.

Hơn nữa vì $F(T)$ là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H nên tồn tại duy nhất phần tử $u_0 \in F(T)$ sao cho $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$. Từ $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$, ta nhận được

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \|z - x_0\|,$$

với mọi $z \in H_n \cap W_n$. Vì $u_0 \in F(T) \subset W_n$, nên

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \|u_0 - x_0\|,\ n \ge 0. \tag{2.14}$$

Điều này kéo theo dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Do đó, các dãy $\{P_C T P_C(x_n)\}$, $\{z_n\}$ và $\{T z_n\}$ cũng bị chặn.

Tiếp theo, ta chỉ ra

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{2.15}$$

Từ định nghĩa của W_n và Mệnh đề 1.3, suy ra $x_n = P_{W_n}(x_0)$. Do $x_{n+1} \in H_n \cap W_n$, nên ta có:

$$\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\|, \quad n \geq 0.$$

Do đó $\{\|x_n - x_0\|\}$ là không giảm, bị chặn. Vậy, tồn tại $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$. Mặt khác, do $x_{n+1} \in W_n$, nên $\langle x_n - x_0, x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0$. Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|x_n - x_0 - (x_{n+1} - x_0)\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_n - x_0, x_{n+1} - x_0\rangle + \|x_{n+1} - x_0\|^2 \\ &\leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2, \ \forall n \geq 0.\end{aligned}$$

Do vậy (2.15) được suy ra từ bất đẳng thức trên và $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$. Bởi vì $\alpha_n \to 1$ và các dãy $\{x_n\}, \{P_C T P_C(x_n)\}$ bị chặn, từ (2.13) ta có

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - P_C(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} (1 - \alpha_n)\|P_C(x_n) - P_C T P_C(x_n)\| = 0. \tag{2.16}$$

Mặt khác, vì $x_{n+1} \in H_n$ nên

$$\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \beta_n(\|x_0\| + 2\langle x_n - x_0, x_{n+1}\rangle).$$

Do đó, từ (2.15) và tính bị chặn của dãy $\{x_n\}$, $\beta_n \to 0$ và bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0. \tag{2.17}$$

Điều này cùng với (2.15) kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{2.18}$$

Ta có $P_C T z_n = y_n - \beta_n(x_n - P_C T z_n) + \beta_n(x_n - x_0)$, nên

$$\|x_n - P_C T z_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \beta_n\|x_n - P_C T z_n\| + \beta_n\|x_n - x_0\|.$$

Từ (2.14) và bất đẳng thức trên, suy ra

$$\|x_n - P_C T z_n\| \le \frac{1}{1-\beta_n}\Big(\|x_n - y_n\| + \beta_n \|u_0 - x_0\|\Big).$$

Do $\beta_n \to 0$ ($\beta_n \le 1-\beta,\ \beta \in (0,1)$), (2.18) và bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - P_C T z_n\| = 0. \tag{2.19}$$

Ta lại có $P_C T z_n = P_C P_C T z_n$ và do đó:

$$\begin{aligned}\|z_n - P_C T z_n\| &\le \|z_n - P_C(x_n)\| + \|P_C(x_n) - P_C P_C(T z_n)\| \\ &\le \|z_n - P_C(x_n)\| + \|x_n - P_C T z_n\|.\end{aligned}$$

Vì vậy từ (2.16), (2.19) và bất đẳng thức trên, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - P_C T z_n\| = 0. \tag{2.20}$$

Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới một phần tử $p \in H$ khi $j \to \infty$. Từ (2.19), (2.20), ta có $\{z_{n_j}\}$ hội tụ yếu tới p và do $\{z_n\} \subset C$ nên $p \in C$. Theo Bổ đề 1.1 và (2.20), suy ra $p \in F(P_C T) = F(T)$.

Từ (2.14) và tính nửa liên tục dưới yếu của chuẩn ta có

$$\begin{aligned}\|x_0 - u_0\| &\le \|x_0 - p\| \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| \\ &\le \limsup_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| \\ &\le \|x_0 - u_0\|.\end{aligned}$$

Do vậy, ta nhận được $\lim_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| = \|x_0 - u_0\| = \|x_0 - p\|$. Điều này cùng với chú ý 1.1, kéo theo $x_{k_j} \to p = u_0$. Do tính duy nhất của hình chiếu $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, nên ta có $x_n \to u_0$. Từ (2.18), (2.19), (2.20), ta thu được $y_n \to u_0$ và $z_n \to u_0$. Định lý được chứng minh. □

Ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 2.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) P_C T P_C(x_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Đặt $\alpha_n \equiv 1$ trong định lý 2.3 ta được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 2.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T : C \to H$ là ánh xạ không giãn với $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là một dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\alpha_n \to 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = P_C T(\alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n) P_C T P_C(x_n)), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 2.3, chọn $\beta_n \equiv 0$, ta nhận được điều phải chứng minh. □

2.3. Phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp cho ánh xạ không giãn

Trong Mục này, chúng tôi giới thiệu một phương pháp lặp mới trên cơ sở phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học và phương pháp dạng đường dốc lai ghép để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H. Cụ thể, dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n(I - TP_C)x_n, \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \ge 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ta có định lý dưới đây.

Định lý 2.4 *Cho C là tập con lồi, đóng của không gian Hilbert thực H và cho T là ánh xạ không giãn trên C sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là một dãy trong $(a, 1)$ với $a \in (0, 1]$. Khi đó dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi (2.21), cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Trước hết, chú ý rằng $\|y_n - z\| \le \|x_n - z\|$ tương đương với

$$\langle y_n - x_n, x_n - z\rangle \le -\frac{1}{2}\left\|y_n - x_n\right\|^2.$$

Như vậy, H_n là một nửa không gian. Ta chỉ ra $F(T) \subset H_n$ với mọi $n \ge 0$. Rõ ràng $F(T) = F(TP_C) := \{p \in H : TP_C(p) = p\}$ với mỗi ánh xạ T từ C vào C. Do vậy, với mỗi $p \in F(T)$ ta có:

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n TP_C(x_n) - p\| \\ &= \|(1 - \mu_n)(x_n - p) + \mu_n(TP_C x_n - TP_C p)\| \\ &\le (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|x_n - p\| \\ &= \|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Do đó, $p \in H_n$ với mọi $n \geq 0$. Điều này chứng tỏ $F(T) \subseteq H_n$ với mọi $n \geq 0$.

Vì $F(T)$ là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H, nên tồn tại duy nhất phần tử $u_0 \in F(T)$ sao cho $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$. Từ $x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0)$, suy ra

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\|,$$

với mọi $z \in H_{n+1}$. Đặc biệt, vì $u_0 \in F(T) \subset H_{n+1}$, nên

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|, \ \forall n \geq 0. \tag{2.22}$$

Bây giờ, ta chỉ ra

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+m} - x_n\| = 0, \tag{2.23}$$

với mọi số nguyên $m > 0$. Thật vậy, từ định nghĩa của H_{n+1}, ta có $H_{n+1} \subseteq H_n$ và

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_0\|, \ \forall n \geq 0.$$

Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$. Tiếp theo, từ Mệnh đề 1.1, $x_{n+m} \in H_n$ và $x_n = P_{H_n}(x_0)$, ta nhận được

$$\langle x_n - x_0, x_{n+m} - x_n\rangle \geq 0.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\|^2 &= \|x_{n+m} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_n - x_0, x_{n+m} - x_n\rangle \\ &\leq \|x_{n+m} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2.\end{aligned}$$

Đánh giá trên cùng với $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$, suy ra (2.23). Vậy, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử $x_n \to p \in H$. Mặt khác, từ (2.23) và bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\|x_n - TP_Cx_n\| &= \frac{1}{\mu_n}\big\|y_n - x_n\big\| \\ &\leq \frac{1}{a}\big(\big\|y_n - x_{n+m}\big\| + \big\|x_{n+m} - x_n\big\|\big) \\ &\leq \frac{2}{a}\big\|x_{n+m} - x_n\big\|,\end{aligned}$$

ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - TP_C x_n\| = 0.$$

Suy ra $p = TP_C(p)$, hay $p \in F(T)$. Từ (2.22) và Mệnh đề 1.1 ta suy ra $p = u_0$. Sự hội tụ mạnh của dãy $\{y_n\}$ về u_0 được suy ra từ

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \mu_n \|x_n - TP_C x_n\| = 0,$$

và $x_n \to u_0$. Định lý được chứng minh. □

2.4. Điểm bất động chung cho hai ánh xạ không giãn trên hai tập

Chúng tôi đưa vào phương pháp lặp mới trên cơ sở phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, phương pháp lặp Mann - Halpern để tìm một điểm bất động của hai ánh xạ không giãn trên hai tập trong không gian Hilbert thực H.

Giả sử C_1, C_2, là hai tập con lồi, đóng trong H và $T_1 : C_1 \to C_1$, $T_2 : C_2 \to C_2$ là ánh xạ không giãn. Ta xét bài toán: Tìm

$$p \in F := F(T_1) \cap F(T_2), \tag{2.24}$$

giả thiết rằng F không rỗng.
Một số trường hợp đặc biệt của (2.24) như sau:

(i) Nếu $T_1 = T_2 = I$ ánh xạ đồng nhất trong H, (2.24) thì bài toán trở thành bài toán là tập chấp nhận được lồi đã nghiên cứu trong [8];

(ii) Nếu $C_1 = C_2 = C$, thì bài toán (2.24) đã được nghiên cứu trong [19].

Để giải quyết bài toán (2.24) chúng tôi đề xuất phương pháp lặp mới như sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ}, \\ z_n = x_n - \mu_n(x_n - T_1 P_{C_1}(x_n)), \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n) T_2 P_{C_2}(z_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Ta có định lý sau.

Định lý 2.5 *Cho C_1 và C_2 là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và T_1, T_2 là hai ánh xạ không giãn trên C_1 và C_2, sao cho $F := F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong* [0,1] *sao cho $\mu_n \in (a, b)$ với $a, b \in (0, 1)$ và $\beta_n \to 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi* (2.25) *hội tụ mạnh tới $u_0 = P_F(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Trước hết, chú ý rằng

$$\|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle),$$

tương đương với

$$\langle (1-\beta_n)x_n + \beta_n x_0 - y_n, z\rangle \leq \langle x_n - y_n, x_n\rangle - \frac{1}{2}\|y_n - x_n\|^2 + \frac{\beta_n}{2}\|x_0\|^2.$$

Vì vậy, H_n là một nửa không gian. Ta luôn có

$$F(T) = F(TP_C) := \{p \in H : TP_C(p) = p\},$$

với mọi ánh xạ T từ C vào C. Vì vậy $F = F(\tilde{T}_1) \cap F(\tilde{T}_2)$ ở đây $\tilde{T}_i = T_i P_{C_i}$, và $\tilde{T}_i, i = 1, 2$, là hai ánh xạ không giãn trên H. Từ (2.25) và Mệnh đề 1.1, với mọi $p \in F$, ta có:

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|^2 &= \|(1-\mu_n)(x_n - p) + \mu_n(\tilde{T}_1 x_n - p)\|^2 \\ &= (1-\mu_n)\|x_n - p\|^2 + \mu_n\|\tilde{T}_1 x_n - p\|^2 \\ &\quad - (1-\mu_n)\mu_n\|x_n - \tilde{T}_1 x_n\|^2 \\ &\leq (1-\mu_n)\|x_n - p\|^2 + \mu_n\|x_n - p\|^2 \\ &\quad - (1-\mu_n)\mu_n\|x_n - \tilde{T}_1 x_n\|^2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$= \|x_n - p\|^2 - (1-\mu_n)\mu_n\|x_n - \tilde{T}_1 x_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2.$$

Bằng lập luận tương tự, đồng thời kết hợp với tính lồi của chuẩn $\|.\|^2$, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\|^2 &= \|\beta_n x_0 + (1-\beta_n)\tilde{T}_2 z_n - p\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|\tilde{T}_2 z_n - \tilde{T}_2 p\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|z_n - p\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^2 \\
&= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0 - p\|^2 - \|x_n - p\|^2) \\
&= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, p\rangle).
\end{aligned}$$

Do đó, $p \in H_n$ với mọi $n \geq 0$. Điều đó có nghĩa là $F(T) \subset H_n$ với mọi $n \geq 0$.

Tiếp theo, ta chỉ ra $F(T) \subset H_n \cap W_n$ với mỗi $n \geq 0$ bằng qui nạp. Với $n = 0$, ta có $W_0 = H$ và do đó $F(T) \subset H_0 \cap W_0$. Giả sử x_i đã biết và $F(T) \subset H_i \cap W_i$ với $i > 0$. Tồn tại duy nhất một phần tử $x_{i+1} \in H_i \cap W_i$ sao cho $x_{i+1} = P_{H_i \cap W_i}(x_0)$. Theo Mệnh đề 1.3 ta có

$$\langle x_{i+1} - x_0, p - x_{i+1}\rangle \geq 0,$$

với mỗi $p \in H_i \cap W_i$. Vì $F(T) \subset H_i \cap W_i$ nên $F(T) \subset W_{i+1}$. Vậy $F(T) \subset H_{i+1} \cap W_{i+1}$.

Vì $F(T)$ là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của H nên tồn tại duy nhất phần tử $u_0 \in F(T)$ sao cho $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$. Từ $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$, suy ra

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\|,$$

với mọi $z \in H_n \cap W_n$. Đặc biệt, vì $u_0 \in F(T) \subset W_n$, nên

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|, \; n \geq 0. \tag{2.27}$$

Điều này kéo theo dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Ta chỉ ra

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{2.28}$$

Từ định nghĩa của W_n và từ Mệnh đề 1.3 suy ra $x_n = P_{W_n}(x_0)$. Vì $x_{n+1} \in H_n \cap W_n$, nên

$$\|x_{n+1} - x_0\| \geq \|x_n - x_0\|, \; n \geq 0.$$

Do đó $\{\|x_n - x_0\|\}$ là không giảm và bị chặn. Suy ra, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$. Từ $x_{n+1} \in W_n$, suy ra

$$\langle x_n - x_0, x_{n+1} - x_n\rangle \geq 0,$$

và

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n+1}\|^2 &= \|x_n - x_0 - (x_{n+1} - x_0)\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_n - x_0, x_{n+1} - x_0\rangle + \|x_{n+1} - x_0\|^2 \\ &\leq \|x_{n+1} - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2, \; \forall n \geq 0.\end{aligned}$$

Do vậy (2.28) được suy ra từ bất đẳng thức trên và $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = c$.

Mặt khác, vì $x_{n+1} \in H_n$ nên

$$\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \beta_n(\|x_0\| + 2\langle x_n - x_0, x_{n+1}\rangle).$$

Từ (2.28), tính bị chặn của dãy $\{x_n\}$, $\beta_n \to 0$ và từ bất đẳng thức trên, suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0. \tag{2.29}$$

Điều này cùng với (2.28) kéo theo

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{2.30}$$

Ta có $\tilde{T}_2 z_n = y_n - \beta_n(x_n - \tilde{T}_2 z_n) + \beta_n(x_n - x_0)$ và

$$\|x_n - \tilde{T}_2 z_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \beta_n\|x_n - \tilde{T}_2 z_n\| + \beta_n\|x_n - x_0\|.$$

Từ (2.27) và bất đẳng thức trên, suy ra

$$\|x_n - \tilde{T}_2 z_n\| \leq \frac{1}{1 - \beta_n}(\|x_n - y_n\| + \beta_n\|u_0 - x_0\|).$$

Do $\beta_n \to 0$ ($\beta_n \leq 1 - \beta$ với $\beta \in (0, 1)$), (2.30) và bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \tilde{T}_2 z_n\| = 0. \tag{2.31}$$

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $\|x_n - \tilde{T}_1 x_n\| \to 0$ và $\|x_n - \tilde{T}_2 x_n\| \to 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, từ tính bị chặn của dãy $\{x_n\}$, với bất kỳ $p \in F$ và dãy con $\{\tilde{T}_1 x_{n_k} - x_{n_k}\}$ của $\{\tilde{T}_1 x_n - x_n\}$, tồn tại dãy con $\{x_{n_j}\} \subset \{x_{n_k}\}$ sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - p\| = \limsup_{k\to\infty} \|x_{n_k} - p\| = a.$$

Từ (2.31), (2.26) và đánh giá

$$\begin{aligned}
\|x_{n_j} - p\| &\leq \|x_{n_j} - \tilde{T}_2 z_{n_j}\| + \|\tilde{T}_2 z_{n_j} - p\| \\
&\leq \|x_{n_j} - \tilde{T}_2 z_{n_j}\| + \|z_{n_j} - p\| \\
&\leq \|x_{n_j} - \tilde{T}_2 z_{n_j}\| + \|x_{n_j} - p\|,
\end{aligned}$$

ta nhận được

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - p\| = \lim_{j\to\infty} \|z_{n_j} - p\| = a. \tag{2.32}$$

Từ (2.26) và giả thiết μ_n, suy ra

$$a(1-b)\|\tilde{T}_1 x_{n_j} - x_{n_j}\| \leq \|x_{n_j} - p\| - \|z_{n_j} - p\|,$$

điều này kết hợp với (2.32), suy ra $\|\tilde{T}_1 x_{n_j} - x_{n_j}\| \to 0$ và do đó $\|\tilde{T}_1 x_n - x_n\| \to 0$, khi $n \to \infty$. Hơn nữa, ta có các đánh giá

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}_2 x_n - x_n\| &\leq \|\tilde{T}_2 x_n - \tilde{T}_2 z_n\| + \|\tilde{T}_2 z_n - x_n\| \\
&\leq \|x_n - z_n\| + \|\tilde{T}_2 z_n - x_n\|,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \mu_n \|\tilde{T}_1 x_n - x_n\| = 0. \tag{2.34}$$

Từ (2.31), (2.33), (2.34) và $\|\tilde{T}_1 x_n - x_n\| \to 0$, ta nhận được $\|\tilde{T}_2 x_n - x_n\| \to 0$. Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{x_{n_i}\}$

của $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến phần tử $p \in H$ khi $i \to \infty$. Do đó, theo Bổ đề 1.1 và $\|\tilde{T}_1 x_n - x_n\|, \|\tilde{T}_2 x_n - x_n\| \to 0$, ta có $p \in F$.

Từ (2.27) và tính nửa liên tục dưới yếu của chuẩn ta suy ra

$$\begin{aligned}\|x_0 - u_0\| &\leq \|x_0 - p\| \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| \\ &\leq \|x_0 - u_0\|.\end{aligned}$$

Do vậy, ta nhận được $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_0 - x_{n_j}\| = \|x_0 - u_0\| = \|x_0 - p\|$. Từ chú ý 1.1, suy ra $x_{n_j} \to p = u_0$. Do tính duy nhất của hình chiếu $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, nên ta có $x_n \to u_0$. Từ (2.30) và (2.34), ta thu được $y_n \to u_0$ và $z_n \to u_0$, tương ứng. Định lý được chứng minh. □

Ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 2.3 *Cho C_1, C_2, là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T_1 : C_1 \to C_1, T_2 : C_2 \to C_2$ là hai ánh xạ không giãn với $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy số trong [0,1] thỏa mãn $0 < a \leq \mu_n \leq b < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = T_2 P_{C_2}(x_n - \mu_n(x_n - T_1 P_{C_1}(x_n))), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{F(T)}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 2.5, chọn $\beta_n \equiv 0$ ta được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 2.4 *Cho C_1, C_2, là hai tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $C := C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ $\{\beta_n\}$ là hai* *dãy số trong* [0,1] *thỏa mãn* $\beta_n \to 0$. *Khi đó, dãy* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$, *xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ z_n = x_n - \mu_n(x_n - P_{C_1}(x_n)), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)P_{C_2}(z_n), \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

hội tụ mạnh tới $u_0 = P_C(x_0)$, *khi* $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 2.5, chọn $T_1 = T_2 = I$ ta nhận được điều phải chứng minh. □

2.5. Ví dụ tính toán minh họa

Dưới đây, ta sẽ xét một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa cho các phương pháp lặp được giới thiệu ở trên.
Trong toàn bộ luận án, các chương trình thực nghiệm đều được viết bằng ngôn ngữ MATLAB 704 và đã thử nghiệm chạy trên máy tính HP Compaq 510, Core(TM) 2 Duo CPU. T5870 2.0 GHz., Ram 2GB.

Ví dụ 2.1 Xét ánh xạ T từ không gian $L_2[0,1]$ vào chính nó được xác định như sau:

$$(T(x))(u) = 3\int_0^1 usx(s)ds + 3u - 2, \tag{2.35}$$

với mọi $x \in L_2[0,1]$. Khi đó, với mọi $x, y \in L_2[0,1]$ ta có:

$$\|T(x) - T(y)\| = 3\Big(\int_0^1 \big(\int_0^1 us(x(s)-y(s))ds\big)^2 du\Big)^{1/2}$$

$$\leq 3\Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 u^2s^2ds\int_0^1 (x(s)-y(s))^2ds\Big)du\Big)^{1/2}$$
$$\leq \|x-y\|.$$

Suy ra T là một ánh xạ không giãn.
Xét ánh xạ f từ $L_2[0,1]$ vào chính nó được xác định bởi

$$(f(x))(u) = \frac{1}{2}x(u),\ \text{với mọi } x \in L_2[0,1]. \tag{2.36}$$

Khi ấy f là ánh xạ co với hệ số co $\widetilde{\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

Dễ thấy bài toán bất đẳng thức biến phân: Tìm $p^* \in F(T)$ sao cho

$$\langle p^* - f(p^*), p - p^*\rangle \geq 0,\quad \forall p \in F(T), \tag{2.37}$$

có nghiệm duy nhất là $p^* = 3u - 2$.

Chúng tôi, thực hiện thử nghiệm số cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn T bởi phương pháp lặp ẩn (2.1), (2.2). Từ (2.1) ta xác định được

$$\begin{aligned} T^t = T_1^tT_0^t &= T_1^t[(1-\lambda_t\mu)I + \lambda_t\mu f] \\ &= (1-\beta_t)(1-\frac{\lambda_t\mu}{2})I + \beta_tT((1-\frac{\lambda_t\mu}{2})I). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Vì thế phương trình $T^tx(u) = x(u)$ tương đương với

$$(1-\beta_t)(1-\frac{\lambda_t\mu}{2})x(u) + \beta_t(3\int_0^1(1-\frac{\lambda_t\mu}{2})usx(s)ds + 3u - 2) = x(u).$$

Hay ta có

$$\begin{aligned} (1-(1-\beta_t)(1-\frac{\lambda_t\mu}{2}))x(u) - 3\beta_t(1-\frac{\lambda_t\mu}{2})\int_0^1 usx(s)ds& \\ = \beta_t(3u-2).& \end{aligned} \tag{2.39}$$

Để tìm nghiệm, ta xấp xỉ tích phân trong (2.39) theo công thức hình thang bằng cách chia đoạn $[0,1]$ thành M đoạn con bằng nhau với độ dài

$h = \dfrac{1}{M}$ bởi các điểm chia $u_i = \dfrac{i}{M}$, $(i = \overline{0, M})$. Khi đó phương trình xấp xỉ của (2.39) là

$$\begin{aligned}[(1 - (1 - \beta_t)(1 - \frac{\lambda_t\mu}{2}))I - 3\beta_t(1 - \frac{\lambda_t\mu}{2})B]X \\ = \beta_t(3u^T - (2, 2, ..., 2))\end{aligned} \tag{2.40}$$

trong đó $B = (b_{ij})$ là ma trận vuông cỡ $M + 1$ xác định bởi

$$b_{ij} := \begin{cases} \frac{h}{2}u_iu_0 & \text{nếu } j = 0, \\ \frac{h}{2}u_iu_M & \text{nếu } j = M, \\ hu_iu_j & \text{trong các trường hợp khác,} \end{cases}$$

và I là ma trận đơn vị cùng cấp với B.

$$X = (x(u_0),\ x(u_1), ..., x(u_M))^T \text{ và } u^T = (u_0,\ u_1, ..., u_M).$$

Chọn $\beta_t = \beta = 10^{-4}$, $\mu = \dfrac{2}{5}$, $\lambda_t = \lambda = 10^{-4}$ và tính ma trận

$$A = (1 - (1 - \beta)(1 - \frac{\lambda\mu}{2}))I - 3\beta(1 - \frac{\lambda\mu}{2})B$$

và tính vế phải $g = \beta(3u^T - (2, 2, ..., 2)^T)$. Khi đó từ (2.40) ta tính được nghiệm xấp xỉ $X = A^{-1}g$. Với nghiệm chính xác $p^* = 3u - 2$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 20 được thể hiện trong bảng sau Bảng 2.1

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.00000000000000$	-1.666694444908047	-2.00000000000000
$u_1 = 0.05000000000000$	-1.540906200737406	-1.85000000000000
$u_2 = 0.10000000000000$	-1.415117956566764	-1.70000000000000
$u_3 = 0.15000000000000$	-1.289329712396123	-1.55000000000000
$u_4 = 0.20000000000000$	-1.163541468225481	-1.40000000000000
$u_5 = 0.25000000000000$	-1.037753224054840	-1.25000000000000

$u_6 = 0.30000000000000$	-0.911964979884199	-1.10000000000000
$u_7 = 0.35000000000000$	-0.786176735713558	-0.95000000000000
$u_8 = 0.40000000000000$	-0.660388491542917	-0.80000000000000
$u_9 = 0.45000000000000$	-0.534600247372275	-0.65000000000000
$u_{10} = 0.50000000000000$	-0.408812003201634	-0.50000000000000
$u_{11} = 0.55000000000000$	-0.283023759030993	-0.35000000000000
$u_{12} = 0.60000000000000$	-0.157235514860352	-0.20000000000000
$u_{13} = 0.65000000000000$	-0.031447270689710	-0.05000000000000
$u_{14} = 0.70000000000000$	0.094340973480931	0.10000000000000
$u_{15} = 0.75000000000000$	0.220129217651572	0.25000000000000
$u_{16} = 0.80000000000000$	0.345917461822214	0.40000000000000
$u_{17} = 0.85000000000000$	0.471705705992855	0.55000000000000
$u_{18} = 0.90000000000000$	0.597493950163497	0.70000000000000
$u_{19} = 0.95000000000000$	0.723282194334137	0.85000000000000
$u_{20} = 1.00000000000000$	0.849070438504779	1.00000000000000

Tiếp theo, chúng tôi cũng thực hiện thử nghiệm số cho phương pháp lặp hiện (2.8). Trong trường hợp này ta có

$$y_k = (1 - \lambda_k \mu)x_k + \frac{\lambda_k \mu x_k}{2} = (1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})x_k$$

nên

$$Ty_k(u) = (1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})(3\int_0^1 usx_k(s)ds + 3u - 2).$$

Cũng làm tương tự như trên, ta có phương trình xấp xỉ là

$$TY_k = (1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})(3BX_k + p) = (Ty_k(u_0), Ty_k(u_1), ..., Ty_k(u_M)),$$

ở đây $p = 3(u_0, u_1, ..., u_M) - (2, 2, ..., 2),\ X_k = (x_k(u_0), x_k(u_1), ..., x_k(u_M))$. Chọn $\mu = \frac{2}{5}, \gamma_k = \frac{1}{2},\ \lambda_k = \frac{1}{k},\ \forall k \geq 1$ và áp dụng công thức lặp (2.8) đối với xấp xỉ này ta được

$$X_{k+1} = (1 - \gamma_k)X_k + \gamma_k(1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})(3BX_k + p).$$

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 20 được thể hiện trong bảng sau

Bảng 2.2

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.0000000000000$	-1.999998092651367	-2.0000000000000
$u_1 = 0.0500000000000$	-1.848447062448525	-1.8500000000000
$u_2 = 0.1000000000000$	-1.696896032245682	-1.7000000000000
$u_3 = 0.15000000000000$	-1.545345002042839	-1.55000000000000
$u_4 = 0.20000000000000$	-1.393793971839996	-1.40000000000000
$u_5 = 0.25000000000000$	-1.242242941637154	-1.25000000000000
$u_6 = 0.30000000000000$	-1.090691911434311	-1.10000000000000
$u_7 = 0.35000000000000$	-0.939140881231469	-0.95000000000000
$u_8 = 0.40000000000000$	-0.787589851028625	-0.80000000000000
$u_9 = 0.45000000000000$	-0.636038820825783	-0.65000000000000
$u_{10} = 0.50000000000000$	-0.484487790622940	-0.50000000000000
$u_{11} = 0.55000000000000$	-0.332936760420098	-0.35000000000000
$u_{12} = 0.60000000000000$	-0.181385730217255	-0.20000000000000
$u_{13} = 0.65000000000000$	-0.029834700014412	-0.05000000000000
$u_{14} = 0.70000000000000$	0.121716330188430	0.10000000000000
$u_{15} = 0.75000000000000$	0.273267360391273	0.25000000000000
$u_{16} = 0.80000000000000$	0.424818390594116	0.40000000000000
$u_{17} = 0.85000000000000$	0.576369420796958	0.55000000000000
$u_{18} = 0.90000000000000$	0.727920450999801	0.70000000000000
$u_{19} = 0.95000000000000$	0.879471481202644	0.85000000000000
$u_{20} = 1.00000000000000$	1.031022511405487	1.00000000000000

Cũng với bài toán đã xét ở trên, xét phương pháp lặp hiện (2.9). Ta có $y_k = (1-\beta_k)x_k + \beta_k T x_k$ nên bằng phương pháp tương tự ta có phương trình xấp xỉ là

$$Y_k = (1-\beta_k)X_k + \beta_k(3BX_k + p),$$

trong đó

$$Y_k = (y_k(u_0), y_k(u_1), ..., y_k(u_M))^T, \ X_k = (x_k(u_0), x_k(u_1), ..., x_k(u_M))^T$$

và $p = 3(u_0, u_1, ..., u_M) - (2, 2, ..., 2)$.
Chọn $\mu = \frac{2}{5}$, $\beta_k = \gamma_k = \frac{1}{2}$, $\lambda_k = \frac{1}{k}$ với mọi $k \geq 1$, áp dụng công thức lặp (2.9) cho xấp xỉ này ta được

$$X_{k+1} = (1 - \gamma_k)X_k + \gamma_k(1 - \frac{\lambda_k \mu}{2})Y_k.$$

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 50 được trình bày trong bảng dưới Bảng 2.3

Các nút chia u_i	Nghiệm xx $X(u_i)$	Nghiệm cx $p^*(u_i)$
$u_0 = 0.0000000000000$	-1.982945017736413	-2.0000000000000
$u_1 = 0.0500000000000$	-1.832285258509282	-1.8500000000000
$u_2 = 0.1000000000000$	-1.681625499282151	-1.7000000000000
$u_3 = 0.15000000000000$	-1.530965740055019	-1.55000000000000
$u_4 = 0.20000000000000$	-1.380305980827888	-1.40000000000000
$u_5 = 0.25000000000000$	-1.229646221600757	-1.25000000000000
$u_6 = 0.30000000000000$	-1.078986462373626	-1.10000000000000
$u_7 = 0.35000000000000$	-0.928326703146494	-0.95000000000000
$u_8 = 0.40000000000000$	-0.777666943919363	-0.80000000000000
$u_9 = 0.45000000000000$	-0.627007184692231	-0.65000000000000
$u_{10} = 0.50000000000000$	-0.476347425465100	-0.50000000000000
$u_{11} = 0.55000000000000$	-0.325687666237969	-0.35000000000000
$u_{12} = 0.60000000000000$	-0.175027907010838	-0.20000000000000
$u_{13} = 0.65000000000000$	-0.024368147783706	-0.05000000000000
$u_{14} = 0.70000000000000$	0.126291611443425	0.10000000000000
$u_{15} = 0.75000000000000$	0.276951370670556	0.25000000000000
$u_{16} = 0.80000000000000$	0.427611129897688	0.40000000000000
$u_{17} = 0.85000000000000$	0.578270889124819	0.55000000000000

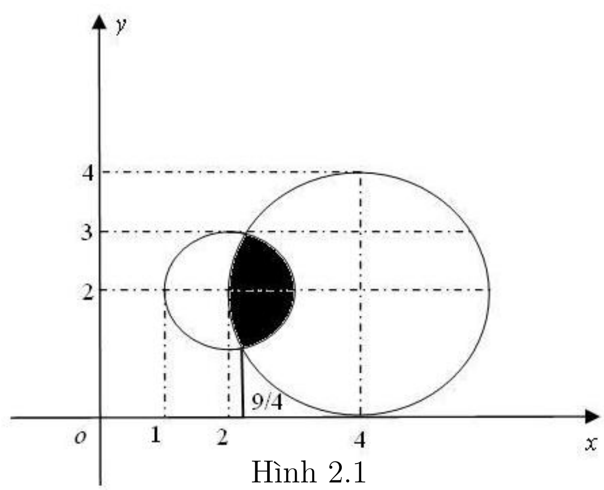
$u_{18} = 0.90000000000000$	0.728930648351950	0.70000000000000
$u_{19} = 0.95000000000000$	0.879590407579081	0.85000000000000
$u_{20} = 1.00000000000000$	0.849070438504779	1.00000000000000

Ví dụ 2.2 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét hai hình tròn S_1 và S_2 lần lượt được cho bởi

$$S_1 : \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1,$$

$$S_2 : \ (x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

Xét bài toán tìm một phần tử x^*, sao cho $x^* \in S = S_1 \cap S_2$.
Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các phép chiếu mêtric từ $\mathbb{R}^2$ lên S_1 và S_2 và đặt $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$. Khi đó, T là một ánh xạ không giãn và $F(T) = S$. Như vậy, bài toán trên được đưa về bài toán tìm một điểm bất động của ánh xạ không giãn T.



Hình 2.1

Ta có
S_1 có tâm $I_1 = (2,2)$ và bán kính $r_1 = 1$.
S_2 có tâm $I_2 = (4,2)$ và bán kính $r_2 = 2$.
Tính $Tx_n = (T_1x_n + T_2x_n)/2$, bởi

$$T_1x_n = \begin{cases} x_n & \text{nếu } d(x_n, I_1) \leq r_1, \\ I_1 + \dfrac{r_1(x_n - I_1)}{||x_n - I_1||^2} & \text{nếu } d(x_n, I_1) > r_1, \end{cases}$$

$$T_2x_n = \begin{cases} x_n & \text{nếu } d(x_n, I_2) \le r_2, \\ I_2 + \dfrac{r_2(x_n - I_2)}{||x_n - I_2||^2} & \text{nếu } d(x_n, I_2) > r_2, \end{cases}$$

và ta có

$$\begin{aligned} H_n &= \{z \in H : \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle) \ge \|y_n - z\|^2\} \\ &= \{z \in H : \langle 2(\beta_n - 1)x_n + 2y_n - 2\beta_n x_0, z\rangle \\ &\quad \ge ||y_n||^2 - ||x_n||^2 - \beta_n||x_n||^2\}. \\ W_n &= \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\} \\ &= \{z \in H : \langle x_n, x_0 - x_n\rangle \ge \langle z, x_0 - x_n\rangle\}. \end{aligned}$$

Lặp lại quá trình trên và chọn $\alpha_n = 1 - \dfrac{1}{n+1},\ \beta_n = \dfrac{1}{n},\ x_0 = (\dfrac{9}{4}, 0)$, tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 1000 trình bày trong bảng sau

Bảng 2.4

Nghiệm		Nghiệm xx x_n		Nghiệm xx y_n		Nghiệm xx z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
2.2500000	1.0317541	2.2332447	1.0319233	2.2396581	1.0343974	2.2332510	1.03192782

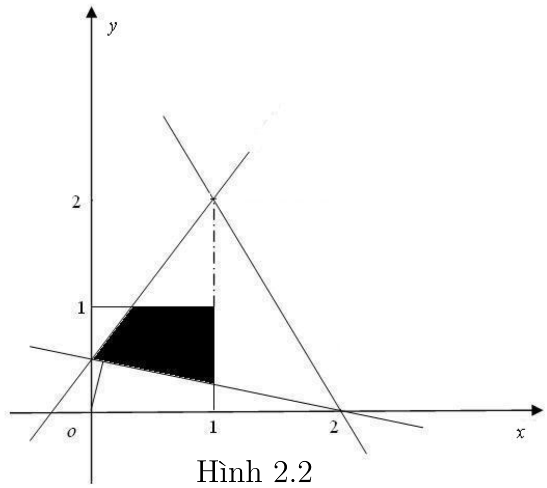
Ví dụ 2.3 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét hai tập hợp C_1 và C_2 lần lượt được cho bởi

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x,\ y \le 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x - 2y \ge -1,\ x + 4y \ge 2,\ 2x + y \le 4\}.$$

Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các phép chiếu mêtric từ $\mathbb{R}^2$ lên C_1 và C_2. Khi đó, T_1, T_2 là các ánh xạ không giãn và $F(T_1) = C_1,\ F(T_2) = C_2$. Bài toán tìm một phần tử $x^* \in C_1 \cap C_2$ được đưa về bài toán tìm một điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn T_1 và T_2.

Việc tính toán các siêu phẳng $H_n,\ W_n$ và hình chiếu tương ứng của x_0 trên $H_n,\ W_n$ được làm tương tự như ví dụ 2.2.



Hình 2.2

Chọn $x_0 = (0,0),\ \beta_n = \dfrac{1}{n},\ \ \mu_n = \dfrac{1}{2},$ tính $x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 5000 được trình bày trong bảng sau

Bảng 2.5

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0.1176470	0.4705882	0.1153171	0.4612687	0.1176235	0.4704941	0.1153169	0.4612678

Ví dụ 2.4 Xét bài toán tìm một điểm chung của hai đường tròn được đề cập trong ví dụ 2.2, với dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định bởi (2.21). Theo phương pháp này, ta có

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \{z \in H_n : ||x_n - z|| \geq ||y_n - z||\} \\ &= \{z \in H_n : \langle y_n - x_n, z\rangle \geq \frac{1}{2}(||y_n||^2 - ||x_n||^2)\}. \end{aligned}$$

Đặt $P = y_n - x_n,\ \ M = \dfrac{1}{2}(||y_n||^2 - ||x_n||^2)$. Khi đó, tập H_{n+1} được viết lại ở dạng sau

$$H_{n+1} = \{z \in H_n : \langle P, z\rangle \geq M\}.$$

Đặt

$$W_0 = H,\ W_n = \{z \in H : \langle P, z\rangle \geq M\},\ n \geq 1.$$

Khi đó,

$$H_{n+1} = W_0 \cap W_1 ... \cap W_n, \ n \geq 0.$$

Chọn $x_0 = \left(\frac{9}{4}, 0\right), \ \mu_n = \frac{1}{2}$ và tính

$$x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0) = P_{W_0 \cap W_1 ... \cap W_n}(x_0).$$

Như vậy, để xác định $P_{H_{n+1}}(x_0)$, ta có thể sử dụng phương pháp chiếu xoay vòng dạng

$$u_{k+1} = P_{W_{k \bmod n}}(u_k), \ u_0 = x_0, \ k \geq 0,$$

hoặc sử dụng phương pháp lặp dưới đây

$$u_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{W_i}(u_k)}{n}, \ u_0 = x_0, \ k \geq 0. \tag{2.41}$$

Ở đây chúng tôi sử dụng phương pháp lặp (2.41) để xấp xỉ $P_{H_{n+1}}(x_0)$.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 200 được trình bày bảng sau

Bảng 2.6

Nghiệm		x_n		y_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2
2.2500000000	1.0317541634	2.2499871121	1.0317755681	2.2500564711	1.0317684570

Nhận xét 2.1 Qua các kết quả số ở trên, ta nhận thấy nếu số bước lặp càng lớn thì nghiệm xấp xỉ càng gần nghiệm chính xác.

Kết luận

Chương này, chúng tôi đưa ra cải biên mới cho các phương pháp lặp của Moudafi A. và đã thu được các định lý về sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp (2.1), (2.2), (2.8), (2.9) với các điều kiện nhẹ hơn so với kết quả trước đó "Định lý 2.1, Định lý 2.2". Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, cho bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ hay hai ánh xạ không giãn (2.13), (2.25) "Định lý 2.3, Định lý 2.5". Cuối cùng, chúng tôi thu được sự hội tụ mạnh của phương pháp dạng đường dốc lai ghép (2.21) "Định lý 2.4". Một điểm nổi bật ở các kết quả thu được trong các "Định lý 2.3, Định lý 2.4" và "Định lý 2.5" là các tập C_n và Q_n được thay bằng các nửa không gian. Mục cuối cùng của chương này, dành cho việc trình bày các ví dụ số đơn giản nhằm minh họa cho tính đúng đắn của các kết quả nghiên cứu đạt được.

Chương 3

Phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn

Mở rộng cho bài toán tìm điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$, năm 2003, Nakajo K. và Takahashi W. đã đề xuất phương pháp (0.6), dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$. Năm 2008, Saejung S. đã xét quá trình lặp tương tự mà không cần dùng đến tích phân Bochner. Khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (0.8) hội tụ mạnh tới điểm bất động chung $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$ của nửa nhóm ánh xạ không giãn.

Chương này gồm 3 mục. Mục 3.1 đưa ra định lý hội tụ mạnh về điểm bất động chung của một nửa nhóm không giãn, dựa trên phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học. Mục 3.2 đề cập đến một số định lý hội tụ mạnh cho bài toán tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trên hai tập khác nhau. Mục 3.3 giới thiệu ví dụ số đơn giản nhằm minh họa thêm cho các kết quả lý thuyết thu được. Các kết quả chương này được lấy từ các bài báo (1), (3), (4) trong danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

3.1. Điểm bất động của một nửa nhóm không giãn

Giả sử $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ là một nửa nhóm không giãn trên tập con khác rỗng, lồi và đóng C của không gian Hilbert thực H với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Để tìm một phần tử $p \in \mathcal{F}$, dựa trên các phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, chúng tôi đề xuất một phương pháp lặp mới sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ z_n = \alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad +\beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Chúng tôi sẽ chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.1) về điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn $\{T(t) : t \geq 0\}$ với một số điều kiện thích hợp đặt lên các tham số $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{t_n\}$.

Trước hết, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.1 (xem [30]) *Cho C là một tập con lồi, đóng, bị chặn khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C. Khi đó, với mỗi $h \geq 0$ thì*

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in C} \left\| T(h)\left(\frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds\right) - \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds \right\| = 0.$$

Ta chứng minh định lý sau.

Định lý 3.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số trong* [0,1] *thỏa mãn $\alpha_n \to 1,\ \beta_n \to 0$ và $t_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$*

và $\{y_n\}$ *xác định bởi* (3.1) *cùng hội tụ mạnh tới* $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$*, khi* $n \to \infty$.

Chứng minh. Với mỗi $p \in \mathcal{F}$, ta có

$$p = P_C(p) = T(s)P_C(p),$$

trong đó $s > 0$. Do đó từ (3.1) và tính lồi của $\|.\|^2$ ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 &= \Big\|\alpha_n(P_C(x_n) - p) \\
&\quad + (1-\alpha_n)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds - p\Big)\Big\|^2 \\
&= \Big\|\alpha_n(P_C(x_n) - P_C(p)) \\
&\quad + (1-\alpha_n)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}[T(s)P_C(x_n) - T(s)P_C(p)]ds\Big)\Big\|^2 \\
&\le \alpha_n\|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\Big\|T(s)P_C(x_n) - T(s)P_C(p)\Big\|ds\Big)^2 \\
&\le \alpha_n\|x_n - p\|^2 + (1-\alpha_n)\|P_C(x_n) - P_C(p)\|^2 \\
&\le \|x_n - p\|^2.
\end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự cũng nhận được

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\|^2 &= \Big\|\beta_n(x_0 - p) + (1-\beta_n)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_nds - p\Big)\Big\|^2 \\
&\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\Big\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}[T(s)z_n - T(s)p]ds\Big\|^2 \\
&\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|z_n - p\|^2 \\
&\le \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^2 \\
&= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0 - p\|^2 - \|x_n - p\|^2) \\
&\le \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, p\rangle).
\end{aligned}$$

Suy ra, $p \in H_n$ với $n \ge 0$. Điều đó có nghĩa là $\mathcal{F} \subset H_n$ với $n \ge 0$. Chứng minh tương tự như định lý 2.3, ta nhận được những tính chất sau:

(i) $\mathcal{F} \subset H_n \cap W_n$,

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|,\ u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0), \tag{3.2}$$

với $n \geq 0$. Điều này kéo theo dãy $\{x_n\}$ bị chặn và do đó các dãy

$$\left\{\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds\right\}, \{z_n\} \quad \text{và} \quad \left\{\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\}$$

cũng bị chặn.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - P_C(x_n)\| = 0. \tag{3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{k+1}\| = 0. \tag{3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{3.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\| = 0. \tag{3.7}$$

Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến phần tử $p \in H$ khi $j \to \infty$. Từ (3.7), dãy con $\{z_{n_j}\}$ cũng hội tụ yếu tới $p \in C$.

Mặt khác đối với mỗi $h > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\|T(h)z_n - z_n\| &\leq \left\|T(h)z_n - T(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right)\right\| \\ &\quad + \left\|T(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\| \\ &\quad + \left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds - z_n\right\| \\ &\leq 2\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds - z_n\right\| \\ &\quad + \left\|T(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\|.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Đặt $C_0 = \{z \in C : \|z - u_0\| \leq 2\|x_0 - u_0\|\}$. Do $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0) \in C$, nên từ (3.1), (3.2) suy ra

$$\begin{aligned}
\|z_n - u_0\| &= \left\|\alpha_n(P_C(x_n) - u_0) + (1-\alpha_n)\left[\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds - u_0\right]\right\| \\
&= \Bigg\|\alpha_n[P_C(x_n) - P_C(u_0)] \\
&\quad + (1-\alpha_n)\left[\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(u_0)ds\right]\Bigg\| \\
&\leq \alpha_n\|x_n - u_0\| \\
&\quad + (1-\alpha_n)\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}[T(s)P_C(x_n) - T(s)P_C(u_0)]ds\right\| \\
&\leq \|x_n - x_0\| + \|x_0 - u_0\| \\
&\leq 2\|x_0 - u_0\|.
\end{aligned}$$

Do vậy, C_0 là tập con lồi, đóng, khác rỗng và bị chặn. Dễ thấy $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C_0. Từ Bổ đề 3.1 suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n ds\right\| = 0,$$

với mọi $h > 0$ cố định. Do đó từ (3.7), (3.8) ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\|T(h)z_n - z_n\| = 0,$$

với mỗi $h > 0$. Từ Bổ đề 1.1 suy ra $p \in F(T(h))$ với mọi $h > 0$. Điều này có nghĩa là $p \in \mathcal{F}$. Tương tự như chứng minh của định lý 2.3 và sử dụng (3.2), (3.7), chúng ta nhận được dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.1) hội tụ mạnh tới u_0 khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh. □

Ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 3.1 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là một dãy số trong* [0,1] *thỏa mãn*

$\beta_n \to 0$. *Khi đó, các dãy* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$, *xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n\cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, *khi* $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 3.1, lấy $\alpha_n \equiv 1$, ta nhận được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.2 *Cho* C *là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực* H *và* $\{T(t) : t \ge 0\}$ *là nửa nhóm không giãn trên* C *với* $\mathcal{F} = \cap_{t\ge 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{\alpha_n\}$ *là dãy số trong* [0,1] *thỏa mãn* $\alpha_n \to 1$. *Khi đó, các dãy* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ *xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kỳ,} \\ y_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\left[\alpha_n P_C(x_n) + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds\right]ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n\cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, *khi* $n \to \infty$.

*Chứng minh.*Trong định lý 3.1, lấy $\beta_n \equiv 0$, ta nhận được điều phải chứng minh. □

Tiếp theo chúng tôi đề cập đến một cải tiến của phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm một phần tử $p \in \mathcal{F}$. Chính xác hơn, chúng tôi xét phương pháp sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n(I - T_n P_C)(x_n), \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

và

$$\begin{cases} x_0 \in H = H_0, \\ y_n = x_n - \mu_n(I - T(t_n) P_C(x_n)), \\ H_{n+1} = \{z \in H_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{H_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (3.9) được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 3.2 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C thỏa mãn $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy số trong $(a, 1]$ với $a \in (0, 1]$ và $\lambda_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi* (3.9)*, cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Với mỗi $p \in \mathcal{F} \subseteq C$, từ (3.9) và $p = P_C(p)$ ta có:

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \left\|(1 - \mu_n)(x_n - p) + \mu_n\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds - p\right)\right\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| \\ &\quad + \mu_n\left\|\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n}(T(s)P_C(x_n) - T(s)P_C(p))ds\right\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n}\Big\|x_n - p\Big\|ds = \|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Vì vậy, $p \in H_n$. Do đó $\mathcal{F} \subset H_n$ với mọi $n \geq 0$. Từ chứng minh của định lý 2.4 ta thấy dãy $\{x_n\}$ hoàn toàn xác định và hội tụ mạnh tới phần tử

$p \in H$ và

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|, \ \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\| = 0, \tag{3.11}$$

trong đó $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$.

$$\text{Vì } \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \in C,$$

và P_C là ánh xạ không giãn, nên

$$\begin{aligned} &\left\| P_C(x_n) - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\| \\ &= \left\| P_C(x_n) - P_C\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\| \\ &\leq \left\| x_n - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\|. \end{aligned}$$

Do vậy, từ (3.11) ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P_C(x_n) - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\| = 0. \tag{3.12}$$

Điều này cùng với (3.11) và $x_n \to p$ kéo theo dãy $\{P_C(x_n)\}$ hội tụ về p. Do C là tập đóng, nên $p \in C$.

Mặt khác, với mỗi $h > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} &\|T(h)P_C(x_n) - P_C(x_n)\| \\ &\leq \left\| T(h)P_C(x_n) - T(h)\Big(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds\Big) \right\| \\ &\quad + \left\| T(h)\Big(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds\Big) - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds - P_C(x_n) \right\| \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\leq 2\left\|\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds - P_C(x_n)\right\|$$
$$+\left\|T(h)\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds\right) - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(s)P_C(x_n)ds\right\|.$$

Đặt $C_0 = \{z \in C : \|z - u_0\| \leq 2\|x_0 - u_0\|\}$.
Từ (3.11) và $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0) \in C$, suy ra

$$\begin{aligned}\|P_C(x_n) - u_0\| &= \|P_C(x_n) - P_C(u_0)\| \\ &\leq \|x_n - u_0\| \\ &\leq \|x_n - x_0\| + \|x_0 - u_0\| \\ &\leq 2\|x_0 - u_0\|.\end{aligned}$$

Vậy, C_0 là một tập con lồi, đóng, khác rỗng và bị chặn trong H. Dễ thấy $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C_0. Từ Bổ đề 3.1, (3.13) và $P_C(x_n) \to p$, ta suy ra $p = T(h)p$ với mỗi $h > 0$. Vậy, $p \in \mathcal{F}$. Từ (3.11) và $p \in \mathcal{F}$, ta suy ra $p = u_0$ và $y_n \to u_0$ khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo, sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (3.10) được cho bởi định lý dưới đây.

Định lý 3.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C sao cho $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\mu_n\}$ là dãy trong $(a, 1]$ với $a \in (0, 1]$ và $\{t_n\}$ là dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện $\liminf_{n\to\infty} t_n = 0$, $\limsup_{n\to\infty} t_n > 0$, và $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.10), hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Theo chứng minh của định lý 2.4 và định lý 3.2 ta có:

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - T(t_n)P_C(x_n)\| = 0, \quad (3.14)$$

$$\lim_{n\to\infty} \|P_C(x_n) - T(t_n)P_C(x_n)\| = 0, \quad (3.15)$$

và dãy $\{x_n\}$, $\{P_C(x_n)\}$ hội tụ về $p \in C$.

Không mất tính tổng quát, như trong [29],

$$\lim_{j\to\infty} t_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\|P_C(x_{n_j}) - T(t_{n_j})P_C(x_{n_j})\|}{t_{n_j}} = 0. \tag{3.16}$$

Bây giờ ta chỉ ra $p = T(t)p$ với mỗi $t \geq 0$ cố định. Dễ thấy

$$\begin{aligned}
\|P_C(x_{n_j}) - T(t)p\| \leq & \sum_{l=0}^{[t-t_{n_j}]-1} \Big\| T(lt_{n_j})P_C(x_{n_j}) - T((l+1)t_{n_j})P_C(x_{k_j}) \Big\| \\
& + \Big\| T\Big(\Big[\frac{t}{t_{n_j}}\Big]\Big) P_C(z_{n_j}) - T\Big(\Big[\frac{t}{t_{n_j}}\Big]\Big)p \Big\| + \Big\| T\Big(\Big[\frac{t}{t_{k_j}}\Big]\Big)p - T(t)p \Big\| \\
\leq & \frac{t}{t_{n_j}} \Big\| P_C(x_{n_j}) - T(t_{n_j})P_C(x_{n_j}) \Big\| + \|P_C(x_{n_j}) - p\| \\
& + \Big\| T\Big(t - \Big[\frac{t}{t_{n_j}}\Big]t_{n_j}\Big)p - p \Big\|.
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\|P_C(x_{n_j}) - T(t)p\| \leq & \frac{t}{t_{n_j}} \Big\| P_C(x_{n_j}) - T(t_{n_j})P_C(x_{n_j}) \Big\| + \|P_C(x_{n_j}) - p\| \\
& + \sup\{\|T(s)p - p\| : 0 \leq s \leq t_{n_j}\}.
\end{aligned}$$

Từ đó, kết hợp với (3.16) và tính chất của nửa nhóm, ta nhận được

$$\lim_{j\to\infty} \|P_C(x_{n_j}) - T(t)p\| = 0.$$

Vì vậy, $p \in \mathcal{F}$. Do đó, từ (3.14), ta có dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về u_0 khi $n \to \infty$. Sự hội tụ mạnh của dãy $\{y_n\}$ về u_0 được suy ra từ (3.10), (3.14), $\mu_n \in (a, 1]$ và $x_n \to u_0$ khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh. □

3.2. Điểm bất động của hai nửa nhóm không giãn

Giả sử $C_1,\ C_2$ hai tập con lồi, đóng trong H, $\{T_1(t) : t \geq 0\}$, $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn từ $C_1,\ C_2$ vào chính nó. Vấn đề nghiên cứu đặt ra ở đây là: Tìm

$$q \in \mathcal{F}_{1,2} := \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \tag{3.17}$$

khi $\mathcal{F}_i = \cap_{t\geq 0} F(T_i(t))$. ($\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ không rỗng). Trường hợp đặc biệt khi $C_1 = C_2 = C$, vấn đề (3.17) được giải quyết trong [44].

Chúng tôi đưa vào phương pháp lặp mới trên cơ sở phương pháp lặp Mann - Halpern để tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert thực H.

Dựa trên (3.17) chúng tôi đưa vào quá trình lặp mới như sau

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì}, \\ z_n = x_n - \mu_n\Big(x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_1(s)P_{C_1}(x_n)ds\Big), \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_2(s)P_{C_2}(z_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 \\ \qquad +\beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n\cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

và chỉ ra sự hội tụ mạnh của các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.18) đến điểm $q = u_0 \in \mathcal{F}_{1,2}$.

Định lý 3.4 *Cho C_1 và C_2 là hai tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Cho $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ và $\{T_2(t) : t \geq 0\}$ là hai nửa nhóm không giãn trên C_1 và C_2 sao cho $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, trong đó $\mathcal{F}_i = \cap_{t\geq 0} F(T_i(t)), i = 1, 2$. Giả sử $\{\mu_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy trong [0,1] sao cho $\mu_n \in (a, b)$ với $a, b \in (0, 1)$, $\beta_n \to 0$ và $t_n \to +\infty$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}, \{z_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi (3.18) cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.*

Chứng minh. Với mỗi $p \in \mathcal{F}$ và $s > 0$ ta có

$$p = P_{C_i}p = \tilde{T}_i(s)p, \ i = 1, 2,$$

trong đó $\tilde{T}_i(s) = T_i(s)P_{C_i}$, do đó từ (3.18) và Mệnh đề 1.1 ta nhận được

$$
\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 &= \left\|(1-\mu_n)(x_n - p) + \mu_n\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_1(s)x_n ds - p\right)\right\|^2 \\
&= \left\|(1-\mu_n)(x_n - p) + \mu_n\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} [\tilde{T}_1(s)x_n - \tilde{T}_1(s)p] ds\right)\right\|^2 \\
&= (1-\mu_n)\|x_n - p\|^2 + \mu_n\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_1(s)x_n - \tilde{T}_1(s)p ds\right\|^2 \\
&\quad - (1-\mu_n)\mu_n\left\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_1(s)x_n ds\right\|^2 \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - (1-\mu_n)\mu_n\left\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_1(s)x_n ds\right\|^2 \\
&\leq \|x_n - p\|^2.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Lập luận tương tự và từ tính lồi của chuẩn $\|.\|^2$, ta thấy

$$
\begin{aligned}
\|y_n - p\|^2 &= \left\|\beta_n(x_0 - p) + (1-\beta_n)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds - p\right)\right\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} [\tilde{T}_2(s)z_n - \tilde{T}_2(s)p] ds\right\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|z_n - p\|^2 \\
&\leq \beta_n\|x_0 - p\|^2 + (1-\beta_n)\|x_n - p\|^2 \\
&= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0 - p\|^2 - \|x_n - p\|^2) \\
&= \|x_n - p\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, p\rangle).
\end{aligned}
$$

Do đó, $p \in H_n$ với $n \geq 0$. Điều đó có nghĩa là $\mathcal{F} \subset H_n$ với $n \geq 0$. Tương tự như chứng minh của định lý 2.5 ta nhận được những tính chất sau:

(i) $\mathcal{F} \subset H_n \cap W_n$,

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|u_0 - x_0\|,\ u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0), \tag{3.20}$$

với $n \geq 0$. Điều này kéo theo dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{3.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{k+1}\| = 0. \tag{3.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{3.23}$$

Chú ý

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds = y_n - \beta_n\Big(x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds\Big) + \beta_n(x_n - x_0)$$

ta có

$$\Big\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds\Big\| \le \|x_n - y_n\| + \beta_n\Big\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds\Big\| + \beta_n\|x_n - x_0\|.$$

Từ (3.20) và bất đẳng thức trên, suy ra

$$\Big\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds\Big\| \le \frac{1}{1-\beta_n}\Big(\|x_n - y_n\| + \beta_n\|u_0 - x_0\|\Big).$$

Do $\beta_n \to 0$ ($\beta_n \le 1-\beta$ với $\beta \in (0,1)$), (3.23) và bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_2(s)z_n ds\Big\| = 0. \tag{3.24}$$

Như trong chứng minh định lý 2.5 bằng cách sử dụng (3.24) ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds\Big\| = 0,\ i = 1, 2, \tag{3.25}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0. \tag{3.26}$$

Bởi vì

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds \in C_i,\ i = 1, 2,$$

nên

$$\left\|P_{C_i}(x_n) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds\right\| = \left\|P_{C_i}(x_n) - P_{C_i}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds\right\| \leq \left\|x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds\right\|,$$

do đó từ (3.25) kéo theo

$$\lim_{n\to\infty}\left\|P_{C_i}(x_n) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \tilde{T}_i(s)x_n ds\right\| = 0,\ i = 1, 2. \tag{3.27}$$

Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_j}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới một phần tử $q \in H$ khi $j \to \infty$. Từ (3.25), (3.27), ta nhận được $u^i_{n_j} := P_{C_i}(x_{n_j}) \to q$ khi $j \to \infty$. Có nghĩa là $q \in C_1 \cap C_2$. Do vậy, với mỗi $h > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\|T_i(h)u^i_n - u^i_n\| &\leq \left\|T_i(h)u^i_n - T_i(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds\right)\right\| \\ &\quad + \left\|T_i(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds\right\| \\ &\quad + \left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds - u^i_n\right\| \\ &\leq 2\left\|\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds - u^i_n\right\| \\ &\quad + \left\|T(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T_i(s)u^i_n ds\right\|.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Cho $C^i_0 = \{z \in C_i : \|z - u_0\| \leq 2\|x_0 - u_0\|\}$. Bởi vì $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0) \in C_i$ nên

$$\|u^i_{n_j} - u_0\| = \|P_{C_i}(x_{n_j}) - P_{C_i}(u_0)\| \leq \|x_{n_j} - u_0\| \leq 2\|x_0 - u_o\|.$$

Do vậy, C^i_0 là một tập con lồi, đóng, khác rỗng, bị chặn. Dễ thấy $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C^i_0. Từ Bổ đề 3.1, suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_i(h)\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u^i_n ds\right) - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)u^i_n ds\right\| = 0,$$

với mọi $h > 0$ cố định, do đó từ (3.27), (3.28) ta nhận được

$$\lim_{j\to\infty} \|T_i(h)u^i_{n_j} - u^i_{n_j}\| = 0,$$

với mỗi $h > 0$. Từ Bổ đề 1.1 suy ra $q \in F(T_i(h))$ với mọi $h > 0$. Điều này có nghĩa là $q \in \mathcal{F}$. Theo chứng minh của định lý 2.5 và sử dụng (3.12), (3.23), (3.26) ta nhận được dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ xác định bởi (3.1) hội tụ mạnh tới u_0 khi $n \to \infty$. Định lý được chứng minh. □

Ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 3.3 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\beta_n\}$ là dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\beta_n \to 0$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$, xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì,} \\ y_n = \beta_n x_0 + (1-\beta_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + \beta_n(\|x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, z\rangle)\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n\cap W_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 3.4, lấy $T_1(s) = I$ với mọi $s \geq 0$, $C_1 = H$, $C_2 = C$ và $T_2(s) = T(s)$, ta nhận được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.4 *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $\{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm không giãn trên C với $\mathcal{F} = \cap_{t\geq 0}F(T(t)) \neq \emptyset$. Giả sử $\{\alpha_n\}$ là dãy số trong $[0,1]$ thỏa mãn $\alpha_n \to 1$. Khi đó, các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in H \text{ là một phần tử bất kì}, \\ y_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)\Big(P_C(x_n) - \mu_n\Big[x_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)P_C(x_n)ds\Big]\Big)ds, \\ H_n = \{z \in H : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_0 - x_n\rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases}$$

cùng hội tụ mạnh tới $u_0 = P_{\mathcal{F}}(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Trong định lý 3.4, lấy $\beta_n \equiv 0, C_2 = H, C_1 = C, T_2(s) = I$ và $T_1(s) = T(s)$ với mọi $s \ge 0$, ta nhận được điều phải chứng minh. □

3.3. Ví dụ tính toán minh họa

Ví dụ 3.1 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, với mỗi $t \ge 0$, xét ánh xạ $T(t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$T(t)x = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Ta có $\|T(t)x - T(t)y\| \le \|x - y\|$. Suy ra, $T(t)$ là các ánh xạ không giãn. Ngoài ra, $T(\theta) = I$ và $T(t+s) = T(t) \circ T(s),\ t, s \ge 0$. Do đó, $\{T(t) : t \ge 0\}$ là một nửa nhóm không giãn trên $\mathbb{R}^2$.
Dễ dàng kiểm tra được $\mathcal{F} = \cap_{t\ge 0} F(T(t)) = \{(0,0)\}$.
Xét dãy lặp (3.1) cho nửa nhóm không giãn trên $C = \mathbb{R}$. Trước hết ta tính tích phân $\int_0^{t_n} T(t)xdt$ theo công thức Simpson như sau. Ta có

$$\int_0^{t_n} T(t)xdt = \begin{pmatrix} \int_0^{t_n} C_1(t)dt \\ \int_0^{t_n} C_2(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

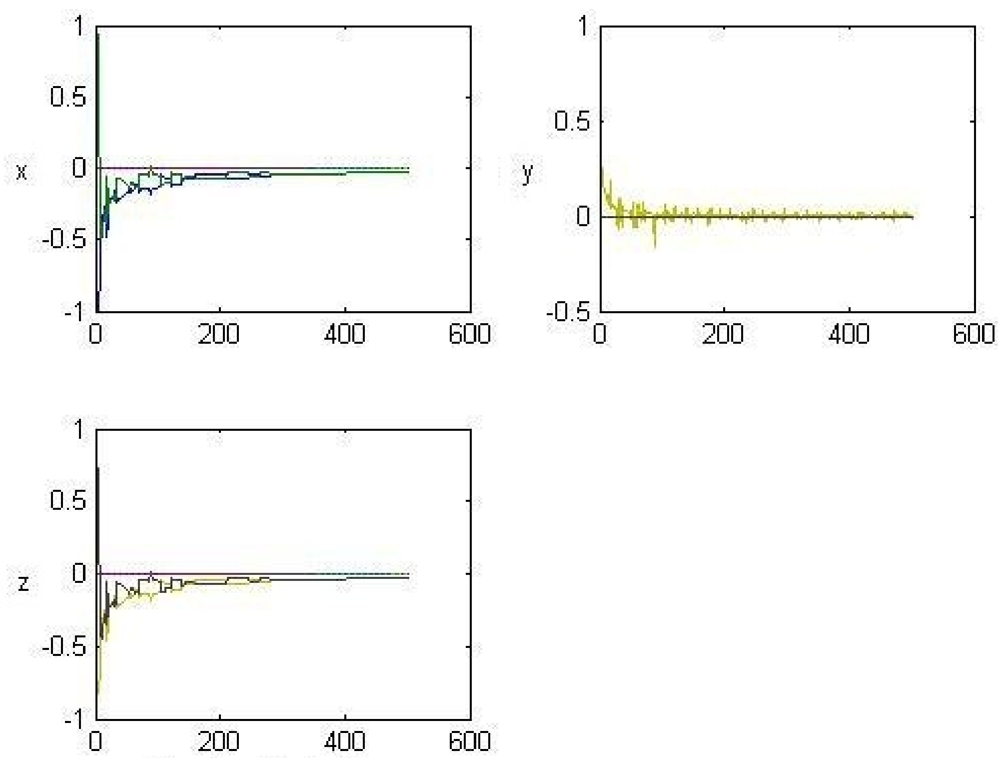
trong đó $C_1(t) = x_1\cos(t) - x_2\sin(t)$ và $C_2(t) = x_1\sin(t) + x_2\cos(t)$.
Chọn $x_0 = (-1, 1)$, $\alpha_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $\beta_n = \dfrac{1}{n}$, $t_n = n\pi$ và tính

$x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_0)$, ở đây việc tính các siêu phẳng H_n, W_n và hình chiếu của x_0 trên các siêu phẳng này được làm tương tự như trong ví dụ 2.2.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 500 được trình bày bảng sau
Bảng 3.1

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0	0	-0.031259	-0.031259	-0.014563	-0.014563	-0.031230	-0.031230

Ngoài ra, sự hội tụ của các dãy lặp $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ về nghiệm $(0,0)$ còn được thể hiện rõ nét hơn qua hình sau



Hình 3.1

Tiếp theo, chúng tôi cũng thực hiện thử nghiệm số cho bài toán trên bởi phương pháp lặp (3.9).
Giá trị $T_n P_C(x_n) = \dfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(t)x_n dt$ được tính bằng công thức Simpson

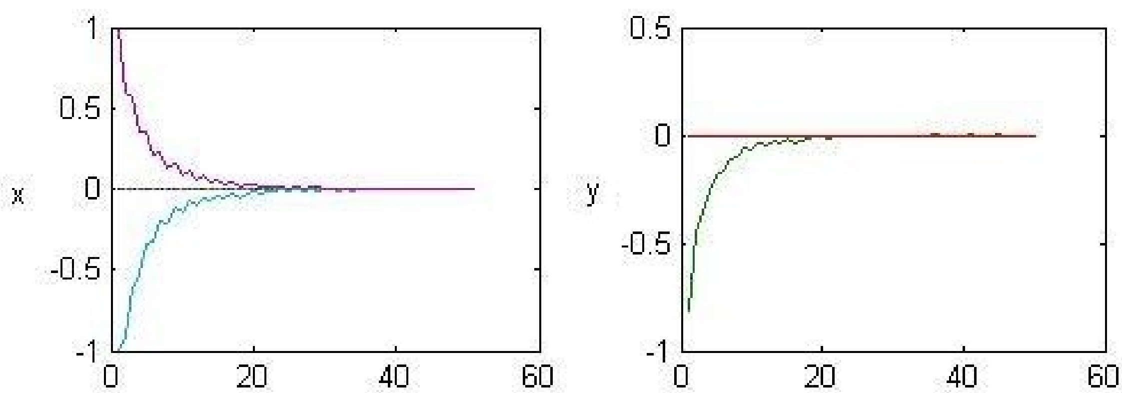
giống như trên. Khi đó ta tính được $y_n = (1-\mu_n)x_n + \mu_n T_n P_C(x_n)$ và việc tính $H_{n+1},\ W_n$ và $P_{H_{n+1}}(x_0)$ được tính tương tự như trong ví dụ 2.4. Chọn $x_0 = (-1,1),\ \mu_n = \dfrac{1}{2},\ t_n = n\pi.$

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 50 được trình bày bảng sau

Bảng 3.2

Nghiệm		x_n		y_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2
0	0	-0.735×10^{-3}	0.445×10^{-3}	0.461×10^{-3}	-0.239×10^{-3}

Kết quả tính toán sau 50 bước lặp còn được thể hiện rõ hơn trong hình dưới đây



Hình 3.2

Ví dụ 3.2 Trong ví dụ này, xét phương pháp lặp (3.18) và giải bài toán tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn $\{T_m(t)\}$ với ma trận được cho bởi: $\begin{pmatrix} \cos(mt) & -\sin(mt) \\ \sin(mt) & \cos(mt) \end{pmatrix},\ m = 1,2.$

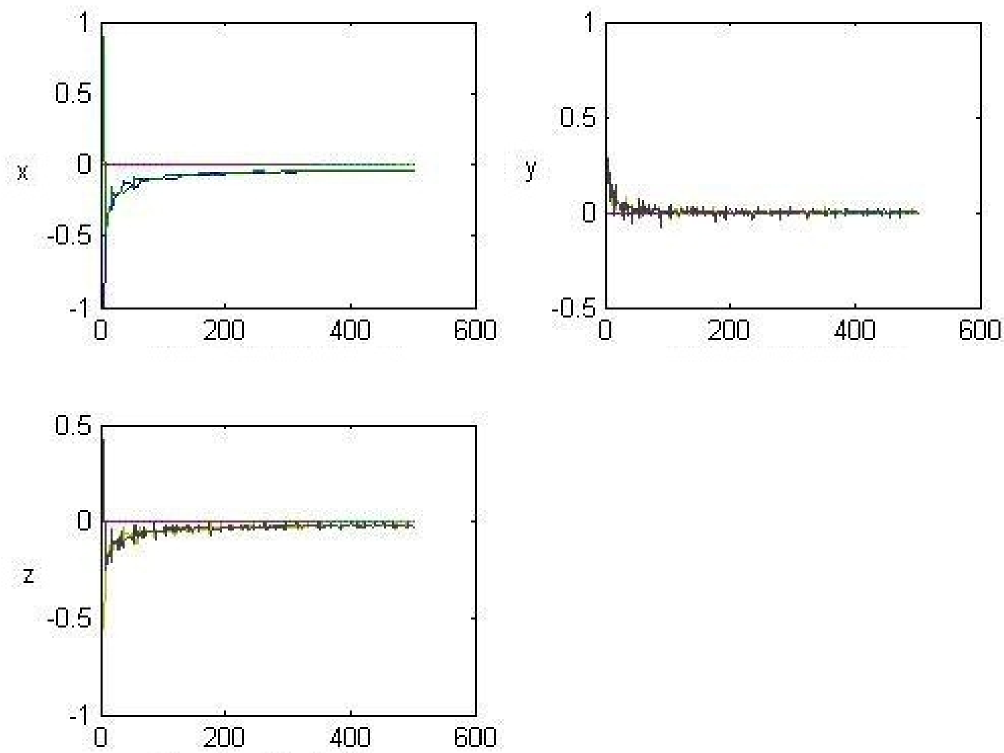
Chọn $x_0 = (-1,1),\ \mu_n = \dfrac{1}{2},\ \beta_n = \dfrac{1}{n},\ t_n = n\pi$ và tính $x_{n+1} = P_{H_n\cap W_n}(x_0)$, trong đó việc tính các siêu phẳng $H_n,\ W_n$ và hình chiếu của x_0 trên các siêu phẳng này được làm tương tự như trong ví dụ 2.2.

Kết quả tính toán ở bước lặp thứ 500 được trình bày bảng sau

Bảng 3.3

Nghiệm		x_n		y_n		z_n	
x^1	x^2	x_n^1	x_n^2	y_n^1	y_n^2	z_n^1	z_n^2
0	0	-0.036923	-0.037136	-0.008730	-0.008784	-0.027451	-0.027611

Sự hội tụ của phương pháp lặp về điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn còn được thể hiện thông qua hình dưới đây



Hình 3.3

Nhận xét 3.1 Qua các bảng kết quả số ở trên ta có thể thấy rằng nếu số bước lặp càng lớn thì nghiệm xấp xỉ càng gần nghiệm chính xác.

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học, đã cải biên các phương pháp lặp của Nakajo K. và Takahashi W., chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.1) "Định lý 3.1" và dựa trên các kết quả của Seajung S., chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.9), (3.10) "Định lý 3.2, Định lý 3.3", bằng cách thay các tập lồi, đóng C_n và Q_n bằng các nửa không gian, điều này giúp chúng ta có thể xác định x_{n+1} dễ dàng hơn. Ngoài ra, chúng tôi cũng đề xuất một phương pháp lặp mới (3.18), cho bài toán tìm điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn "Định lý 3.4". Cũng giống như Chương 2 của luận án, mục cuối cùng của chương này chúng tôi cũng trình bày một ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các kết quả đạt được.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ ĐỀ XUẤT

Luận án đã đề cập đến các vấn đề sau

1. Trong luận án chúng tôi cải tiến phương pháp của Moudafi, nhằm thu được sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp ẩn và lặp hiện với các điều kiện "nhẹ hơn" đặt lên các tham số. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp của Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trên tập lồi, đóng C hay điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn trên hai tập lồi, đóng, có giao khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp dạng đường dốc lai ghép thu hẹp về điểm bất động của ánh xạ không giãn.

2. Nghiên cứu sự kết hợp giữa phương pháp lặp của Mann - Halpern và phương pháp lai ghép trong qui hoạch toán học để tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn trên tập lồi, đóng C hay điểm bất động chung của hai nửa nhóm không giãn trên hai tập lồi, đóng, có giao khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Nghiên cứu sự hội tụ mạnh của phương pháp dạng đường dốc lai ghép cho bài toán tìm điểm bất động của nửa nhóm không giãn.

Những vấn đề tiếp tục nghiên cứu

1. Sử dụng các kết quả nhận được trong luận án để các bài toán phức tạp hơn;

2. Mở rộng các kết quả trên lên không gian Banach.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

(1). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Shrinking hybrid descent-like methods for nonexpansive mappings and semigroups", *Nonlinear Functional Analysis and Applications.*, Vol. 16, No. 3, pp. 331-339.

(2). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Iteration methods for fixed point of a nonexpansive mapping", *International Mathematical Forum.*, Vol. 6, No. 60, pp. 2963-2974.

(3). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2011), "Hybrid Mann - Halpern iteration methods for nonexpansive mappings and semigroups", *Applied Mathematics and Computation.*, Vol. 218, Issue 6, pp. 2459-2466.

(4). Nguyen Buong, Nguyen Duc Lang (2012), "Hybrid descent - like halpern iteration methods for two nonexpansive mappings and semigroups on two sets", *Theoretical Mathematics & Applications.*, Vol. 2, No. 3, pp. 23-38.

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Hồng Tân, Nguyễn Thị Thanh Hà (2002), *Các Định Lí Điểm Bất Động*, Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm.

[2] Alber Ya. I. (2007), "On the stability of iterative approximations to fixed points of nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 328, pp. 958-971.

[3] Pham Ky Anh, Cao Van Chung (2014), "Parallel Hybrid Methods for a Finite Family of Relatively Nonexpansive Mappings", *Numerical Functional Analysis and Optimization.*, 35, pp. 649-664.

[4] P. N. Anh (2012), "Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 154, pp. 303-320.

[5] P. N. Anh , L. D. Muu (2014), "A hybrid subgradient algorithm for nonexpansive mappings and equilibrium problems", *Optim. Lett.*, 8, pp. 727-738.

[6] Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R. (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications.*, Springer.

[7] Bauschke H. H. (1996), "The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 202, pp. 150-159.

[8] Bauschke H. H., Combettes P. L., Luke D. R. (2006), "A strongly convergent reflection method for finding the projection onto the intersection of two closed convex sets in a Hilbert spaces", *J. Approx. Theory. Appl.*, 141, pp. 63-69.

[9] Banach S. (1922), "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications", *Fund. Math.*, 3, pp. 133-181.

[10] Nguyen Buong (2010), "Strong convergence theorem of an iterative method for variational inequalities and fixed point problems in Hilbert spaces", *Appl. Math. Comput.*, 217, pp. 322-329.

[11] Nguyen Buong (2010), "Strong convergence theorem for nonexpansive semigroups in Hilbert space", *Nonlinear Anal.*, 72(12), pp. 4534-4540.

[12] Nguyen Buong (2011), "Strong convergence of a method for variational inequality problems and fixed point problems of noexpensive semigroup in Hilbert spaces", *J. Appl. Math. Inform.*, 29(1-2), pp. 61-74.

[13] Nguyen Buong (2011), "Hybrid Ishikawa iterative methods for a nonexpansive semigroup in Hilbert space", *Comput. Math. Appl.*, 61, pp. 2546-2554.

[14] Ceng L. C., Ansari Q. H., Yao J. Ch. (2008), "Mann-type steepest-descent and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 29(9-10), pp. 987-1033.

[15] Cioranescu I. (1990), *Geometry of Banach Spaces, "Duality Mappings and Nonlinear Problems"*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[16] Halpern B. (1967), "Fixed points of nonexpanding maps", *Bull. Allahabad Math. Soc.*, 73, pp. 957-961.

[17] Ishikawa S. (1974), "Fixed points by new iteration method", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, pp. 147-150.

[18] Jung J. S. (2009), "Strong convergence of viscosity iteration methods for nonexpansive mappings", *Abstra. Differ. Equ. Appl.*, doi: 10.1155/2009/573156.

[19] Khan S. H., Fukhar-ud-din H. (2005), "Weak and strong convergence of a scheme with errors for two nonexpansive mappings", *Nonlinear Anal.*, 61, pp. 1295-1301.

[20] Krasnosel'skii M. A. (1955), "Two remarks on the method of successive approximations", *Uspekhi Mat. Nauk.*, 10, pp. 123-127.

[21] Lions P. L. (1977), "Approximation de points fixes de contractions", *C.R. Acad. Sci. Paris Sér.*, 284, pp. 1357-1359.

[22] Mann W. R. (1953), "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, pp. 506-510.

[23] Marino G., Xu H. K. (2007), "Weak and strong convergence theorems for stric pseudo-contractions in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 329, pp. 336-346.

[24] De Marr R. (1963), "Common fixed points for commuting contraction mappings", *Pacific J. Math.*, 13, pp. 1139-1141.

[25] Martinez-Yanes C., Xu H. K. (2006), "Strong convergence of the CQ method for fixed iteration processes", *Nonlinear Anal.*, 64, pp. 2400-2411.

[26] Moudafi A. (2000), "Viscosity approximation methods for fixed-point problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 241, pp. 46-55.

[27] Nakajo K., Takahashi W. (2003), "Strong convergence theorem for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups", *J. Math. Anal. Appl.*, 279, pp. 372-379.

[28] O'Hara J. G., Pilla P., Xu H. K. (2003), "Iterative approaches to finding nearest common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Nonlinear Anal.*, 54, pp. 1417-1426.

[29] Saejung S. (2008), "Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups without Bochner integrals", *FPTA.*, doi: 10.1155/2008/745010.

[30] Shimizu T., Takahashi W. (1997), "Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 211, pp. 71-83.

[31] Shioji N., Takahashi W. (1999), "Strong convergence theorems for continuous semigroup in Banach spaces", *Math. Japonica.*, 50, pp. 57-66.

[32] Solodov M. V., Svaiter B. F. (2000), "Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space", *Math. Program.*, 87, pp. 189-202.

[33] Song Y. (2006), "Viscosity approximation for nonexpansive nonselfmappings in Banach spaces", *Jrl Syst. Sci. & E06093.*, pp. 1-7.

[34] Song Y. (2008), "New strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings without boundary conditions", *J. Comput. Math.*, 56, pp. 1473-1478.

[35] Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. (2008), "Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 341, pp. 276-286.

[36] Duong Viet Thong (2011), "An implicit iteration process for nonexpansive semigroups", *Nonlinear Anal.*, 74, pp. 6116-6120.

[37] Duong Viet Thong (2012), "The comparison of the convergence speed between picard, Mann, Ishikawa and two-step iterations in Banach spaces", *Acta. Math. Vietnam.*, Volume 37, Number 2, pp. 243-249.

[38] Duong Viet Thong (2012), "Viscosity approximation method for Lipschitzian pseudocontraction semigroups in Banach spaces", *Vietnam. J. Math.*, 40:4, pp. 515-525.

[39] Nguyen Thi Thu Thuy (2013), "A new hybrid method for variational inequality and fixed point problems", *Vietnam. J. Math.*, 41, pp. 353-366.

[40] Nguyen Thi Thu Thuy, Pham Thanh Hieu (2013), "Implicit Iteration Methods for Variational Inequalities in Banach Spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, (2) 36(4), pp. 917-926.

[41] Nguyen Thi Thu Thuy (2014), "Hybrid Mann-Halpern iteration methods for finding fixed points involving asymptotically nonexpansive mappings and semigroups", *Vietnam. J. Math.*, Volume 42, Issue 2, pp. 219-232.

[42] Nguyen Thi Thu Thuy (2014), "An iterative method for equilibrium, variational inequality, and fixed point problems for a nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*,Volume 38, Issue 1, pp. 113-130.

[43] Nguyen Thi Thu Thuy (2015), "A strongly strongly convergent shrinking descent-like Halpern's method for monotone variational in-

equaliy and fixed point problems", *Acta. Math. Vietnam.*, Volume 39, Issue 3, pp. 379-391.

[44] Wattanawitoon K., Kumam P. (2010), "Convergence theorems of modified Ishikawa iterative scheme for two nonexpansive semi-groups", *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 914702, 12 pages.

[45] Wittmann R. (1992), "Approximation of fixed points of nonexpansive mappings", *Arch. Math.*, 59, pp. 486-491.

[46] Xu H. K. (2003), "An iterative approach to quadratic optimization", *J. Optim. Theory. Appl.*, 116, pp. 659-678.

[47] Xu H. K. (2004), "Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 298, pp. 279-291.

[48] Yamada I. (2001), "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intesection of fixed point sets of nonexpansive mappings", *Stud. Comput. Math.*, 8, pp. 473-504.

[49] Zhou H. (2008), "Convergence theorems of fixed points for k-strict pseudo-contractions in Hilbert spaces", *Nonlinear Anal.*, 69, pp. 456-462.